МАТЭМАТЫЧНАЯ
ЭНЦЫКЛАПЕДЫЯ

МАТЭМАТЫЧНАЯ энцыклапедыя

Галоўны рэдактар
Васіль Бернік

Рэдакцыйная калегія:
Эдмунд Звяровіч, Людміла Майсеня,
Павел Міхайлаў, Адольф Навумовіч, Зьміцер Санько,
Тамара Сухая, Рэгіна Тышкевіч

Мінск
«Тэхналогія»
2001

УДК 51(031)(075.3)
ББК 22.1я2
М 34

Навуковыя кансультанты:

Вячаслаў Абрашын, доктар фізіка-матэматычных навук (лікавыя метады матэматычнай фізікі)
Васіль Бернік, доктар фізіка-матэматычных навук (тэорыя лікаў)
Раймонд Вальвачоў, кандыдат фізіка-матэматычных навук (матэматычная логіка)
Іван Гайшун, акадэмік Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі (тэорыя аптымальнага кіравання)
Эдмунд Звяровіч, доктар фізіка-матэматычных навук (тэорыя функцый)
Мікалай Ізобаў, акадэмік Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі (дыферэнцыяльныя раўнанні)
Генадзь Мядзведзеў, доктар фізіка-матэматычных навук (тэорыя імавернасцяў)
Якаў Радына, доктар фізіка-матэматычных навук (функцыянальны аналіз)
Валянцін Русак, доктар фізіка-матэматычных навук (тэорыя апраксімацыі)
Павел Сцяцко, доктар філалагічных навук (тэрміналагічнае словаўтварэнне)
Рэгіна Тышкевіч, доктар фізіка-матэматычных навук (матэматычная кібернетыка)
Анатоль Фядэнка, доктар фізіка-матэматычных навук (геаметрыя)
Леанід Яновіч, член-карэспандэнт Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі (вылічальная матэматыка)
Вячаслаў Янчэўскі, доктар фізіка-матэматычных навук (алгебра)

Матэматычная энцыклапедыя / Гал. рэд. В.Бернік. — Мн.: Тэхналогія,
М 34 2001. — 496 с.: іл.
ISBN 985-458-059-8.

Энцыклапедыя змяшчае блізу 2500 артыкулаў па розных галінах матэматыкі і яе дастасаваннях. Да асноўнага матэрыялу дадаюцца біяграфічныя даведкі пра знакамітых замежных матэматыкаў і вядомых беларускіх навукоўцаў — дактароў фізіка-матэматычных і педагагічных навук па спецыяльнасці методыка матэматыкі. Дадатак складаюць беларуска-ангельскі і расійска-беларускі слоўнікі матэматычных тэрмінаў і тэрміналагічных словазлучэнняў.

Для навукоўцаў, выкладчыкаў усіх тыпаў навучальных устаноў і аспірантаў. Будзе карысная таксама студэнтам і школьнікам.

УДК 51(031)(075.3)
ББК 22.1я2

ISBN 985-458-059-8

Прысвячаецца 80-м угодкам утварэння Тэрміналагічнай камісіі Інбелкульта

ПРАДМОВА

Прапанаваная ўвазе чытачоў "Матэматычная энцыклапедыя" — гэта першае ў Беларусі выданне такога тыпу. Неабходнасць яго распрацоўкі выклікана перадусім бурным росквітам класічнай матэматыкі і шматлікіх дастасоўных яе кірункаў. Разам з тым стваральнікі энцыклапедыі вылучылі як важную задачу гарманічнае ўвасабленне сістэмы матэматычных паняццяў і дачыненняў паміж імі менавіта ў беларускім слове. Адразу скажам, што гэтая праца паказала вялікія магчымасці нашай мовы для скарыстання яе ў сферы дакладных навук.

З'яўленне энцыклапедыі ёсць вынік творчасці вялікага калектыву навукоўцаў: больш за 100 беларускіх матэматыкаў бралі ўдзел у яе напісанні. Але кніга не змагла б стаць рэальнасцю, калі б не было стваральнай працы папярэднікаў. Тэрміналагічны падмурак для яе закладзены яшчэ на пачатку XX стагоддзя такімі матэматыкамі і лінгвістамі, як Аляксандр Данілевіч, Вацлаў Ластоўскі, Клаўдусь Дуж-Душэўскі, Уладзімір Дыдырка, Аляксандр Круталевіч, Антон Лёсік, Язэп Пятосін і інш. Іхныя здабыткі, а таксама напрацоўкі пазнейшых навукоўцаў леглі ў аснову слоўнікаў і падручнікаў матэматыкі, выдадзеных за апошнія дзесяць гадоў. Яны неаднаразова абмяркоўваліся на навуковых канферэнцыях, семінарах і апрабаваныя ў працэсе выкладання вышэйшай матэматыкі ў розных ВНУ нашай краіны. Скарыстаная ў энцыклапедыі тэрмінасістэма працягвае менавіта гэтыя традыцыі. Адзначым, што яна ўхваленая Тэрміналагічнай камісіяй пры Міністэрстве адукацыі і навукі Рэспублікі Беларусь.

Істотнай асаблівасцю нашага падыходу да стварэння сістэмы тэрмінаў з'яўляецца апора на ўласнабеларускія моўныя сродкі. Усведамляючы той факт, што ў ідэале паміж сістэмай паняццяў і сістэмай тэрмінаў павінна існаваць узаемна адназначная адпаведнасць, аўтары энцыклапедыі імкнуліся да таго, каб кожны тэрмін пазначаў адно паняцце. Ад патрабавання ж "адно паняцце — адзін тэрмін" у асобных выпадках давялося адысці і некаторыя паняцці пазначыць больш чым адным адпаведнікам. На дадзеным этапе стваральнікі энцыклапедыі аддаюць перавагу тэрміну, які стаіць на першым месцы. Ён набраны тоўстым шрыфтам і менавіта да яго напісаны артыкул энцыклапедыі. Ёсць падставы меркаваць, што ў перспектыве некаторыя сінонімы могуць быць выведзеныя з ужытку, аднак мы яшчэ пакідаем іх з прычыны звыкласці (напрыклад, *прамая лінія*, *рашэнне* і інш.).

Зразумела, наша пазіцыя ў дачыненні да тэрміналогіі можа быць скарэктаваная надалей жывой практыкай скарыстання роднага слова ў матэматычнай навуцы, яе дастасаваннях і выкладанні матэматычных дысцыплін.

Паводле сваёй структуры матэрыял кнігі размеркаваны наступным чынам: асноўную частку складаюць энцыклапедычныя артыкулы (блізу 2500); акрамя таго, змешчаны біяграфічныя даведкі пра 250 замежных і беларускіх матэматыкаў, а таксама дадатак — беларуска-ангельскі і расійска-беларускі слоўнікі матэматычных тэрмінаў і тэрміналагічных словазлучэнняў.

Матэрыял кожнага раздзела падаецца ў алфавітным парадку. Дзеля зручнейшага карыстання энцыклапедычнымі артыкуламі ўжываецца розны шрыфт: словы, набраныя ў р а з р а д к у, дапаўняюць тэрмін або з'яўляюцца яго сінонімамі; *курсіў* выкарыстоўваецца для таго, каб паказаць, што энцыклапедыя змяшчае артыкул пад такім назовам (які ўтрымлівае, як правіла, дадатковыя ці падрабязнейшыя звесткі пра адпаведнае паняцце). У тэкстах артыкулаў ужываюцца абрэвіятуры — пачатковыя літары словаў, якія ўваходзяць у іх назоў.

Пры адборы персаналіяў замежных навукоўцаў рэдкалегія мела на мэце ўлучыць у гэты спіс найбольш слынных матэматыкаў. Пададзена інфармацыя пра ўсіх беларускіх навукоўцаў-матэматыкаў, хто мае на 1 ліпеня 2001 года ступень доктара фізіка-матэматычных навук або доктара педагагічных навук (па спецыяльнасці методыка выкладання матэматыкі).

Выданне разлічанае на навукоўцаў, выкладчыкаў усіх тыпаў навучальных установаў, аспірантаў, студэнтаў і школьнікаў.

АБАГУЛЬНЕНАЯ ВЫТВОРНАЯ — пашырэнне паняцця *вытворнай* на недыферэнцавальныя функцыі. Азначэнне належыць С.Собалеву. Няхай $f(x)$, $g(x)$ — лакальна інтэгравальныя функцыі на адкрытым мностве $\Omega \subset \mathbf{R}$, г.зн. інтэгравальныя на кожным замкнёным абмежаваным падмностве $F \subset \Omega$. Функцыя g называецца абагульненай частковай вытворнай ад f па x_j на Ω (пішуць $g = \frac{\partial f}{\partial x_j}$), калі для кожнай бясконца дыферэнцавальнай функцыі y, фінітнай у Ω, праўдзіцца роўнасць

$$\int_\Omega f(x)\frac{\partial y}{\partial x_j}dx = -\int_\Omega g(x)y(x)dx.$$

З гледзішча тэорыі абагульненых функцый А.в. азначаецца наступным чынам. Няхай зададзена функцыя $f(x)$, лакальна інтэгравальная на Ω, якую будзем разглядаць як *абагульненую функцыю*, і няхай $\frac{\partial f}{\partial x_j} = g$ — частковая вытворная ў сэнсе тэорыі абагульненых функцый. Калі g — інтэгравальная функцыя на Ω, то g называецца А.в. функцыі f.

АБАГУЛЬНЕНАЯ СУМА ШЭРАГУ — сума збежнага шэрагу, які атрымліваецца з дадзенага разбежнага шэрагу з дапамогай пераўтварэння складніка a_n у складнік $a_n \cdot \lambda_n$ ці спецыяльным спосабам *сумавання*.

АБАГУЛЬНЕНАЯ ФУНКЦЫЯ — матэматычнае паняцце, якое абагульняе паняцце *функцыі*. Уведзенае ў матэматычны ўжытак у канцы 1920-х гг. П.Дыракам у працах па квантавай механіцы (гл. *Дэльта-функцыя*). Асновы матэматычнай тэорыі А.ф. заклаў С.Собалеў у 1936 г. пры развязанні задачы Кашы для гіпербалічных раўнанняў, а ў 1950 г. Л.Шварц даў сістэматычны выклад тэорыі А.ф., або тэорыі размеркаванняў, і паказаў многія яе дастасаванні. Далей тэорыю А.ф. развівалі шмат якія матэматыкі і фізікі-тэарэтыкі, пераважна ў сувязі з патрабаваннямі тэарэтычнай і матэматычнай фізікі і тэорыі дыферэнцыяльных раўнанняў. У сучасны момант тэорыя А.ф. — гэта сукупнасць метадаў, якія дазваляюць разглядаць і вылічаць разбежныя інтэгралы, сумаваць іх, дыферэнцаваць функцыі, надаваць сэнс пераўтварэнням Фур'е нарастальных функцый і выконваць іншыя аперацыі, немагчымыя ў класічным аналізе.

Зыходны пункт гэтай тэорыі — тое, што функцыя разглядаецца не як адлюстраванне пунктавых мностваў, а як *лінейны функцыянал* на гладкіх функцыях. Гэта прыводзіць да страты паняцця значэння функцыі ў пунктах, а таксама магчымасці множання размеркаванняў, аднак дазваляе здзяйсняць дыферэнцаванне неабмежаваную колькасць разоў. На аналагічнай ідэі заснаваныя больш агульныя тэорыі ультраразмеркаванняў і А.ф. бясконцага парадку. У сувязі з немагчымасцю множання размеркаванняў і ультраразмеркаванняў і неабходнасцю такога множання для квантавай тэорыі поля на пачатку 80-х гг. узнік тэрмін "новая абагульненая функцыя". Элементамі алгебраў такіх функцый з'яўляюцца класы эквівалентных паслядоўнасцяў гладкіх функцый. Такі погляд на А.ф. уяўляецца найбольш плённым і дае надзею на скарыстанне А.ф. у нелінейных задачах матэматыкі, тэарэтычнай і матэматычнай фізікі.

АБАГУЛЬНЕНЫЯ ХАРАКТАРЫСТЫЧНЫЯ ЛІКІ — лікі, уведзеныя Ю.Багданавым (1964) як абагульненне паказнікаў Ляпунова для даследавання ўстойлівасці развязкаў нелінейных сістэм звычайных дыферэнцыяльных раўнанняў. Няхай E — абсяг у $\mathbf{R}^n$, які змяшчае пачатак каардынат O, $E_0 = E \setminus \{0\}$, ∂E — мяжа E. Зададзім пару функцый v і d, якія маюць наступныя ўласцівасці. Функцыя v непарыўная на E, дадатная на E_0, $v(0) = 0$ і $v(\alpha_m) \to \infty$ па адвольнай паслядоўнасці $\alpha_m \to \partial E$ пры $m \to \infty$. Функцыя d зададзена на $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$ і для ўсіх $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, $0 < \gamma$, $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \gamma_3$ праўдзяцца стасункі

$$\nu\{d(\gamma,\gamma_1)\} = \mathbf{R},\ d(\gamma,\gamma) = 0,$$

$$0 < d(\gamma_2,\gamma_1) = -d(\gamma_1,\gamma_2),$$

$$d(\gamma_2,\gamma) > d(\gamma_1,\gamma),$$

$$d(\gamma_3,\gamma_2) + d(\gamma_2,\gamma_1) \geq d(\gamma_3,\gamma_1).$$

Функцыі x: $\mathbf{R} \to E_0$ (x зададзена на ўсім $\mathbf{R}$ і $x \to \infty$ пры $t \to -\infty$, $x \to \partial E$ пры $t \to +\infty$) ставяцца ў адпаведнасць А.х.л.: vd-лік Ω і малы vd-лік ω. З дапамогай функцый v і d азначаюцца і іншыя тыпы А.х.л. Метад А.х.л. пры выяўленні *ўстойлівасці*, асімптатычнай устойлівасці развязкаў нелінейных сістэм такі ж універсальны, як і другі метад Ляпунова.

АБ'ЕКТ КАТЭГОРЫІ — сукупнасць аднатыпных матэматычных структур. Паміж А.к. задаюцца дачыненні — *марфізмы*. Пры гэтым павінны праўдзіцца пэўныя аксіёмы. Напрыклад, А.к. мностваў — мноствы; марфізмы — адвольныя адлюстраванні $f: A \to B$; А.к. тапалагічных прастораў — тапалагічныя прасторы, марфізмы — непарыўныя адлюстраванні $f: X \to Y$; А.к. групаў — групы, марфізмы — гомамарфізмы групаў і г.д.

АБ'ЁМ — велічыня часткі прасторы, якую займае геаметрычнае цела. Вымяраецца колькасцю змешчаных у целе кубаў з кантам, роўным адзінцы даўжыні. Пры вымярэнні А. разглядаюцца ўсялякія мнагагранікі, умежаныя ў цела K або акрэсленыя вакол яго. Няхай $\{V_i\}$ — значэнні А. умежаных у цела мнагаграннікаў, $\{V_a\}$ — значэнні А. акрэсленых вакол цела мнагаграннікаў. Мноства $\{V_i\}$ абмежаванае зверху (А. усякага акрэсленага мнагагранніка), а мноства $\{V_a\}$ абмежаванае знізу (напрыклад, лікам нуль). Найменшы з лікаў, які абмяжоўвае зверху мноства $\{V_i\}$, называецца н і ж н і м а б'ё м а м $\underline{V}$ цела K, а найбольшы з лікаў, які абмяжоўвае знізу мноства $\{V_a\}$, называецца в е р х н і м а б'ё м а м $\overline{V}$ цела K. Калі верхні $\overline{V}$ і ніжні $\underline{V}$ аб'ёмы супадаюць, то лік $V = \overline{V} = \underline{V}$ называецца А. цела K. Калі аб'ём існуе, то K называецца *кубавальным целам*. Аналітычна А. можна выразіць з дапамогай кратных інтэгралаў. Задача вылічэння А. целаў, што вынікала з патрэбаў практыкі, са старажытных часоў стымулявала развіццё матэматыкі.

АБМЕЖАВАНАЕ МНОСТВА — 1) А. м. у м е т р ы ч н а й п р а с т о р ы — мноства, якое змяшчаецца цалкам у нейкім шары. Мноства X рэчаісных лікаў называецца а б м е ж а в а н ы м з в е р х у (з н і з у), калі існуе такі лік $a \in \mathbf{R}$, што для кожнага элемента $x \in X$ праўдзіцца няроўнасць $x \le a$ ($a \le x$). Мноства $X \subset \mathbf{R}$, абмежаванае зверху і знізу, называецца А.м.; 2) А.м. у т а п а л а г і ч н а й в е к т а р н а й п р а с т о р ы н а д п о л е м K — мноства A, якое паглынаецца кожным наваколлем нуля U, г.зн. існуе такое $n \in K$, што $A \subset nU$.

АБМЕЖАВАНАЙ ВАРЫЯЦЫІ ФУНКЦЫЯ — функцыя, якая мае абмежаваную варыяцыю (гл. *Варыяцыя функцыі*). Для функцыі адной рэчаіснай зменнай А.в.ф. увёў К.Жардан (1881). Праўдзіцца т э а р э м а Ж а р д а н а: функцыя $f(x)$, зададзеная на адрэзку $[a,b]$, ёсць А.в.ф., калі і толькі калі яе можна падаць у выглядзе $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, дзе $f_1(x)$, $f_2(x)$ — нарастальныя (спадальныя) на $[a,b]$ функцыі. Кожная А.в.ф. ёсць абмежаваная і можа мець не больш за злічальнае мноства пунктаў разрыву першага роду. А.в.ф. можна падаць у выглядзе сумы абсалютна непарыўнай функцыі, сінгулярнай функцыі і скачкоў функцыі. У выпадку некалькіх зменных паняцце А.в.ф. не з'яўляецца адназначным, бо існуюць розныя азначэнні варыяцыі функцыі.

АБМЕЖАВАНАЯ ЛІКАВАЯ ПАСЛЯДОЎНАСЦЬ — паслядоўнасць, элементы якой утвараюць *абмежаванае мноства*. Паслядоўнасць рэчаісных лікаў абмежаваная зверху (знізу), калі элементы ўтвараюць абмежаванае зверху (знізу) мноства.

АБМЕЖАВАНАЯ ФУНКЦЫЯ — функцыя, мноства значэнняў якой абмежаванае. Прыклады: $\sin x$, $\cos x$, $1/(1+x^2)$. Функцыя $f(x)$ абмежаваная, калі існуюць такія лікі A і B, што $A \le f(x) \le B$, калі $f(x) \le B$, то ф у н к ц ы я а б м е ж а в а н а я з в е р х у, калі $A \le f(x)$, то ф у н к ц ы я а б м е ж а в а н а я з н і з у. Напрыклад, функцыя x^2 абмежаваная на адрэзку $0 \le x \le 1$; $1/x$ — на промні $x \ge 1$. Калі функцыя абмежаваная, то існуе такі лік M, што $|f(x)| \le M$.

АБМЕЖАВАНЫ АПЕРАТАР — аператар A з X у Y, які адлюстроўвае ўсякае абмежаванае мноства тапалагічнай вектарнай прасторы X у абмежаванае мноства тапалагічнай вектарнай прасторы Y. Кожны непарыўны аператар абмежаваны. Калі X і Y — унармаваныя прасторы і A — лінейны аператар, то яго абмежаванасць гарантуецца існаваннем канстанты C такой, што $\|Ax\|_Y \le C\|x\|_X$ для ўсіх $x \in X$. Найменшая з такіх канстантаў называецца н о р м а й A. Для такіх аператараў непарыўнасць раўназначная абмежаванасці.

АБСАЛЮТНА НЕПАРЫЎНАЕ РАЗМЕРКАВАННЕ — размеркаванне выпадковай велічыні ξ: $P_\xi = P_\xi(B)$, дзе B — барэлева мноства, якое можа быць пададзенае ў выглядзе

$$P_\xi(B) = \int_B p_\xi(x)dx.$$

Функцыя $p_\xi(B)$ называецца ш ч ы л ь н а с ц ю р а з м е р к а в а н н я выпадковай велічыні ξ. Функцыя размеркавання такой выпадковай велічыні ξ можа быць пададзена ў выглядзе

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} p_\xi(y)dy.$$

Калі існуе $\dfrac{dF_\xi(x)}{dx}$, то $p_\xi(x) = \dfrac{dF_\xi(x)}{dx}$.

АБСАЛЮ́ТНА СВАБО́ДНАЯ А́ЛГЕБРА — свабодная *універсальная алгебра* ў мнагастайнасці ўсіх алгебраў дадзенай сігнатуры.

АБСАЛЮ́ТНАЕ ЗНАЧЭ́ННЕ — абгульненне паняцця *абсалютнай велічыні* ліку на выпадак адвольнага поля (гл. *Нармаванне*).

АБСАЛЮ́ТНАЯ ВЕЛІ́ЧЫНЯ́, модуль рэчаіснага ліку a — неадмоўны лік (абазначаецца $|a|$), які пры $a \le 0$ роўны a, пры $a < 0$ роўны $-a$. Напрыклад, $|+5| = 5$, $|-2| = -(-2) = 2$, $|0| = 0$. А.в. камплекснага ліку $x + iy$ ёсць лік $\sqrt{x^2 + y^2}$. Гл. *Модуль*.

АБСАЛЮ́ТНАЯ ГЕАМЕ́ТРЫЯ — сістэма высноў з аксіём эўклідавай геаметрыі, з выняткам аксіёмы пра паралельныя (V пастулат); агульная частка *эўклідавай геаметрыі* і *Лабачэўскага геаметрыі*. Тэрмін увёў венгерскі матэматык Я.Больяі (1832).

АБСАЛЮ́ТНАЯ ЗБЕ́ЖНАСЦЬ — 1) лікавы шэраг $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называецца абсалютна збежным, калі збягаецца шэраг $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Калі шэраг збягаецца абсалютна, то ён збягаецца. Гэтая ўласцівасць дае магчымасць даследаваць на збежнасць адвольныя шэрагі з дапамогай прыкметы збежнасці дадатных шэрагаў; 2) неўласцівы інтэграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ называецца абсалютна збежным, калі збягаецца інтэграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$. Калі інтэграл збягаецца абсалютна, то ён збягаецца.

АБСАЛЮ́ТНАЯ НЕПАРЫ́ЎНАСЦЬ — 1) А.н. інтэграла, уласцівасць інтэграла Лебэга: для кожнага $\varepsilon > 0$ існуе лік $\delta > 0$ такі, што для ўсіх мностваў A, мера якіх меншая за δ, праўдзіцца ацэнка $\left|\int_A f(x)d\mu\right| < \varepsilon$; 2) А.н. функцыі — узмацненне паняцця *непарыўнасці* функцыі. Функцыя f называецца абсалютна непарыўнай на адрэзку $[a, b]$, калі для ўсякага $\varepsilon > 0$ існуе такі $\delta > 0$, што для кожнага дыз'юнктавага мноства інтэрвалаў $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)$ з $[a, b]$ выконваецца

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) \le \delta\right) \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{n}|f(b_k) - f(a_k)| \le \varepsilon\right).$$

Пры $n = 1$ атрымліваецца азначэнне функцыі, раўнамерна непарыўнай на $[a, b]$. Клас А.н. функцый замкнёны ў дачыненні да сумы, рознасці, здабытку, дзелі і тоесны класу нявызначаных інтэгралаў ад функцый $\varphi(t) \in L[a, b]$.

АБСАЛЮ́ТНАЯ ХІ́БНАСЦЬ — модуль рознасці $|x - a|$, дзе a — лік, які прымаецца за наблі-жанае значэнне нейкай велічыні, дакладнае значэнне якой роўнае x. Пры лікавым развязанні задачы А.х. выніку залежыць ад недакладнасцяў у фармулёўцы задачы, спосабе яе развязання, ад замены ірацыянальных лікаў рацыянальнымі. У адпаведнасці з гэтым А.х. складаецца з хібнасці мадэлі, хібнасці спосабу развязання і хібнасці акруглення лікавых параметраў.

АБСАЛЮ́ТНЫ МА́КСІМУМ, глабальны максімум — найбольшае значэнне, якое мае функцыя на ўсім мностве, дзе яе даследуюць.

АБСАЛЮ́ТНЫ МІ́НІМУМ, глабальны мінімум — найменшае значэнне, якое мае функцыя на ўсім мностве, дзе яе даследуюць.

АБСАЛЮ́ТНЫ МО́МАНТ — лікавая характарыстыка выпадковай велічыні. Калі $F(x)$ — функцыя размеркавання выпадковай велічыні ξ, то велічыня $\beta_k = E|\xi|^k = \int |x|^k dF(x)$ называецца абсалютным момантам выпадковай велічыні ξ парадку k. Калі $F'(x) = P(x)$, то $\beta_k = \int |x|^k P(x)dx$. З існавання β_k вынікае існаванне β_l, калі $l < k$.

АБСТРА́КТНАЯ А́ЛГЕБРА — частка алгебры; тое, што *агульная алгебра*.

АБСТРА́КТНАЯ МАШЫ́НА — абстрактнае матэматычнае паняцце; тое, што *аўтамат*. Тэрмін "машына" часцей за ўсё ўжываюць тады, калі размова ідзе пра бясконцыя аўтаматы, а ў выпадку канцага аўтамата карыстаюцца тэрмінам "аўтамат".

АБСТРА́КЦЫЯ АКТУА́ЛЬНАЙ БЯСКО́НЦАСЦІ — адна з асноўных ідэалізацый тэарэтычна-мноствавай матэматыкі і класічнай матэматычнай логікі. А.а.б. дазваляе разглядаць бясконцыя мноствы як адзіны аб'ект актуальна бясконцага мноства (напрыклад, мноства ўсіх натуральных лікаў, кантынуум пунктаў адрэзка). Дае магчымасць прымаць незавершаны працэс за завершаны і апераваць з бясконцымі мноствамі, дастасоўваць да іх законы матэматычнай логікі.

АБСЯГ, вобласць — непустое злучнае адкрытае мноства D пунктаў тапалагічнай прасторы X. Замыканне $\overline{D}$ абсягу D называецца замкнёным А., а замкнёнае мноства $\partial D = \overline{D} \setminus D$ — мяжой А. D, пункты $x \in \partial D$ — межавымі пунктамі А. D; пункты дапаўнення $X \setminus \overline{D}$ — вонкавымі пунктамі для А. D. Абсяг D прасторы $\mathbf{R}^n$ або $\mathbf{C}^n$ называецца абмежаваным, калі $\sup \{|x| : x \in D\} < +\infty$. У процілеглым выпадку А. D неабмежаваны. Кожны А. на лікавай простай $\mathbf{R}$ — гэта абмежаваны (або бясконцы) інтэрвал на гэтай простай. Яго мяжа складаецца не болей як з двух пунктаў. Кожная плоская замкнёная жарданава крывая L дзеліць плоскасць ($\mathbf{R}^2$ ці $\mathbf{C}$) на два А.: абмежаваны D^+ і неабмежаваны D^- і з'яўляецца іх агульнай мяжой (тэарэма Жардана).

АБСЯГ ВЫЗНАЧЭННЯ функцыі — мноства, на якім зададзена функцыя; сукупнасць X усіх тых элементаў x, кожнаму з якіх функцыя f ставіць у адпаведнасць элемент y з нейкага мноства Y: калі $f: X \to Y$, то X называецца А.в. функцыі.

АБСЯГ ЗБЕЖНАСЦІ — мноства значэнняў аргумента z, для якіх функцыйны шэраг $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ збягаецца. Напрыклад, А.з. шэрагаў па *Лежандра мнагаскладах* ёсць нутро эліпса з фокусамі (−1; 0), (0; 1). Простую форму А.з. маюць ступеневыя шэрагі. Для рэчаісных значэнняў $z = x$ А.з. ёсць пункт або інтэрвал (*інтэрвал збежнасці*), або ўся лікавая вось; для камплексных значэнняў z А.з. ёсць пункт ці адкрыты круг (*круг збежнасці*), ці ўся камплексная плоскасць. А.з. азначаецца і для іншых лімітавых працэсаў. У прыватнасці, для неўласцівага інтэграла, залежнага ад параметра, А.з. ёсць мноства значэнняў гэтага параметра, пры якіх інтэграл збягаецца.

АБСЯГ ЗНАЧЭННЯЎ функцыі — мноства ўсіх элементаў, якія зададзенай функцыяй пастаўлены ў адпаведнасць элементам з яе абсягу вызначэння: калі $f: X \to Y$, то мноствам значэнняў функцыі f называецца мноства ўсіх элементаў $y \in Y$, для кожнага з якіх існуе такі элемент $x \in X$, што $f(x) = y$. А.з. функцыі — гэта вобраз яе абсягу вызначэння.

АБСЯГ ЦЭЛАСНАСЦІ — цэласнае камутатыўнае *кольца* з адзінкай і без дзельнікаў нуля. Кожнае падкольца з адзінкай адвольнага поля ёсць А.ц. Наадварот, кожны А.ц. можа быць укладзены ў нейкае поле. Такі ўклад дае канструкцыя поля дробаў. Калі A — А.ц., то кольца паліномаў $A[x]$ і кольца фармальных ступеневых шэрагаў $A[[x]]$ над A — таксама А.ц. Часам у азначэнні А.ц. не патрабуюць камутатыўнасці кольца A. Прыклады некамутатыўных А.ц.: целы, а таксама падкольцы целаў, якія маюць адзінку. Значыць, не кожны некамутатыўны А.ц. можа быць укладзены ў якое-небудзь цела.

АБЦЫСА (ад лац. abscissa — адрэзаная, адарваная) — адна з дэкартавых каардынат пункта (звычайна першая), якая абазначаецца літарай x. Гл. *Дэкартава сістэма каардынат*.

АБЫМАЛЬНЫХ МІНОРАЎ МЕТАД — тое, што *абымання метад*.

АБЫМАННЯ МЕТАД, абымальных мінораў метад — метад развязання *лінейных алгебраічных раўнанняў сістэмы $Ax = B$*, а таксама знаходжання адваротнай матрыцы і вылічэння вызначніка. Грунтуецца на рэкурэнтным пераходзе ад матрыцы

$$A_{k-1} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k-1,1} & \dots & a_{k-1,k-1} \end{bmatrix}$$

да матрыцы

$$A_k = \begin{bmatrix} A_{k-1} & u_k \\ v_k & a_{k,k} \end{bmatrix},$$

якая разглядаецца як вынік абымання матрыцы A_{k-1}, у ёй $u_k = (a_{1,k}, a_{2,k}, \dots, a_{k-1,k})^T$, $v_k = (a_{k,1}, a_{k,2}, \dots, a_{k,k-1})^T$. У А.м. знаходжанне адваротнай матрыцы для $A = [a_{ij}]$, $i, j = \overline{1, n}$, здзяйсняецца як паслядоўнае абарачэнне матрыц $A_1, A_2, \dots, A_n$ па схеме

$$A_k^{-1} = \begin{bmatrix} A_{k-1}^{-1} + \dfrac{A_{k-1}^{-1} u_k v_k A_{k-1}^{-1}}{\alpha_k} & \dfrac{-A_{k-1}^{-1} u_k}{\alpha_k} \\ \dfrac{-v_k A_{k-1}^{-1}}{\alpha_k} & \dfrac{1}{\alpha_k} \end{bmatrix},$$

$\alpha_k = a_{k,k} - v_k A_{k-1}^{-1} u_k$. Пры гэтым $A^{-1} = A_n^{-1}$.

АБЭЛЕВА ГРУПА, камутатыўная група — група, аперацыя ў якой адпавядае ўмове *камутатыўнасці*. Названая ў гонар Н.Абэля, які паказаў развязальнасць у радыкалах тых алгебраічных раўнанняў, група якіх камутатыўная. Звычайна для пазначэння аперацыі ў А.г. карыстаюцца адытыўным запісам: знакам + для самой аперацыі, якая называецца складаннем, і знакам 0 для

нейтральнага элемента, які называецца нулём. Прыкладамі (бясконцых) А.г. служаць многія лікавыя сістэмы: камплексныя, рэчаісныя, рацыянальныя, цэлыя, цотныя лікі з аперацыяй складання, а таксама мноства няроўных нулю камплексных, рэчаісных або рацыянальных лікаў з аперацыяй множання лікаў. Кожная падгрупа і кожная фактар-група А.г., а таксама простая сума А.г. — абэлевы, усе цыклічныя групы — абэлевы.

АБЭЛЕВА МНАГАСТАЙНАСЦЬ — камутатыўная алгебраічная група, якая з'яўляецца адначасова праектыўнай непрыводнай алгебраічнай мнагастайнасцю, прычым групавая аперацыя і вылучэнне адваротнага элемента — рэгулярныя адлюстраванні алгебраічных мнагастайнасцяў. Пад марфізмамі А.м. разумеюць рэгулярныя адлюстраванні А.м. як алгебраічных мнагастайнасцяў, якія з'яўляюцца гомамарфізмамі іх групавых структур. Адзін з найбольш простых прыкладаў А.м. — эліптычная крывая. Тэорыя А.м. над полем **C**, па сутнасці, эквівалентная тэорыі абэлевых функцый, асновы якой былі закладзеныя ў працах Н.Абэля, К.Якобі і Б.Рымана. Тэорыю А.м. над адвольным полем распрацаваў А.Вэйль у 1940-х гг. Яна мае шмат дастасаванняў у алгебраічнай геаметрыі, тэорыі лікаў і іншых галінах.

АБЭЛЕЎ ІНТЭГРАЛ — крывалінейны інтэграл выгляду $\int_L R(z,w)dz$, дзе $R(z,w)$ — рацыянальная функцыя камплексных зменных z і w, звязаных непрыводным алгебраічным раўнаннем $f(z,w) = 0$. Падынтэгральны выраз А.і., які аналітычна залежыць ад z на L, называецца абэлевым дыферэнцыялам. Першаісная функцыя абэлевага дыферэнцыяла ў агульным выпадку не з'яўляецца элементарнай функцыяй. У прыватным выпадку, калі $f(z,w) \equiv w-z$, А.і. ёсць інтэграл ад рацыянальнай функцыі зменнай z, а першаісная ёсць элементарная функцыя. Часты выпадак, калі $f(z,w) \equiv w^2 - P_n(z)$, дзе P_n — паліном ступені n без кратных каранёў. У такім разе першаісная заўсёды будзе элементарнай толькі пры $n=1$ і $n=2$, пры $n=3$ і $n=4$ маем эліптычны інтэграл, пры $n = 5$ і $n = 6$ — ультраэліптычны, пры $n > 6$ — гіперэліптычны.

АБЭЛЯ НЯРОЎНАСЦЬ — няроўнасць выгляду

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \le (|a_1| + 2|a_n|)\cdot B,$$

дзе $B = \max_k \left|\sum_{\nu=1}^{k} b_\nu\right|$. А.н. дакладная, калі паслядоўнасць $a_1, \ldots, a_n$ манатонная. Пры дадатковым дапушчэнні $a_1 > \ldots > a_n > 0$ А.н. спрашчаецца да выгляду

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \le a_1 \cdot B.$$

АБЭЛЯ ПЕРАЎТВАРЭННЕ, падсумоўванне часткамі — пераўтварэнне выгляду

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_n B_n + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1})\cdot B_k,$$

дзе $B_k = \sum_{\nu=1}^{k} b_\nu$.

АБЭЛЯ ПРЫКМЕТА — 1) А.п. збежнасці лікавых шэрагаў: калі шэраг $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збягаецца, а паслядоўнасць $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ манатонная і абмежаваная, то шэраг $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ збягаецца; 2) А.п. збежнасці неўласцівых інтэгралаў: калі інтэграл $\int_{\alpha}^{+\infty} b(x)dx$ збягаецца, а функцыя $a(x)$ манатонная і абмежаваная, тады інтэграл $\int_{\alpha}^{+\infty} a(x)b(x)dx$ збягаецца; 3) А.п. раўнамернай збежнасці функцыйных шэрагаў: калі шэраг $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ збягаецца раўнамерна на мностве X, а паслядоўнасць $(a_n(x))_{n=1}^{\infty}$ манатонная пры кожным $x \in X$ і раўнамерна абмежаваная на X, то шэраг $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ збягаецца раўнамерна на мностве X; 4) А.п. раўнамернай збежнасці неўласцівых інтэгралаў, якія залежаць ад параметра: калі інтэграл $\int_{\alpha}^{+\infty} b(t,x)dt$ збягаецца раўнамерна на мностве X, а функцыя $a(t,x)$ манатонная па t пры кожным $x \in X$ і раўнамерна абмежаваная, тады інтэграл $\int_{a}^{+\infty} a(t,x)\, b(t,x)\, dt$ збягаецца раўнамерна на мностве X.

АБЭЛЯ ТЭАРЭМА — 1) А.т. у тэорыі алгебраічных раўнанняў: пры $n \ge 5$ не

існуе агульнай формулы, якая б выражала карані кожнага алгебраічнага раўнання ступені n праз яго каэфіцыенты з дапамогай радыкалаў; 2) А.т. у тэорыі ступеневых шэрагаў: а) калі ступеневы шэраг $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ збягаецца пры $x = x_1$, то ён збягаецца, прытым абсалютна, $\forall x \in (-|x_1|, |x_1|)$; калі ступеневы шэраг $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ разбягаецца пры $x = x_2$, то ён разбягаецца для ўсіх $|x|>|x_2|$; б) калі ступеневы шэраг $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ збягаецца пры $x = x_0 > 0$, то ён збягаецца раўнамерна на $[0, x_0]$, а яго сума непарыўная злева ў пункце x_0; 3) А.т. у тэорыі функцый на замкнёнай рымանавай паверхні M роду $h \geq 1$: наступныя сцверджанні раўназначныя: а) існуе мераморфная на M функцыя, нулі і полюсы якой складаюць дывізар $\frac{P_1...P_n}{Q_1...Q_n}$; б) праўдзяцца параўнанні

$$\sum_{\nu=1}^{n} w_\mu(P_\nu) \equiv \sum_{\nu=1}^{n} w_\mu(Q_\nu),\ \mu = 1, ..., h,$$

дзе $w_1, ..., w_h$ — базіс абэлевых інтэгралаў першага роду на M, а параўнанні бяруцца па модулю перыядаў гэтых інтэгралаў.

АБ'ЯДНÁННЕ мностваў — адна з асноўных аперацый з мноствамі. Няхай існуе нейкая сукупнасць мностваў A_α. Тады мноства ўсіх тых элементаў, якія належаць хоць бы аднаму з мностваў, што ствараюць дадзеную сукупнасць, называецца А. мностваў A_α, абазначаецца праз $\bigcup_\alpha A_\alpha$, часам $\sum_\alpha A_\alpha$.

АВÁЛ (франц. ovale, ад лац. ovum — яйцо) — замкнёная выпуклая плоская крывая. Найпрасцейшыя А. — *акружына* і *эліпс*. У алгебраічнай геаметрыі А. называюць таксама проста замкнёныя (не абавязкова выпуклыя) галіны алгебраічных крывых, што не маюць пунктаў самаперасячэння.

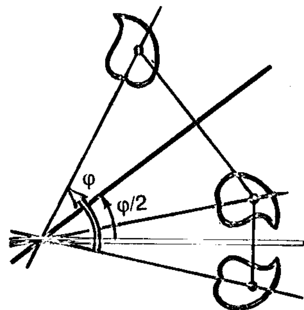
АВАРÓТ — прыватны выпадак руху, пры якім хоць бы адзін пункт прасторы застаецца нерухомым. Пры А. плоскасці нерухомы пункт называецца цэнтрам А., пры А. прасторы нерухомая простая — воссю А. Аварот эўклідавай прасторы называецца ўласным (1-га роду) або няўласным (2-га роду) у залежнасці ад таго, захоўвае ён ці не арыентацыю прасторы. Уласны А. на плоскасці з цэнтрам у пачатку каардынат выражаецца ў дэкартавых прамавугольных каардынатах (x, y) пры дапамозе формул

$$x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi,\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi;$$

няўласны А. адпаведна:

$$x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi,\ y' = x\sin\varphi - y\cos\varphi,$$

дзе φ — вугал А. Уласны А. на вугал φ можна падаць як здабытак дзвюх восевых сіметрый з восямі, якія перасякаюцца пад вуглом $\varphi/2$ (рыс.). Няўласны А. на плоскасці можна падаць як здабытак уласнага А. і восевай сіметрыі.



АВАРÓТАЎ МÉТАД — метад паслядоўнага пераўтварэння зыходнай матрыцы да прасцейшага выгляду шляхам множання яе з аднаго або двух бакоў на матрыцы плоскага вавароту. А.м. выкарыстоўваецца пры развязанні поўнай праблемы ўласных значэнняў *эрмітавай матрыцы*, развязанні *лінейных алгебраічных раўнанняў сістэм* і інш. А.м. складаецца з будавання паслядоўнасці матрыц $A_0, A_1, ...$, дзе $A_0 = A$ — зыходная матрыца, $A_k = V_k^* A_{k-1} V_k$, V_k — матрыца плоскага авароту, якая пераўтварае ў нуль максімальны па модулі пазадыяганальны элемент матрыцы A_{k-1}. А.м. эфектыўна рэалізуецца на кампутары.

АВАРÓТУ ПАВÉРХНЯ — паверхня, утвораная пры вавароце плоскай лініі вакол фіксаванай простай (восі паверхні авароту), размешчанай у плоскасці гэтай лініі. Прыклады А.п.: *сфера* (утвораная аваротам акружыны вакол яе дыяметра), *прамы кругавы конус, цыліндр*. Калі ўздоўж восі А.п. накіравана вось Oz прамавугольнай сістэмы каардынат $Oxyz$, то раўнанне А.п. мае выгляд

$$F(x_2 + y_2, z) = 0.$$

Раўнанне паверхні другога парадку, якая ёсць А.п., запісваецца ў выглядзе

$$A(x^2 + y^2) + az^2 + 2bz + c = 0.$$

Раўнанне $z = x^2 + y^2$ вызначае А.п., якая з'яўляецца **параболоідам авароту** і атрымліваецца аваротам вакол восі Oz роўнабаковай парабалы $z = x^2$, $y = 0$. А.п., вызначаныя раўнаннямі $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ і $x^2 + y^2 - z^2 = -1$, называюцца адпаведна **аднапаласцевым** і **двухпаласцевым гіпербалоідамі авароту** і атрымліваюцца пры авароце вакол восі Oz роўнабаковай гіпербалы, размешчанай у плоскасці $y = 0$, для якой вось Ox ёсць уяўная і рэчаісная вось адпаведна. **Эліпсоід авароту** атрымліваецца пры авароце эліпса $x^2/a^2 + z^2/c^2 = 1$, $y = 0$, размешчанага ў плоскасці xOz, вакол яго восі.

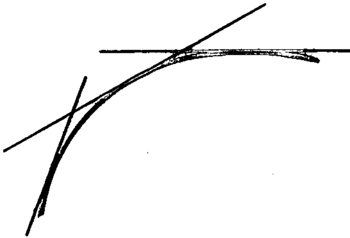
АГІНА́ЛЬНАЯ сям'і ліній — мноства ўсіх пунктаў, якія праўдзяць сістэму раўнанняў

$$F(x, y, c) = 0,\ F'_c(x, y, c) = 0$$

і ў якіх

$$F'^2_x(x, y, c) + F'^2_y(x, y, c) \neq 0.$$

Тут $F(x, y, c)$ — раўнанне **аднапараметрычнай сям'і ліній**. Прыкладам А. служыць кожная крывая ў дачыненні да мноства сваіх датычных (гл. рыс.). Асноўная ўласцівасць А.: у кожным сваім пункце яна датыкаецца да адной



і толькі адной лініі дадзенай сям'і, кожная лінія сям'і мае адзіны пункт, дзе яна датыкаецца да А. Аналагічна азначаецца А. аднапараметрычнай сям'і паверхняў $\Phi(x, y, z, c) = 0$. Паняцце А. уведзенае Г.Монжам і выкарыстоўваецца ў геаметрыі, матэматычным аналізе, тэорыі дыферэнцыяльных раўнанняў і фізіцы.

АГУЛЬНАРЭКУРСІ́ЎНАЯ ФУ́НКЦЫЯ — усюды вызначаная *частковарэкурсіўная функцыя*.

АГУ́ЛЬНАСЦІ КВА́НТАР — логікавая аперацыя, якая служыць для ўтварэння новых выказванняў і выказвальных формаў з дадзеных пры дапамозе моўнага выразу "для кожнага x" ("для ўсіх x", "для адвольнага x", "для ўсякага x"). Абазначаецца $\forall x$ або $(\forall x)$. Гл. таксама *Квантар*.

АГУ́ЛЬНАЯ А́ЛГЕБРА, абстрактная алгебра — частка *алгебры*, у якой вывучаюцца тыя або іншыя алгебраічныя сістэмы (групы, кольцы, модулі, краты і інш.). Па-за А.а. застаюцца такія кірункі алгебры, як лінейныя раўнанні, алгебраічная геаметрыя, алгебраічная тэорыя лікаў і г.д. Часта межы А.а. размытыя, і бывае цяжка вызначыць, знаходзіцца дадзеная тэорыя ў А.а. ці не. Пачатак даследаванняў па А.а. зроблены ў 19 ст., калі ў матэматыку былі ўведзеныя паняцці групы і камутатыўнай алгебры. Сучасныя А.а. стваралiся пасля асэнсавання многіх паняццяў алгебры з гледзішча тэорыі мностваў. Так, выяўленне агульнага ў тэорыі групаў і колцаў прывяло да стварэння кратаў, універсальных алгебраў і катэгорый. З часам новыя раздзелы пачалі ўплываць на класічныя раздзелы А.а.

АГУ́ЛЬНАЯ ТАПАЛО́ГІЯ — галіна *геаметрыі*, у якой даследуюцца непарыўнасць і лімітавы пераход на ўзроўні значнай агульнасці, што азначана прыродай саміх паняццяў. Зыходныя паняцці А.т. — паняцці тапалагічнай прасторы і непарыўнага адлюстравання, адна з асноўных задач — вылучэнне і даследаванне натуральных тапалагічных інварыянтаў — уласцівасцяў прастораў, якія не змяняюцца пры гомеамарфізмах. Гэтыя інварыянты прыводзяць да класіфікацыі тапалагічных прастораў на метрызавальныя, кампактныя, ціханаўскія, паракампактныя прасторы. Асноўныя задачы А.т. — вывучэнне новых істотных класаў тапалагічных прастораў; параўнанне розных класаў тапалагічных прастораў; вывучэнне прастораў у межах таго або іншага класа. А.т. мае вялікае значэнне і ў метадычным сэнсе, бо толькі ў межах яе высокага ўзроўню абстракцыі становяцца больш зразумелымі фундаментальныя канцэпцыі непарыўнасці, збежнасці і лімітавага пераходу.

АГУ́ЛЬНЫ ІНТЭГРА́Л сістэмы $\frac{dx_i}{dt} = X_i(t, x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, n$, — сукупнасць стасункаў $\Phi_i(t, x_1, \ldots, x_n, c_1, \ldots, c_n) = 0$, $i = 1, \ldots, n$, якая дае магчымасць знайсці ўсе развязкі сістэмы. Для раўнання $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ А.і. выглядае як роўнасць $F(x, y, c_1, \ldots, c_n) = 0$, адкуль знаходзіцца агульны развязак гэтага раўнання. А.і. раўнання з частковымі вытворнымі замест адвольных канстантаў змяшчае адвольныя функцыі.

АГУ́ЛЬНЫ РАЗВЯ́ЗАК ДЫФЕРЭНЦЫЯ́ЛЬНАГА РАЎНА́ННЯ — для $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ ёсць функцыя $\varphi(x; c_1, \ldots, c_n)$ зменных $(c_1, \ldots, c_n) \in D$ і $x \in J(x; c_1, \ldots, c_n) \subset \mathbb{R}$, якая мае ўласцівасці: 1) калі зафіксаваць зменныя $(c_1, \ldots, c_n) \in D$, то функцыя $x \mapsto \varphi(x; c_1, \ldots, c_n)$ будзе развязкам гэтага раўнання; 2) мноства ўсіх функцый $x \mapsto \varphi(x; c_1, \ldots, c_n)$, $(c_1, \ldots, c_n) \in D$ адной зменнай x з'яўляецца мноствам усіх развязкаў раўнання. Агульны развязак маюць толькі тыя раўнанні, для якіх кожная задача Кашы мае толькі адзін развязак. Калі дыферэнцыяльнае раўнанне зададзена ў абсягу $(a, b) \times 0$, $x \in (a, b)$, $(y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \in D$, задавальняе ўмовы тэарэмы існавання і адзінасці развязку, а ўсе яго развязкі існуюць для кожнага $x \in (a, b)$, дык А.р.д.р. можна запісаць у форме Кашы $y = \varphi(x, x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$. Аналагічна азначаецца агульны развязак сістэмы дыферэнцыяльных раўнанняў.

А́ДА — *праграмавання мова*, прызначаная для распрацоўкі праграмнага забеспячэння ўбудаваных вылічальных сістэм (сістэм, у якіх кампутар непасрэдна звязаны з апаратурай — кіруе апаратурай або кантралюе яе). А. можа выкарыстоўвацца як універсальная мова праграмавання.

А́ДАМСА МЕ́ТАД — лікавы метад развязання задачы Кашы для дыферэнцыяльных раўнанняў першага парадку:

$$y' = f(x, y),\ x_0 \le x \le X,\ y(x_0) = y_0.$$

Метад дазваляе ў вузлах раўнамернай сеткі

$$\omega_k = \{x_k = x_0 + kh;\ k = 0, \ldots, N;$$
$$x_0 + Nh \le X < x_0 + (N+1)/h\}$$

вылічаць набліжаныя развязкі задачы Кашы па формулах

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}\Delta\eta_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2\eta_{n-2} + $$
$$+ \frac{3}{8}\Delta^3\eta_{n-3} + \ldots + a_k\Delta^k\eta_{n-k},$$

$$\eta_n = hf(x_n, y_n),\ a_k = \frac{1}{k!}\int_0^1 t(t+1)\ldots(t+k-1)dt$$

(экстрапаляцыйны метад) і формулах

$$y_{n+1} = y_n + \eta_{n+1} - \frac{1}{2}\Delta\eta_n - \frac{1}{12}\Delta^2\eta_{n-1} - $$
$$-\frac{1}{24}\Delta^3\eta_{n-2} + \ldots + b_{k+1}\Delta^{k+1}\eta_{n-k},$$

$$b_k \frac{1}{2}\int_{-1}^0 t(t+1)\ldots(t+k-1)dt$$

(інтэрпаляцыйны метад).

АДВАРО́ТНА ПРАПАРЦЫ́ЙНЫЯ ВЕЛІЧЫНІ — дзве велічыні, звязаныя паміж сабой так, што з павелічэннем (памяншэннем) адной велічыні ў некалькі разоў другая памяншаецца (павялічваецца) у столькі ж разоў. А.п.в. x і y звязаныя роўнасцю $xy = k$ ($x = k/y$ і $y = k/x$), дзе k — канстанта.

АДВАРО́ТНАЯ МА́ТРЫЦА для $n \times n$-матрыцы A — такая $n \times n$-матрыца B, што $AB = BA = E_n$, дзе E_n — адзінкавая матрыца. Абазначаецца A^{-1}. Для матрыцы $A = [a_{ij}]$ існуе А.м., калі і толькі калі A незвыродная (г.зн. вызначнік $|A| \ne 0$); у гэтым выпадку $A = [b_{ij}]$, дзе $b_{ij} = A_{ij} \cdot |A|^{-1}$, A_{ij} — алгебраічны дадатак да элемента a_{ij} (гл. *Мінор*). Матрыцы, для якіх існуюць А.м., называюцца абарачальнымі.

АДВАРО́ТНАЯ ТЭАРЭ́МА — тэарэма тыпу $B \Rightarrow A$, у якой умовай з'яўляецца высновa B прамой тэарэмы $A \Rightarrow B$, а высновай — умова A зыходнай тэарэмы. Прамая і А.т. узаемна адваротныя. Калі яны абедзве праўдзівыя, то А. называецца неабходнай і дастатковай умовай для B (крытэрам B).

АДВАРО́ТНАЯ ФУ́НКЦЫЯ — функцыя $x = \varphi(y)$, якая атрымліваецца з дадзенай функцыі $y = f(x)$, калі з роўнасці $f(x) = y$ выразіць x праз y. Няхай функцыя $y = f(x)$ вызначаная на мностве A і B — мноства яе значэнняў. Адваротнай функцыяй для $y = f(x)$ называецца такая функцыя $x = h(y)$, якая вызначана на мностве B і кожнаму $y \in B$ ставіць у адпаведнасць такое $x \in A$, што $f(x) = y$. Для знаходжання А.ф. трэба развязаць раўнанне $f(x) = y$ у дачыненні да x. А.ф. да функцый $y = 2x$, $y = x^3$, $y = 10^x$ ёсць функцыі $x = \frac{y}{2}$, $x = \sqrt[3]{y}$, $x = \lg y$ адпаведна. А.ф. можа быць мнагазначнай, як, напрыклад, у выпадку функцыі $y = \sin x$. Дастатковая ўмова адназначнасці А.ф. — манатоннасць функцыі $f(x)$. Графікі функцыі і яе А.ф. сіметрычныя ў дачыненні да простай $y = x$.

АДВАРО́ТНЫ АПЕРА́ТАР — аператар, адваротны да аператара A; $X \to Y$ — гэта адлюстраванне $B : Y \to X$ такое, што

$$Bax = x \text{ для ўсякага } x \in X, \qquad (1)$$

$$Abx = x \text{ для ўсякага } x \in A(X) \subset Y. \qquad (2)$$

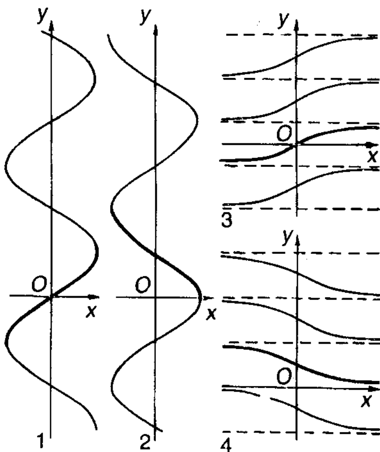
Абазначаецца: $B = A^{-1}$. Калі B задавальняе толькі ўмову (1), то ён называецца п р а в ы м а д в а р о т н ы м да A, калі толькі ўмову (2), то л е в ы м а д в а р о т н ы м да A. Адваротны аператар A^{-1} існуе, калі і толькі калі ён задае ўзаемную адпаведнасць паміж X і $A(X) \subset Y$. Калі аператар A мае А.а. A^{-1}, то раўнанне

$$Ax = y \qquad (3)$$

мае адзіны развязак для кожнага $y = A(x)$. Калі існуе толькі правы адваротны A^{-1}, дык існуе і развязак раўнання (3), але пытанне пра адназначнасць развязання застаецца адкрытым. Існаванне ж левага адваротнага A гарантуе адзінкавасць развязку, калі такі ёсць. Калі A — лінейны аператар з X у Y і для яго існуе А.а. A^{-1}, то ён таксама лінейны.

АДВАРО́ТНЫЯ ЛІ́КІ — лікі, здабытак якіх роўны 1. У мноствах камплексных, рэчаісных і рацыянальных лікаў адзіны лік, для якога не існуе адваротнага, — гэта 0. Напрыклад, пары $2-i, \frac{2}{5}+\frac{1}{5}$; $\pi, \frac{1}{\pi}$; $\frac{2}{3}, \frac{3}{2}$ — узаемна А.л. Ніводны н а т у р а л ь н ы л і к, акрамя 1, не мае адваротнага да сябе ў мностве натуральных лікаў.

АДВАРО́ТНЫЯ ТРЫГАНАМЕТРЫ́ЧНЫЯ ФУ́НКЦЫІ, а р к ф у н к ц ы і, к р у г а в ы я ф у н к ц ы і — функцыі, адваротныя да трыганаметрычных. Для кожнай з трыганаметрычных функцый $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ разглядаюцца прамежкі, дзе яны прымаюць усе свае значэнні і з'яўляюцца манатоннымі. Для функцыі $y = \sin x$ найбольш зручны прамежак $[-\pi/2, \pi/2]$. На ім для кожнага $|y| \le 1$ існуе адзіны развязак раўнання $y = \sin x$, таму адваротная функцыя існуе і запісваецца $y = \arcsin x$. Для астатніх функцый выбіраюць іншыя зручныя для іх прамежкі і атрымліваюць А.т.ф. для $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ (рыс.). Такім чынам, запісы $y = \arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$ маюць сэнс:



Графікі адваротных трыганаметрычных функцый (галоўныя галіны — паўтоўстая лінія): 1 — арксінус; 2 — арккосінус; 3 — арктангенс; 4 — арккатангенс

$$(y = \arccos x) \Leftrightarrow (\cos y = x,\ 0 \le y \le \pi);$$

$$(y = \operatorname{arctg} x) \Leftrightarrow \left(\operatorname{tg} y = x,\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right);$$

$$(y = \operatorname{arcctg} x) \Leftrightarrow (\operatorname{ctg} y = x,\ 0 < y < \pi).$$

Асноўныя ўласцівасці А.т.ф. вынікаюць з уласцівасцяў трыганаметрычных фунцый (гл. табліцу). Калі разглядаць трыганаметрычныя функцыі на ўсёй лікавай восі, то А.т.ф. будуць мнагазначныя. Яны абазначаюцца $\operatorname{Arcsin} x$, $\operatorname{Arccos} x$, $\operatorname{Arctg} x$, $\operatorname{Arcctg} x$. Тады:

$$\operatorname{Arcsin} x = (-1)^n \operatorname{arc} x + \pi n,$$

$$\operatorname{Arccos} x = \arccos x + 2\pi n,$$

$$\operatorname{Arctg} x = \operatorname{arctg} x + \pi n,$$

$$\operatorname{Arcctg} x = \operatorname{arcctg} x + \pi n, \quad n = 0, \pm 1, \ldots$$

Уласцівасці адваротных трыганаметрычных функцый

Функцыя	Абсяг вызначэння	Абсяг значэнняў	Характар манатоннасці
$\arcsin x$	$-1 \le x \le 1$	$[-\pi/2, \pi/2]$	нарастае
$\arccos x$	$-1 \le x \le 1$	$[0, \pi]$	спадае
$\operatorname{arctg} x$	$-\infty < x < +\infty$	$(-\pi/2, \pi/2)$	нарастае
$\operatorname{arcctg} x$	$-\infty < x < +\infty$	$(0, \pi)$	спадае

АДДЗЯЛЯ́ЛЬНАСЦІ АКСІЁМЫ — умовы, якія накладваюць на тапалагічную прастору, каб неперасякальныя мноствы ў тым або іншым сэнсе былі аддзеленыя адно ад аднаго. Прыклад — аксіёма T_0: адзін з двух пунктаў мае наваколле, якому не належыць іншы пункт (А.Калмагараў, 1935). Прасторы, якія адпавядаюць аксіёме T_0, называюцца п р а с т о р ы К а л м а г о р а в а.

А.а. T_1: для ўсякіх двух пунктаў існуе наваколле кожнага з іх, што не змяшчае іншага пункта (М.Фрэшэ, 1928; Ф.Рыс, 1909). Прасторы, якія адпавядаюць аксіёме T_1, называюцца д а с я г а л ь н ы м і п р а с т о р а м і, $T_1 \ne T_0$. А.а. T_2: для ўся-

кіх двух пунктаў існуюць неперасякальныя наваколлі (Ф.Хаўсдарф, 1914). Прасторы, якія адпавядаюць аксіёме T_2, называюцца аддзяляльнымі або хаўсдарфавымі прасторамі, $T_2 \neq T_1$. А.а. T_3: для ўсякага замкнёнага мноства і ўсякага пункта, які яму не належыць, існуюць іх неперасякальныя наваколлі (Л.Уеторыс, 1921). Прасторы, якія адпавядаюць аксіёмам $T_1 + T_2$, называюцца рэгулярнымі прасторамі, $T_3 + T_1 \neq T_2 + T_0$. А.а. $T_{3\frac{1}{2}}$: для ўсякага замкнёнага мноства і ўсякага пункта, які яму не належыць, існуе непарыўная лікавая функцыя, роўная нулю на мностве і адзінцы ў пункце (А.Ціханаў, 1930). Прасторы, што адпавядаюць аксіёмам $T_1 + T_{3\frac{1}{2}}$, называюцца цалкам рэгулярнымі або ціханаўскімі прасторамі, $T_{3\frac{1}{2}} + T_1 \neq T_2 + T_0$. А.а. T_4: для адвольных двух замкнёных неперасякальных мностваў існуюць іх неперасякальныя наваколлі. Прасторы, якія адпавядаюць аксіёмам $T_1 + T_4$, называюцца нармальнымі прасторамі, $T_4 + T_1 \neq T_3 + T_1$, $T_4 + T_1 = T_{3\frac{1}{2}} + T_1$.

АДДЗЯЛЯ́ЛЬНАЯ ПРАСТО́РА — тое, што *хаўсдарфава прастора.* Гл. таксама *Аддзяляльнасці аксіёмы.*

АДЗІ́НАСЦІ ТЭАРЭ́МА — усякая тэарэма, што пры пэўных умовах гарантуе існаванне не больш як аднаго аб'екта, якому яна прысвечана. Напрыклад, тэарэма адзінасці аналітычных функцый (гл. *Аналітычны працяг, Аналітычная функцыя*), тэарэмы адзінасці развязку задачы Кашы і іншых задач для звычайных дыферэнцыяльных раўнанняў, а таксама тэарэма адзінасці развязкаў розных задач для раўнанняў з частковымі вытворнымі.

АДЗІ́НАСЦІ Ў́МО́ВЫ — умовы, якія забяспечваюць справядлівасць *адзінасці тэарэмы.* Напрыклад, калі z_0 ($z_0 \in D$) — наперад зададзены пункт у адназлучным абсягу $D \in \mathbf{C}$, то ўмовамі адзінасці канформавага гомеамарфізму f абсягу D на круг $|w| < 1$ з'яўляюцца $f(z_0) = 0$, $f'(z_0 \neq 0)$.

АДЗІ́НКА — 1) найменшы з натуральных лікаў $n = 1$. Пры множанні адвольнага ліку на 1 атрымліваецца той самы лік; 2) у мностве аб'ектаў ці элементаў, што вывучаюцца, часта бывае вызначана якая-небудзь бінарная аперацыя (напрыклад, складанне або множанне для лікаў), абазначаная знакам *. Элемент e мноства называецца А. у такой аперацыі, калі для адвольнага элемента a праўдзівая роўнасць $a*e=a$, $e*a=a$ (абедзве роўнасці незалежныя, г.зн. можа быць $a*e \neq e*a$). Таму асобна вылучаюць левыя і правыя А. — такія элементы e_λ і e_n, што $a*e_n=a$, $e_\lambda*a=a$. Калі ў мностве вызначана некалькі аперацый (напрыклад, складанне і множанне), то адзінкай выбіраюць А. у дачыненні да адной з іх (звычайна ў дачыненні да множання; А. у дачыненні да складання называецца нулём); 3) у тэорыі алгебраічных лікаў і алгебраічных функцый А. называецца дзельнік адзінкі, г.зн. элемент a, для якога можна знайсці іншы элемент b, каб праўдзілася роўнасць $ab = 1$.

АДЗІ́НКАВЫ АДРЭ́ЗАК — адрэзак лікавай простай, даўжыня якога роўная адзінцы выбранага маштабу.

АДЗІ́НКАВЫ ВЕ́КТАР, орт (ад грэц. orthos — прамы) — вектар $\boldsymbol{e}$ эўклідавай прасторы, модуль якога роўны адзінцы. Калі зададзены ненулявы вектар $\boldsymbol{a}$, то яго орт можна вызначыць так: $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{a} / |\boldsymbol{a}|$, дзе $|\boldsymbol{a}|$ — модуль вектара $\boldsymbol{a}$. Усякі вектар $\boldsymbol{a}$ у прасторы можна раскласці па трох некампланарных вектарах $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3$, дзе x, y, z — кампаненты вектара $\boldsymbol{a}$; $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ — орты базіса. Звычайна А.в. у прамавугольнай сістэме каардынат (накіраваны адпаведна ўздоўж восяў x, y, z) абазначаюць літарамі $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$. Тэрмін "орт" увёў О.Хэвісайд (1892), абазначэнні $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ — Г.Грасман (1844), $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ — У.Гамільтан (1853).

АДКРЫ́ТАЕ АДЛЮСТРАВА́ННЕ — адлюстраванне $f: X \to Y$ тапалагічнай прасторы X у тапалагічную прастору Y такое, што вобраз усякага адкрытага мноства ёсць адкрытае мноства.

АДКРЫ́ТАЕ МНО́СТВА — мноства ў тапалагічнай прасторы, якое не змяшчае лімітавых пунктаў дапаўняльнага да яго мноства. Кожны пункт А.м. ёсць нутраны (змяшчаецца цалкам з пэўнай акругаю ў А.м.). Усякае непустое А.м. на простай — гэта інтэрвал або сума не больш як злічальнага мноства інтэрвалаў. Перасячэнне канцай колькасці і сума ўсякай колькасці А.м. ёсць А.м. Злучныя А.м. называюцца абсягамі. Усякая тапалагічная прастора можа азначацца заданнем сваіх А.м. Калі ж тапалагічная прастора зададзеная сістэмай сваіх замкнёных мностваў, то А.м. азначаюцца ў ім як мноствы, дапаўняльныя да замкнёных.

АДКРЫ́ТЫ ПРАМЕ́ЖАК — мноства ўсіх пунктаў рэчаіснай простай паміж пунктамі a і b, прычым самі пункты a і b А.п. не належаць. А.п. пазначаецца (a, b) ці $]\, a, b\, [$.

АДЛЁГЛАСЦЬ — неадмоўны лік, які ставіцца ў адпаведнасць кожнай упарадкаванай пары пунктаў пэўнай прасторы і задавальняе аксіёмы метрыкі. Узнікла як геаметрычнае паняцце, змест якога залежыць ад таго, для якіх аб'ектаў яно вызначаецца. А. паміж двума пунктамі з $\mathbf{R}^3$ — гэта даўжыня адрэзка, які іх злучае. А. ад пункта да простай (або плоскасці) — даўжыня адрэзка перпендыкуляра, апушчанага з дадзенага пункта на дадзеную простую (плоскасць). А. паміж дзвюма паралельнымі простымі (плоскасцямі) — даўжыня адрэзка агульнага перпендыкуляра да гэтых простых (плоскасцяў). А. паміж дзвюма крыжаванымі простымі ў прасторы ёсць А. паміж дзвюма паралельнымі плоскасцямі, праведзенымі праз кожную з гэтых простых, г.зн. даўжыня агульнага перпендыкуляра да гэтых простых (гл. таксама *Мнагамерная геаметрыя, Метрычная прастора, Геаметрыя*).

АДЛЮСТРАВА́ННЕ — закон, згодна з якім кожнаму элементу x нейкага зададзенага мноства X ставіцца ў адпаведнасць адназначна вызначаны элемент y з другога зададзенага мноства Y (мноствы X і Y могуць супадаць). Сувязь, што ўзнікла паміж $x \in X$ і $y \in Y$, запісваюць у выглядзе $y = f(x)$ ці $f{:}x \mapsto y$ і кажуць, што А. f дзейнічае з X у Y, запісваючы $f\colon X \to Y$. У функцыянальным аналізе і алгебры часцей замест тэрміна А. ужываюць тэрмін *аператар*, а калі Y — лікавае мноства, то А. часцей называюць ф у н к ц ы я й.

Часам разглядаюць А. f, вызначаныя не на ўсім мностве X, а на нейкім яго падмностве $D_f \subset X$, якое называюць а б с я г а м в ы з н а ч э н н я А. f. Падмноства $f(X) = \{f(x){:}\ x \in X\} \subset Y$ называюць а б с я г а м з н а ч э н н я ў А. f, а x і y — п р а в о б р а з а м і в о б р а з а м А. f адпаведна. Калі зададзеныя тры мноствы X, Y, Z і два А. $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$, то існуе А. $h\colon X \to Z$, азначанае роўнасцю $h(x) = g(f(x))$, і А. h мае назоў кампазіцыі ці здабытку А. f і g. Кампазіцыя $f \circ g$ можа не супадаць з $g \circ f$, але валодае ўласцівасцю асацыятыўнасці $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. Адлюстраванне $f\colon X \to Y$ называюць *ін'ектыўным адлюстраваннем* (ін'екцыяй) або ўзаемна адназначным, калі для адвольных $x_1, x_2 \in X$ з роўнасці $f(x_1) = f(x_2)$ атрымліваем $x_1 = x_2$. Адлюстраванне $f\colon X \to Y$ называюць *сюр'ектыўным адлюстраваннем* (сюр'екцыяй), калі для кожнага $y \in Y$ існуе такі $x \in X$, што $y = f(x)$. Калі А. ін'ектыўнае і сюр'ектыўнае, то яго называюць *біектыўным адлюстраваннем* (біекцыяй).

АДМАЎЛЕ́ННЕ — аперацыя логікі, у выніку якой з дадзенага выказвання A атрымліваецца новае выказванне "не A". Пазначаецца $\rceil A$, $\bar{A}$. У матэматычнай логіцы A вызначаецца наступнай табліцай праўдзівасці, дзе П — праўда, Н — няпраўда:

A	П Н
$\rceil A$	Н П.

АДМО́ЎНЫ ЛІК — рэчаісны лік, меншы за нуль. На рэчаіснай восі яму адпавядаюць пункты злева ад нуля.

АДНАБАКО́ВЫ ЛІМІ́Т — левабаковы або правабаковы ліміт функцыі ў нейкім пункце. Няхай $f\colon X \to Y$ — адлюстраванне тапалагічнай прасторы X з тапалогіяй, якую ўтварае дачыненне парадку, у тапалагічную прастору Y і $x_0 \in X$. Ліміт у пункце x_0 адлюстравання f на кожным інтэрвале $(a, x_0) = \{x{:}\ x \in X,\ a < x < x_0\}$ называецца л і м і т а м з л е в а (левабаковым лімітам, абазначаецца $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$), ліміт на адвольным інтэрвале $(x_0, b) = \{x{:}\ x \in X,\ x_0 < x < b\}$ — л і м і т а м с п р а в а (правабаковым лімітам, абазначаецца $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$). Калі пункт x_0 для мноства X лімітавы злева і справа, то звычайны ліміт $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ існуе, калі і толькі калі ў пункце x_0 існуюць ліміты злева і справа і яны роўныя паміж сабою.

АДНАБАКО́ВЫЯ І ДВУХБАКО́ВЫЯ ПАВЕ́РХНІ у $\mathbf{R}^3$. Паверхню Z у $\mathbf{R}^3$ называюць д в у х б а к о в а й у выпадку магчымасці задаць на Z непарыўнае вектарнае поле $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}(a)$, $a \in Z$, такім чынам, што ў кожным пункце $a \in Z$ існуе вектар $\boldsymbol{n}(a)$ адзінкавай даўжыні і перпендыкулярны да Z. Паверхні, якія не з'яўляюцца двухбаковымі, называюць а д н а б а к о в ы м і. Паверхня Z у $\mathbf{R}^3$ двухбаковая, калі і толькі калі яна а р ы е н т а в а н а я. Інакш кажучы, паверхню Z магчыма задаць сістэмай лакальных параметрызацый $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_i(u, v)$, $(u, v) \in u_i$, $i \in I$, такою, што калі $a \in Z$, а $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_i(u, v)$ і $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_j(u, v)$ параметрызуюць Z у наваколлі пункта a, то базісы $\{(\boldsymbol{r}_i)'_u, (\boldsymbol{r}_i)'_v\}$ і $\{(\boldsymbol{r}_j)'_u, (\boldsymbol{r}_j)'_v\}$ датычнай прасторы ў пункце a аднолькава арыентаваныя. Двухбаковасць, у адрозненне ад арыентаванасці, не ёсць нутраная ўласцівасць паверхні, і адзначаная вышэй іх раўназначнасць можа парушацца ў выпадку іншай, чым $\mathbf{R}^3$, абымальнай прасторы.

АДНАЗЛУ́ЧНЫ АБСЯ́Г л і н е й н а з л у ч н а й п р а с т о р ы — абсяг D, у якім усе зам-

кнёныя шляхі гаматопныя нулю. Гэта азначае, што кожны замкнёны шлях у D можна непарыўна дэфармаваць у пункт і заставацца ўвесь час у А.а. D.

АДНАЗНА́ЧНАЯ ФУ́НКЦЫЯ — функцыя, якая прымае толькі адно значэнне пры кожным значэнні аргумента з абсягу вызначэння функцыі. Напрыклад, x^3, e^x, $\sin x$, $\arcsin x$ — А.ф. Функцыя $\mathrm{Arcsin}\, x$, да прыкладу, не з'яўляецца А.ф. (гл. *Мнагазначная функцыя*). Звычайна замест тэрміна А.ф. ужываюць тэрмін "функцыя".

АДНАЛІ́СТАВАЯ ФУ́НКЦЫЯ — *аналітычная функцыя* або *мераморфная функцыя* f у абсягу D пашыранай камплекснай плоскасці **C** і такая, што для ўсякіх $z_1, z_2 \in D$, $z_1 \neq z_2$ праўдзіцца $f(z_1) \neq$ $\neq f(z_2)$. А.ф. у абсягу D узаемна адназначна адлюстроўвае гэты абсяг на нейкі абсяг $G \in \mathbf{C}$. Таму для А.ф. існуе адваротная функцыя, таксама аднаістая ў G.

Пры вывучэнні А.ф. адно з асноўных пытанняў — гэта пытанне пра магчымасць адналістававага адлюстравання зададзенага абсягу D на зададзены абсяг G. Неабходная ўмова для гэтага — супадзенне парадкаў злучнасці абсягаў D і G. Калі D і G — адназлучныя абсягі, межы якіх складаюцца больш як з аднаго пункта, гэтая ўмова ёсць і дастатковай (тэарэма Рымана). Асноўныя задачы тэорыі А.ф.: вывучэнне адпаведнасці межаў пры канформавым адлюстраванні, атрыманне ўмоваў адналіставасці, развязанне розных экстрэмальных задач тэорыі функцый.

АДНАПО́ЛАСЦЕВЫ ГІПЕРБАЛО́ІД — незамкнёная цэнтральная паверхня другога парадку, усе пункты якой праўдзяць раўнанне

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Лікі a, b, c называюцца паўвосямі А.г.

АДНАРО́ДНАЕ РАЎНА́ННЕ — раўнанне, якое не змяняе свайго выгляду пры множанні ўсіх (ці пэўных) невядомых на адзін і той жа лік, адрозны ад нуля. Раўнанне можа быць аднародным у дачыненні да часткі невядомых. Напрыклад,

$$xy + yz + zx = 0$$

— А.р. у дачыненні да ўсіх невядомых, раўнанне

$$y + \ln\frac{x}{z} + 5 = 0$$

аднароднае ў дачыненні да x і z. Левая частка А.р. — *аднародная функцыя*. Раўнанне

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0$$

называецца л і н е й н ы м а д н а р о д н ы м д ы ф е р э н ц ы я л ь н ы м р а ў н а н н е м. Яно аднароднае ў дачыненні да $y, \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}$. Раўнанне $y' = f(x, y)$, дзе $f(x, y) = f(\lambda x, \lambda y)$ пры адвольным λ (аднародная функцыя са ступенню аднароднасці 0), называецца д ы ф е р э н ц ы я л ь н ы м р а ў н а н н е м, аднародным у дачыненні да зменных x і y.

АДНАРО́ДНАЯ ПРАСТО́РА — мноства разам з зададзеным на ім транзітыўным уздзеяннем нейкай групы. Дакладней, мноства M ёсць А.п. групы G, калі зададзена адлюстраванне $(g, x) \to gx$ мноства $G \times M$ у M такое, што $(gh)\,x = g\,(hx)$, $ex = x$; для кожных x, $y \in M$ існуе такі $g \in G$, што $gx = y$. Элементы мноства M называюцца п у н к т а м і А.п., група G — г р у п а й р у х а ў або а с н о ў н а й г р у п а й А.п. Цікавыя выпадкі, калі G — алгебраічная група, а M — алгебраічная мнагастайнасць, або M — кампактная мнагастайнасць, а G — рэчаісная (ці кампактная) група.

АДНАРО́ДНАЯ СІСТЭ́МА л і н е й н ы х р а ў н а н н я ў — раўнанне выгляду $Ax = 0$, дзе A — лінейны аператар, які дзейнічае з вектарнай прасторы X у вектарную прастору Y, x — невядомы элемент з X. У прыватнасці, А.с. ёсць сістэма выгляду

$$a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n = 0, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Сума, рознасць і адвольная лінейная камбінацыя развязкаў А.с. — гэта таксама развязк А.с.

АДНАРО́ДНАЯ ФУ́НКЦЫЯ — функцыя адной ці некалькіх зменных, якая адпавядае ўмове, што пры множанні ўсіх аргументаў функцыі на адзін і той жа (адвольны) множнік значэнне функцыі памнажаецца на нейкую ступень гэтага множніка; для А.ф. $f(x, y, \ldots, u)$ пры ўсіх дапушчальных значэннях $x, y, \ldots, u$ і адвольным λ праўдзіцца роўнасць $f(\lambda x, \lambda y, \ldots, \lambda u) = \lambda^\alpha f(x, y, \ldots, u)$; α называецца паказнікам аднароднасці. Напрыклад, $x^2 - 2y^2$, $\sqrt[3]{x^4 + 5y^4}$ — А.ф. з паказнікамі аднароднасці адпаведна 2, 4/3.

АДНАРО́ДНЫЯ КААРДЫНА́ТЫ п у н к т а (п р о с т а й) — каардынаты, якім характэрная тая ўласцівасць, што вызначаны імі аб'ект не змяняецца, калі ўсе каардынаты памнажаюцца на адзін і той жа лік. Напрыклад, у якасці А.к. пункта M на плоскасці можна браць тры лікі: X, Y, Z, звязаныя тасункам $X : Y : Z = x : y : 1$, дзе x і y — дэкартавы каардынаты пункта M. Пасля ўвядзення А.к. мож-

на далучыць да пунктаў эўклідавай плоскасці пункты з трэцяй А.к., роўнай нулю (г.зн. бясконца аддаленыя пункты), што важна для праектыўнай геаметрыі.

АДНАСКЛА́Д — найпрасцейшы від алгебраічнага выразу элементарнай алгебры, прыватны выпадак *мнагаскладу*. А. называецца здабытак лікавага множніка (каэфіцыента) і адной або некалькіх літар (зменных), узятых кожная з тым або іншым натуральным паказнікам ступені, а таксама ўсякі асобны лік, напрыклад a^3c^3xy; -7; $-5ax^3$.

АДПАВЕ́ДНАСЦЬ — усякае падмноства R дэкартавага здабытку $A\times B$, дзе A, B — нейкія мноствы. Іншымі словамі, А. паміж A і B — гэта пэўныя ўпарадкаваныя пары (a, b), дзе $a\in A$, $b\in B$; абазначаюць $(a, b)\in R$, або aRb, або $R\ (a, b)$. Паняцце А. ёсць абагульненне на выпадак двух (увогуле кажучы, розных) мностваў або аднатыповых матэматычных структур паняцця *бінарнага дачынення*. Бывае, што замест тэрміна А. ужываецца "бінарнае дачыненне" (у шырокім сэнсе г.зн. не абавязкова $A = B$). Для конечных мностваў шырока выкарыстоўваюцца матрычнае і графавае выяўленні адпаведнасці. Гл. таксама *Узаемна адназначная адпаведнасць*.

АДРЭ́ЗАК лікавай простай — тое, што *сегмент* лікавай простай.

АДСО́ТКА — тое, што *працэнт*.

АДЫМА́ННЕ — дзеянне, адваротнае *складанню*. Задача А. — знаходжанне аднаго з двух складнікаў, калі вядомыя сума (зменшыва) і другі складнік (адымнік). Вынік дзеяння — рознасць. У абсягу дадатных лікаў А. не заўсёды можна здзейсніць: ад меншага ліку нельга адняць большы. Гэтая акалічнасць дае падставу для ўвядзення ў арыфметыку нуля і адмоўных лікаў; у пашыраным такім чынам лікавым абсягу А. заўсёды можна адназначна здзейсніць.

АДЫТЫ́ЎНАСЦЬ (ад лац. additio — дадаванне) — уласцівасць геаметрычных і іншых велічынь, якая палягае ў тым, што значэнне велічыні, адпаведнае цэламу аб'екту, роўнае суме значэнняў велічыняў, адпаведных яго часткам пры адвольным падзеле аб'екта на часткі. Напрыклад, А. аб'ёму азначае, што аб'ём цэлага цела роўны суме аб'ёмаў яго частак. Прыклады іншых адытыўных велічыняў: даўжыня лініі, плошча паверхні, маса цела, імавернасць і г.д.

АДЫТЫ́ЎНАЯ ГРУ́ПА КО́ЛЦА — *абэлева група*, якую складаюць усе элементы дадзенага колца ў дачыненні да аперацыі складання ў колцы.

АДЫТЫ́ЎНАЯ ТЭО́РЫЯ ЛІ́КАЎ — тэорыя, якая ахоплівае шэраг пытанняў наконт раскладання натуральных лікаў на складнікі пэўнага выгляду. Такімі, напрыклад, з'яўляюцца задачы пра запіс лікаў у выглядзе сумы n-х ступеняў (Варынга праблема), сумы простых лікаў (Гольдбаха праблема), сумы чатырох квадратаў і г.д. Шматлікія абагульненні вышэй названых задач на палі алгебраічных лікаў таксама належаць да А.т.п.

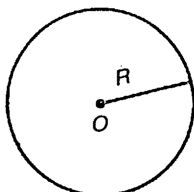
АЙЗЭНШТА́ЙНА КРЫТЭ́Р — крытэр непрыводнасці паліномаў над полем рацыянальных лікаў; атрыманы Ф.Айзэнштайнам. Няхай $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$ — палінoм з цэлымі каэфіцыентамі ступені $n > 0$. Калі існуе просты лік p, які не дзеліць каэфіцыент a_0, дзеліць усе астатнія каэфіцыенты $a_1, ..., a_n$, але a_n не дзеліцца на p^2, то $p\ (x)$ непрыводны над полем рацыянальных лікаў. А.к. справядлівы таксама для адвольных фактарыяльных колцаў.

АКРУ́ГА пункта — сіметрычнае *наваколле* пункта x_0 (з цэнтрам у пункце x_0) пэўнай метрычнай прасторы з метрыкай ρ. Няроўнасцю $\rho\ (x, x_0) < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ вызначаецца ε-акруга. У прыватнасці, у прасторы $\mathbf{R}^1$ (на простай) ε-акруга пункта x_0 ёсць інтэрвал $(x_0-\varepsilon; x_0+\varepsilon)$, у $\mathbf{R}^2$ (на плоскасці) — нутро круга радыуса ε з цэнтрам у пункце x_0, у $\mathbf{R}^3$ — нутро шара радыуса ε з цэнтрам у пункце x_0.

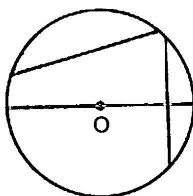
АКРУГЛЕ́ННЕ ліку — набліжанае выяўленне ліку ў пэўнай сістэме злічэння з дапамогай конечнай колькасці разрадаў z. Хібнасць, якая ўзнікае пры гэтым, называецца хібнасцю акруглення, або памылкай акруглення. Найбольш просты спосаб А. — адкідванне ніжэйшых разрадаў ліку, што выйшлі за межы дапушчальных z разрадаў. Абсалютная памылка пры гэтым не большая за адзінку z-га разраду акруглення. Існуюць і іншыя спосабы А., напрыклад А. ліку да бліжэйшага t-разраднага ліку. У гэтым выпадку абсалютная памылка не большая за палову t-га разраду А. ліку. Спосабы А., выкананыя на кампутары, вызначаюцца яго асаблівасцямі. На кампутары, якія працуюць у рэжыме з нефіксаванай коскай, вынік А. ліку мае вызначаную колькасць вартасных лічбаў, у рэжыме

з фіксаванай коскай — вызначаную колькасць лічбаў пасля коскі.

АКРУ́ЖЫНА — замкнёная плоская крывая, усе пункты якой аднолькава аддаленыя ад дадзенага пункта (цэнтра А.), якія знаходзяцца у той жа плоскасці, што і крывая. Адрэзак R, што злучае цэнтр А. з пэўным яе пунктам (а таксама даўжыня гэтага адрэзка), называецца р а д ы у с а м А. (рыс. 1). Адрэзак, які злучае два пункты акружыны, называецца х о р д а й (рыс. 2). Хорда, што

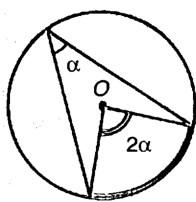


Рыс. 1

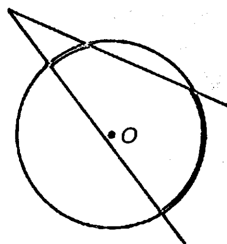


Рыс. 2

праходзіць праз цэнтр А., называецца д ы я м е т р а м. Дыяметр — найбольшая хорда. Дыяметр, які праходзіць праз сярэдзіну хорды, перпендыкулярны да яе. У м е ж а н ы м в у г л о м называецца вугал, які ўтвараюць дзве хорды з агульным канцом (рыс. 3). Ц э н т р а л ь н ы м в у г л о м называецца вугал, які ўтвараюць два радыусы. Умежаны вугал вымяраецца палавінай дугі, на якую абапіраецца, і роўны палавіне цэнтральнага вугла, які абапіраецца на тую ж дугу. Вугал, што

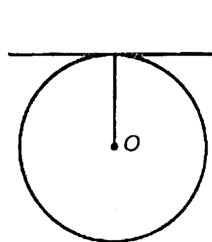


Рыс. 3

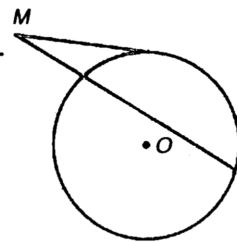


Рыс. 4

ствараюць дзве сечныя, роўны палавіне рознасці дугаў, якія знаходзяцца паміж старанамі вугла (рыс. 4). Праз пункт на А. можна правесці адзіную датычную, прычым яна перпендыкулярная да радыуса, праведзенага ў пункт дотыку (рыс. 5). Калі з пункта M, узятага па-за А., праведзены сечная і датычная, то здабытак адлегласцяў ад пункта M да пунктаў перасячэння з А. роўны квадрату даўжыні адрэзка датычнай ад пункта M да А. (рыс. 6). Дзель ад дзялення даўжыні А. на яе радыус ёсць аднолькавы для ўсіх А. трансцэндэнтны лік $\pi = 3{,}14159...$ (гл. *Пі*). Даўжыня l А. вызначаецца формулай $l = 2\pi R$. Абмежаваная А. частка плоскасці, якой належыць цэнтр O, называецца



Рыс. 5

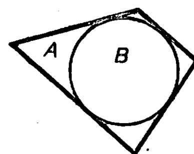


Рыс. 6

к р у г а м. У аналітычнай геаметрыі А. — гэта цэнтральная лінія другога парадку з раўнаннем $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, дзе (a, b) — каардынаты цэнтра А., R — радыус.

АКРУ́ЖЫНА КРЫВІНІ́, к р у г к р ы в і н і — акружына, якая мае з крывой у дадзеным пункце *судотык* не ніжэй як другога парадку. Цэнтр А.к. называецца ц э н т р а м к р ы в і н і крывой у пункце судотыку, а радыус А.к. — радыусам крывіні. А.к. размяшчаецца ў *судатычнай плоскасці* крывой.

АКРЭ́СЛЕНАЯ ФІГУ́РА — фігура A, у якую можна ўмежыць фігуру B, называецца акрэсленай фігурай (вакол B). На рыс. чатырохвугольнік акрэслены вакол акружыны. Гл. *Умежаная фігура.*



АКСАНАМЕ́ТРЫЯ (ад грэц. axon — вось + metreo — вымяраю) — адзін са спосабаў выяўлення прасторавых фігур на плоскасці. А. палягае ў тым, што фігура, а таксама выбраная прамавугольная дэкартава сістэма каардынат і артаганальная праекцыя фігуры на адну з каардынатных плоскасцяў праектуецца на плоскасць рысунка. У залежнасці ад спосабаў праектавання А. бывае паралельная і цэнтральная. Калі кірунак паралельнага праектавання на плоскасць рысунка перпендыкулярны гэтай плоскасці, то А. называецца а р т а г а н а л ь н а й або н а р м а л ь н а й, у процілеглым выпадку — к о с а в у г о л ь н а й. Пры артаганальнай А. задаюць косінусы вуглоў нахілу

каардынатных восяў да плоскасці рысунка, іх называюць звычайна паказнікамі (ці каэфіцыентамі) скажэння.

АКСІЁМ СХЕ́МА — спосаб задання сукупнасці аксіём. А.с. задаюць з дапамогай якога-небудзь выразу σ і правіла, якое дае магчымасць з выразу σ атрымаць канкрэтныя аксіёмы. Звычайна сам выраз называецца схемай аксіём, але пры гэтым вызначаюць правіла атрымання канкрэтных аксіём выразу σ. Прыкладам А.с. з'яўляецца выраз $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$, дзе A, B — адвольныя формы *выказванняў злічэння.* Тут правілам атрымання канкрэтных аксіём з А.с. з'яўляецца правіла падстановы, якое дазваляе замяняць A і B у гэтай схеме аксіём адвольнымі формуламі і атрымліваць безліч аксіём. Іншыя прыклады А.с. — А.с. *выказванняў злічэння, прэдыкатаў злічэння*, аксіёма *індукцыі* ў фармальнай арыфметыцы. Ужыванне А.с. дазваляе звычайна пры будаванні фармальных тэорый абысціся без правіла падстановы. Напрыклад, у злічэнні выказванняў і ў злічэнні прэдыкатаў з двума правіламі вывядзення — правілам падстановы і правілам высновы — магчыма абмяжоўвацца падстановамі толькі ў аксіёмы. Гэта дае магчымасць будаваць эквівалентнае злічэнне, замяняючы кожную аксіёму адпаведнай А.с., і вылучыць правіла падстановы з правілаў вывядзення гэтага злічэння.

АКСІЁМА (грэц. axioma) — асноўнае зыходнае сцверджанне; відавочны прынцып. У дэдукцыйных навуковых тэорыях на іх грунтуюцца (выводзяцца лагічнымі сродкамі) іншыя сцверджанні тэорыі, а самі А. у межах гэтай тэорыі прымаюцца без доказу.

АКСІЁМЫ ІМАВЕ́РНАСЦІ — аксіёмы, на якіх будуецца імавернасцяў тэорыя: 1) аксіёма неадмоўнасці:

$$P(A) \geq 0$$

для кожнай падзеі A; 2) аксіёма нармавання:

$$P(\Omega) = 1,$$

дзе Ω — верагодная падзея; 3) аксіёма складання:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B),$$

калі падзеі A і B несупольныя, г.зн. $A \cap B = \varnothing$; 4) пашыраная аксіёма складання:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n,$$

калі падзеі $A_1, A_2, \ldots$ парамі несупольныя. Аксіёма 4 пры выкананні аксіём 1—3 эквівалентная аксіёме 5; 5) аксіёма непарыўнасці:

$$P(B) = \lim_{n\to\infty} P(A_n),$$

калі

$$A_n \nearrow B \left(A_1 \subset A_2 \subset \ldots i \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right)$$

або

$$A_n \searrow B \left(A_1 \supset A_2 \supset \ldots i \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = B \right).$$

Вызначаная сістэма аксіём не поўная, бо для аднаго і таго ж мноства падзей існуе некалькі функцый $P(A)$, якія задавальняюць аксіёмы. Гэты факт дае магчымасць выкарыстоўваць тэорыю імавернасцяў для вывучэння розных выпадковых эксперыментаў, для якіх імавернасць падзей вызначаецца адназначна.

АКСІЯ́ЛЬНЫ ВЕ́КТАР (ад лац. axis — вось) — тое, што *восевы вектар.*

АКСІЯМАТЫ́ЧНАЯ ТЭО́РЫЯ МНО́СТВАЎ — раздзел матэматычнай логікі, які вывучае *мностваў тэорыю* аксіяматычным метадам. У "наіўнай" тэорыі мностваў, створанай Г.Кантарам у канцы 19 ст., былі выяўлены матэматычныя парадоксы. *Аксіяматычны метад* асабліва падыходзіць дзеля таго, каб іх пазбегнуць. Існуе некалькі практычна зручных падыходаў. Да найбольш папулярных належаць сістэма аксіём, прапанаваная Э.Цэрмела (1908) і ўдасканаленая А.Фрэнкелем (1922), а таксама сістэма, прапанаваная Дж. Нойманам (1925) і перапрацаваная П.Бэрнайсам (1937—54) і К.Гёдэлем (1940). А.т.м., заснаваная па дадзенай сістэме аксіём, будуецца як кожная фармальная сістэма, стварэнне якой у сваю чаргу пачынаецца з апісання яе мовы.

Алфавіт варыянта мовы А.т.м., на якім выкладзена сістэма Цэрмела—Фрэнкеля, змяшчае наступныя сімвалы: 1) зменныя $x, y, z, \ldots$; 2) двухмесцавыя прэдыкатныя сімвалы; $\in$ (знак прыналежнасці) і $=$ (знак роўнасці); 3) логікавыя сімвалы: $\wedge$ (кан'юнкцыя), $\vee$ (дыз'юнкцыя), $\neg$ (адмаўленне), $\Rightarrow$ (імплікацыя), $\Leftrightarrow$ (эквіваленцыя), $\forall$ (квантар агульнасці), $\exists$ (квантар існавання); 4) дадатковыя сімвалы: (,). Формулы А.т.м. будуюцца паводле наступных правілаў: калі x, y — зменныя, то $x \in y$ і $x = y$ — формулы; калі A, B — формулы, x — зменная, то $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $\neg A$, $(A \Rightarrow B)$, $(A \Leftrightarrow B)$ ёсць формулы. У апісанай мове магчыма выявіць з да-

памогай формул розныя ўласцівасці мностваў і дачыненняў паміж мноствамі. Напрыклад, формула $\forall z(z \in x \Rightarrow z \in y)$ азначае, што $x \leq y$ (x — падмноства y); $\forall z\ (z \in y \Leftrightarrow z = x)$ азначае, што y — аднаэлементавае мноства, якое складаецца з x, г.зн. $y = \{x\}$; $\forall y \neg(y \in x)$ азначае, што $x = \varnothing$ (x — пустое мноства). У далейшым гэтыя выразы ўжываюцца як скарачэнне для адпаведных формул. Прапанаваную Э.Цэрмела сістэму А.т.м. Z можна сфармуляваць на апісанай вышэй мове. Правіла вывядзення і логікавыя аксіёмы Z супадаюць з пастулатам гэтак званых *прэдыкатаў злічэння* з роўнасцю, а астатнія аксіёмы сфармуляваны ніжэй. Калі пры гэтым у фармулёўцы аксіёмы прысутнічаюць параметры, то, як звычайна, трэба лічыць, што аксіёма — гэта замыканне формулы квантарамі агульнасці па ўсіх параметрах. Акрамя гэтага, няхай $\Leftrightarrow$ азначае "ёсць паводле значэння".

Z 1. Аксіёма аб'ёмнасці:

$$\forall z((z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y)$$

(два мноствы x, y роўныя, калі яны складаюцца з адных і тых жа элементаў).

Z 2. Аксіёма пары:

$$\exists z \forall u(u \in z \Leftrightarrow u = x \vee u = y)$$

(z — неўпарадкаваная пара).

Z 3. Аксіёма сумы:

$$\exists y \forall z(z \in y \Leftrightarrow \exists u(u \in x \wedge z \in u))$$

(y — аб'яднанне ўсіх элементаў з x; $y = \bigcup x$).

Z 4. Аксіёма ступені (аксіёма мноства падмностваў):

$$\exists y \forall z(z \in y \Leftrightarrow z \subseteq x)$$

(y — мноства ўсіх падмностваў x, якое звычайна абазначаюць PX).

Z 5. Аксіёма вылучэння:

$$\exists y \forall z(z \in y \Leftrightarrow z \in x \wedge A(z)),$$

дзе $A\ (z)$ — формула, у якой няма свабоднай зменнай y (існуе мноства, якое складаецца дакладна з тых элементаў мноства x, для якіх мае месца $A(z)$).

Z 6. Аксіёма бязмежнасці:

$$\exists x \operatorname{Inf}(x),$$

дзе $\operatorname{Inf}(z)$ азначае, што z — стандартнае бясконцае мноства,

$$\operatorname{Inf}(z) \Leftrightarrow \forall x(x = \varnothing \Rightarrow x \in z) \wedge$$
$$\wedge \forall u\ (u \in z \Rightarrow \forall v\ (v = u \bigcup \{u\} \Rightarrow v \in z)).$$

Z 7. Аксіёма выбару:

$$\forall z\, \exists w\, (F_n(w) \wedge \forall x(x \in z \wedge \neg x =$$
$$= \varnothing \Rightarrow \exists x(u = w'x \wedge u \in x)))$$

(для кожнага мноства x існуе функцыя w такая, што $w'x \in x$ для ўсякага непустога мноства элемента x мноства z). Тут $F_n(x)$ азначае, што x — функцыя, г.зн.

$$F_n(x) \Leftrightarrow \forall y(y \in x \Rightarrow \exists u \exists v(y =$$
$$= \langle u, v \rangle) \wedge \forall y \forall u \forall v \exists s \forall t(s = \langle y, u \rangle \wedge t =$$
$$= \langle y, v \rangle \wedge s \in x \wedge t \in x) \Rightarrow u = v),$$

дзе $\langle u,v \rangle$ — упарадкаваная пара u і v, а $y = w'x$ азначае, што y — значэнне функцыі w на элеменце x, г.зн.

$$y = w'x \Leftrightarrow \forall u(u = \langle x, y \rangle \Rightarrow u \in w).$$

Z 8. Аксіёма рэгулярнасці:

$$\forall x(\neg x = \varnothing \Rightarrow \exists y(y \in x \wedge \forall zz \in y \bigcap x \Rightarrow z = \varnothing))$$

(кожнае непустое мноства x змяшчае элемент, які не мае x супольных элементаў).

У сістэме Z магчыма развіць арыфметыку, аналіз і іншыя раздзелы матэматыкі. Аднак гэтая сістэма недастатковая для таго, каб разгарнуць тэорыю кардынальных лікаў поўнасцю. У сувязі з гэтым А.Фрэнкель прапанаваў дапоўніць сістэму Z новай аксіёмай, якую ён назваў аксіёмай падстановы:

$$ZF_9.\ \forall y \forall z \forall w(y \in x \wedge A(y,z) \wedge A(y,w) \Rightarrow z =$$
$$= w) \Rightarrow \because \exists r \forall s(s \in r \Leftrightarrow \exists t(t \in x \wedge A(t,s))),$$

дзе $A\ (t, s)$ — адвольная формула (для кожнага адназначнага бінарнага дачынення A існуе мноства r, якое складаецца з тых аб'ектаў s, што $A\ (t, s)$ для нейкага $t \in x$). Сістэма ZF атрымліваецца далучэннем аксіёмы падстановы ZF_9 да сістэмы Z. Тэорыя ZF выключна багатая паводле сваіх магчымасцяў. Практычна кожную даказаную матэматычную тэарэму магчыма запісаць на мове ZF і з яе дапамогай ажыццявіць доказ. У той жа час вядомыя парадоксы тэорыі мностваў не рэалізуюцца ў ZF.

Іншую аксіяматыку прапанаваў Дж. Нойман. Яго ідэя — увядзенне ў тэорыю мностваў новага першаснага паняцця — паняцця класа. Інтуіцыйны сэнс гэтага паняцця такі: x — клас, калі x ёсць сукупнасць усіх аб'ектаў, якім характэрная пэўная ўласцівасць. Такая сукупнасць не заўсёды будзе мноствам; напрыклад, сукупнасць усіх такіх x, што $\neg x \in x$ (г.зн. мноствам не з'яўляецца сукупнасць усіх мностваў, якія не належаць самім сабе як элементы; меркаванне пра існаванне гэта-

га мноства прыводзіць да парадокса Расэла). Сістэма *NBG*, прапанаваная Дж.Нойманам і перапрацаваная П.Бэрнайсам і К.Гёдэлем, будуецца ў мове, якая змяшчае тыпы зменных (па падмноствах і па класах) і мае конца лік аксіём у адрозненне ад сістэмы *ZF*, у якой аксіёма вылучэння і аксіёма падстановы з'яўляюцца на самой справе схемамі аксіём. Усякая формула сістэмы *ZF* даказальная ў сістэме *NBG*, калі і толькі калі яна даказальная ў *ZF*.

Ёсць іншыя сістэмы А.т.м. Сярод іх тэорыя тыпаў Расэла і Уайтхеда, а таксама сістэма Куайна, вядомая пад назовам "Новыя асновы" і пазначаная *NF*. Нягледзячы на розніцу адзначаных А.т.м., усе яны дапускаюць звычайныя спосабы разважанняў, прынятыя ў матэматыцы. Гэта дазваляе надаць дакладны сэнс многім матэматычным праблемам, што ўзніклі ў тэорыі мностваў, якія не паддаюцца развязанню доўгі час. Так, напрыклад, на мове *ZF* магчыма сфармуляваць славутую к а н т ы н у у м - г і п о т э з у К а н т а р а: кожная сукупнасць падмностваў паслядоўнасці натуральных лікаў ёсць концая, злічальная ці роўнамагутная мноству ўсіх падмностваў гэтай паслядоўнасці (г.зн. не існуе бясконцага мноства, якое мае магутнасць, строга прамежкавую паміж магутнасцю злічальнага мноства і магутнасцю кантынууму). К.Гёдэль (1939) паказаў, што калі *ZF* несупярэчлівая, то яна застаецца несупярэчлівай і пасля далучэння кантынуум-гіпотэзы (г.зн. кантынуум-гіпотэза сумяшчальная з *ZF*). П.Коэн (1963) адкрыў, што калі *ZF* несупярэчлівая, то яна застаецца несупярэчлівай і пасля далучэння адмаўлення кантынуум-гіпотэзы (г.зн. адмаўленне кантынуум-гіпотэзы сумяшчальнае з *ZF*). Такім чынам, кантынуум-гіпотэза не залежыць ад тэорыі *ZF*. Аналагічна аксіёма выбару не залежыць ад астатніх аксіём тэорыі *ZF*, што таксама даказалі К.Гёдэль (1939) і П.Коэн (1963).

АКСІЯМАТЫ́ЧНЫ МЕ́ТАД — спосаб будавання навуковай тэорыі, пры якім у аснову тэорыі кладуцца пэўныя зыходныя пастулаты (аксіёмы), а ўсе астатнія сцверджанні даказваюцца з дапамогай лагічных разважанняў.

А.м. зарадзіўся ў працах старажытнагрэцкіх матэматыкаў. Узорам скарыстання А.м. ажно да 19 ст. былі вядомыя *"Пачаткі" Эўкліда* (3 ст. да н.э.). У сістэме Эўкліда даволі дакладна рэалізавана ідэя атрымання ўсяго зместу геаметрычнай тэорыі дэдукцыйным метадам з пэўнага мноства сцверджанняў аксіём. Праўдзівасць гэтых аксіём відавочная, наглядная. Акрамя таго, на той час заставалася нявысветленым пытанне пра дакладнае апісанне логікавых сродкаў, якія скарыстоўваюцца для атрымання сцверджанняў з аксіём. З гэтай прычыны да 19 ст. існаваў у А.м. "наіўназмястоўны" пункт гледжання: аксіёмы — праўдзівыя з-за сваёй відавочнасці, нагляднасці, а тэарэмы праўдзівыя, бо атрыманы з праўдзівых сцверджанняў з дапамогай правільных лагічных разважанняў. Такая форма А.м. называецца з м я с т о ў н ы м А. м. Перагляд "наіўнага" пункту гледжання пачаўся з адкрыцця на пачатку 19 ст. неэўклідавай геаметрыі Н. Лабачэўскім і Я.Больяі. Яны высветлілі, што пры замене звыклага і аб'ектыўна праўдзівага V пастулата Эўкліда пра паралельныя простыя яго адмаўленнем можна выключна лагічнымі разважаннямі пабудаваць геаметрычную тэорыю, такую ж зграбную і багатую, як і геаметрыя Эўкліда, і, як даказана пазней, гэтак жа і лагічна несупярэчлівую. На зыходзе 19 ст. матэматычны свет быў узрушаны адкрыццём парадоксаў, г.зн. разважанняў, якія прыводзяць да супярэчлівасці (напрыклад, парадокс Расэла). Гэта спрычынілася да далейшага развіцця А.м.: узнікнення паняцця фармальнай (аксіяматычнай) сістэмы і новай праблематыкі агульнаматэматычнага характару (несупярэчлівасць, поўнасць, незалежнасць сістэмы аксіём), на аснове якой узнікла тэорыя доказаў (*метаматэматыка*) як раздзел сучаснай матэматычнай логікі. У новым выглядзе А.м. называецца ф а р м а л ь н ы м А.м.

Першыя вынікі ў гэтай галіне атрыманыя метадам інтэрпрэтацый. Аднак ён дазваляе даказаць толькі сцверджанні тыпу: калі адна тэорыя несупярэчлівая, то несупярэчлівая і пэўная іншая тэорыя. Так, напрыклад, была даказана (Ф.Кляйн, А.Пуанкарэ) несупярэчлівасць геаметрыі Лабачэўскага пры меркаванні, што несупярэчлівая геаметрыя Эўкліда, а пытанне пра несупярэчлівасць гільбэртавай аксіяматызацыі эўклідавай геаметрыі было зведзенае (Д.Гільбэрт) да праблемы несупярэчлівасці арыфметыкі. Метад інтэрпрэтацый дазваляе таксама высвятляць пытанне пра незалежнасць сістэмаў аксіём. Важным дасягненнем метаду інтэрпрэтацый ёсць той факт, што з яго дапамогай была выяўлена асаблівая роля арыфметыкі як матэматычнай тэорыі, да пытання пра несупярэчлівасць якой зводзіцца аналагічнае пытанне для мноства іншых тэорый.

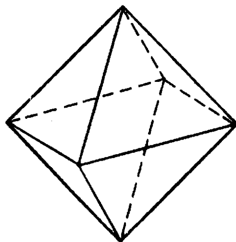
Далейшае развіццё А.м. атрымаў у працах Д.Гільбэрта і яго школы. Менавіта тут было выпрацавана паняцце фармальнай (аксіяматычнай)

сістэмы — удакладненне паняцця аксіяматычнай тэорыі. У выніку гэтага выявілася магчымасць разглядаць матэматычныя тэорыі як дакладныя матэматычныя аб'екты і будаваць агульную тэорыю (метатэорыю) такіх аб'ектаў. Прычым спакуслівай здавалася перспектыва развязаць на гэтым шляху ўсе галоўныя пытанні абгрунтавання матэматыкі. Праграма Д.Гільбэрта прадугледжвала фармалізацыю значнай часткі матэматыкі і абгрунтаванне атрыманай фармальнай сістэмы шляхам доказу яе несупярэчлівасці фінітнымі метадамі, не выкарыстоўваючы тыя магутныя сродкі, якія ў класічных матэматычных тэорыях якраз і з'яўляюцца прычынай цяжкасці іх абгрунтавання. Аднак вынікі К.Гёдэля (1931) выявілі нязбытнасць увогуле праграмы Д.Гільбэрта (гл. *Гёдэля тэарэма пра няпоўнасць*), бо ўжо для арыфметыкі прынцыпова немагчыма атрымаць увесь аб'ём яе змястоўна праўдзівых сцверджанняў класам формул якой-небудзь фармальнай сістэмы.

Усё гэта паказвае, што магчымасці А.м. абмежаваныя ў тым выглядзе, які ён набыў у рамках гільбэртавага фармалізму. Аднак і ў гэтых межах ён мае важнае значэнне ў асновах матэматыкі. Так, пры аксіяматычным падыходзе з ужываннем метаду інтэрпрэтацый К.Гёдэль (1938—40) і П.Коэн (1963) атрымалі фундаментальныя вынікі пра несупярэчлівасць і незалежнасць выбару аксіёмы і кантынуум-гіпотэзы ў тэорыі мностваў. Што да такога важнага пытання асноў матэматыкі, як праблема несупярэчлівасці, дык пасля вынікаў К.Гёдэля стала відавочна, што для яе развязання не абысціся без іншых, адрозных ад фінітных ідэяў і метадаў.

АКТА́НТ (ад лац. octans (octatis) — восем) — цялесны вугал, які змяшчае 1/8 прасторы.

АКТА́ЭДР (грэц. octoedron ад octo восем + hedra — грань) — адзін з *правільных мнагаграннікаў*. А. (гл. рыс.) мае 8 граняў (трохвугольных), 12 кантаў, 6 вяршыняў (у кожнай вяршыні зыходзяцца 4 канты).



Аб'ём А.: $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3} \approx 0{,}4714a^3$, дзе a — даўжыня канта.

АКТУА́ЛЬНАЯ БЯСКО́НЦАСЦЬ (ад лац. actualis — які фактычна існуе, дадзены) — паняцце пра бясконцасць, паводле якога бясконцая сукупнасць аб'ектаў разглядаецца як завершаны аб'ект. А.б. лічыцца, напрыклад, мноства натуральных лікаў, калі яны разглядаюцца як дадзеныя ўсе разам, ці бясконцае мноства пунктаў, што нібыта ўтвараюць геаметрычную фігуру. А.б. мае ідэалізаваны характар, бо ўзнікае ў выніку ўяўнай немагчымасці завяршыць будаванне бясконцага ліку асобных аб'ектаў, г.зн. у выніку выкарыстання абстракцыі актуальнай бясконцасці. У матэматыцы выкарыстанне А.б. праяўляецца ў тым, што не робіцца прынцыповых адрозненняў паміж канцымі і бясконцымі мноствамі. Апошнія разглядаюцца так, нібыта ўсе іх элементы ўжо пабудаваныя і дадзеныя разам. Гэта дазваляе ў разважаннях пра актуальна бясконцыя мноствы выкарыстоўваць тыя ж логікавыя законы, што і ў разважаннях пра канцыя мноствы, у прыватнасці закон скасаванага трэцяга.

АЛГАРЫ́ТМ — дакладна вызначаны парадак выканання нейкай сукупнасці пэўных правілаў для развязання задач аднаго і таго ж тыпу. З гэтага апісання вынікаюць наступныя асноўныя ўласцівасці А.: дэтэрмінаванасць — адназначнасць выніку скарыстання А.; дыскрэтнасць здзяйснення А. — падзел на элементарныя крокі (дзеянні), ажыццяўленне якіх машынай або чалавекам не выклікае сумневу; масавасць — зыходныя звесткі, дадзеныя для працы А., бяруцца з нейкага мноства звестак (патэнцыйна бясконцага).

Паняцце А. — адно з асноўных (разам з паняццем мноства) у матэматыцы, знаходжанне А. для развязання розных задач — адна з мэтаў матэматыкі. На працягу многіх гадоў паняцце А. у галоўным не змянялася, паколькі яно разглядалася толькі ў сувязі з будаваннем канкрэтных А. Але ў 1930-х гг. у сувязі з пытаннямі абгрунтавання матэматыкі і спробамі доказу неразвязальнасці алгарытмічных праблем (якія завяршыліся поспехам) узнікла патрэба ўдакладнення паняцця А. як аб'екта матэматычнай тэорыі (гл. *Алгарытмаў тэорыя*).

АЛГАРЫ́ТМ МО́ЦНА ПАЛІНО́МНЫ — алгарытм, які задавальняе наступныя ўмовы: змяшчае толькі элементарныя арыфметычныя аперацыі (складанне, адыманне, параўнанне, множанне

і дзяленне); колькасць здзяйсненняў гэтых аперацый абмежаваная палiномам ад колькасці рацыянальных лікаў, якія складаюць уваход алгарытму; даўжыня двайковага запісу кожнага ліку, які з'яўляецца ў працэсе здзяйснення алгарытму, абмежаваная паліномам ад памеру яго ўваходу. Большасць вядомых паліномных алгарытмаў моцна паліномныя. Тым часам ніводны з наяўных алгарытмаў развязання задачы лінейнага праграмавання не ёсць А.м.п.

АЛГАРЫ́ТМ ПАЛІНО́МНЫ — алгарытм, складанасць якога абмежаваная паліномам ад памеру ўваходу (гл. *Алгарытму складанасць*). Паняцце А.п. — найбольш пашыраная фармалізацыя інтуіцыйнага ўяўлення пра эфектыўны алгарытм.

АЛГАРЫ́ТМ ПО́ШУКУ Ў ГЛЫБІНЮ́ — працэдура сістэматычнага абыходу вяршыняў і кантаў *графа*. У дачыненні да неарыентаванага графа ажыццяўляецца наступным чынам. Пачынаючы з адвольнай вяршыні v_0, выбіраем адвольны кант v_0v і пераходзім да вяршыні v. Няхай x — апошняя на дадзены момант наведаная вяршыня. Далей пераглядаем канты, інцыдэнтныя вяршыні x. Калі ўдаецца знайсці такі кант xy, што вяршыня y не наведаная, то пераходзім у гэтую вяршыню. У процілеглым выпадку вяртаемся ў вяршыню, з якой прыйшлі ў x. Працэс закончыцца, калі ўсе канты графа будуць прагледжаны і адбудзецца вяртанне ў вяршыню v_0. А.п. у г. ажыццяўляецца і на арыентаваных графах. Складанасць гэтага алгарытму ў абодвух выпадках з'яўляецца лінейнай функцыяй ад колькасці вяршыняў і кантаў графа. А.п. у г. паслужыў падставай для шэрагу эфектыўных алгарытмаў на графах, у прыватнасці алгарытмаў вылучэння k-кампанентаў графа пры $k \leq 3$.

АЛГАРЫ́ТМ ПО́ШУКУ Ў ШЫРЫНЮ́ — працэдура сістэматычнага абыходу вяршыняў і кантаў *графа*. Адвольная вяршыня v_0 выбіраецца ў якасці пачатковай, астатнія вяршыні наведваюцца ў парадку іх аддаленасці ад вяршыні v_0. Г.зн. спачатку наведваюцца вяршыні, сумежныя з v_0, потым размешчаныя ад яе на адлегласці 2, 3, 4 і г.д. Складанасць А.п. у ш. з'яўляецца лінейнай функцыяй ад колькасці вяршыняў і кантаў графа. А.п. у ш. выкарыстоўваецца ў алгарытмах пошуку найбольшага параспалучэння ў графе, максімальнай плыні ў сетцы, распазнавання дзвюхчасткавасці графа і ў шэрагу іншых эфектыўных алгарытмаў на графах.

АЛГАРЫ́ТМ ПРА́ГНЫ — зборны назоў алгарытмаў развязання аптымізацыйных задач, якія выкарыстоўваюць наступную стратэгію: на кожным кроку павялічваецца фрагмент развязання, пабудаванага на папярэднім кроку, прычым гэтае павелічэнне ажыццяўляецца так, каб яно прыводзіла да максімальнага (у выпадку задачы на максімум) прыросту функцыяналу на гэтым кроку. Інакш кажучы, на кожным кроку павелічэнне фрагмента робіцца за кошт далучэння элементаў, якія здаюцца найбольш прыдатнымі на гэтым кроку. Як правіла, А.п. не гарантуе атрымання оптымуму і дазваляе знайсці толькі набліжаны развязак. Тым не менш, у камбінаторнай аптымізацыі акрэсленае кола задач, дзе А.п. прыводзіць да поспеху. Тыповы прыклад — задача пошуку каркаснага дрэва максімальнай (мінімальнай) вагі.

АЛГАРЫ́ТМ ЭКСПАНЕ́НТАВЫ — непаліномны алгарытм. Большасць А.э. зводзіцца да сутнасці да перабору ўсяго мноства дапушчальных развязкаў або яго значнай часткі.

АЛГАРЫ́ТМ ЭЎРЫСТЫ́ЧНЫ — алгарытм развязання *аптымізацыйнай задачы*, які не мае апрыёрнай ацэнкі якасці атрыманага ім развязку. Распрацоўка А.э. грунтуецца больш на "здаровым сэнсе", чым на тэарэтычным аналізе задачы. Прыкладам А.э. можа служыць большасць *алгарытмаў прагных*.

АЛГАРЫ́ТМАЎ АНА́ЛІЗ — адзін з важных этапаў развязання алгарытмічнай задачы. На гэтым этапе высвятляюцца характарыстыкі рэалізацыі алгарытмаў — часавая і ёмістая складанасці, дакладнасць (калі алгарытм набліжаны), адчувальнасць да памылак акруглення і інш. Мэта А.а. — выбраць у нейкім сэнсе найлепшы з магчымых алгарытмаў. Да правядзення А.а., акрамя цалкам матэматычных метадаў, часта прыцягваецца і вылічальны эксперымент.

АЛГАРЫ́ТМАЎ ТЭО́РЫЯ — галіна матэматыкі, якая вывучае агульныя ўласцівасці *алгарытмаў*. Змястоўныя з'явы, якія прывялі да стварэння паняцця "алгарытм", адбываліся ў матэматыцы на працягу ўсяго часу яе існавання. Але само паняцце вызначана толькі ў 20 ст. і пачаткам А.т. можна лічыць 1936 г., калі А.Чорч надрукаваў першае ўдакладненне паняцця вылічальнай функцыі і пабудаваў першы прыклад невылічальнай функцыі; аналагічны клас функцый пабудавалі К.Гёдэль, С.Кліні і Ж.Эрбран. Першае ўдаклад-

ненне паняцця "алгарытм" зрабілі А.Т'юрынг і Э.Пост у тэрмінах ідэалізаваных вылічальных машын (гл. *Т'юрынга машына*), з дапамогай якіх яны таксама ўдакладнілі паняцце вылічальнай функцыі; выявілася, што ўсе ўдакладненні апісваюць адно і тое ж мноства вылічальных функцый — клас часткова рэкурсіўных функцый. У далейшым А.т. развівалі ў сваіх працах С.Кліні, Э.Пост, А.Маркаў, А.Калмагораў і інш. Важнейшыя раздзелы А.т. — агульныя алгарытмічныя праблемы, тэорыі нумарацый, метрычная тэорыя алгарытмаў, дастасаванне тэорыі алгарытмаў.

АЛГАРЫТМІ́ЧНАЯ ЗВО́ДНАСЦЬ — адно з асноўных паняццяў *алгарытмаў тэорыі* і яе дастасаванняў. Яно ўзнікла з таго, што доказ неразвязальнасці (адпаведна развязальнасці) многіх алгарытмічных праблем даецца не непасрэдна, а пры дапамозе зводнасці да даследаванай праблемы *A* другой праблемы *B*, калі ўжо быў дадзены доказ неразвязальнасці праблемы *A* (адпаведна праблемы *A* да нейкай ужо развязанай праблемы *B*). Напрыклад, няхай функцыя $g(x, y)$ вызначана на мностве натуральных лікаў

$$f(x)=\prod_{y=1}^{x^2}\sum_{z=1}^{y}g(y,z);$$

тады праблема вылічэння функцыі f зводзіцца да праблемы вылічэння функцыі g. Пасля ўдакладнення Т'юрынгам паняцця А.з. на аснове Т'юрынга машыны ўзніклі розныя тыпы зводнасці, а спецыяльны выпадак зводнасці — паліномная зводнасць — выкарыстоўваецца пры даследаванні праблем "пераборнага" тыпу.

АЛГАРЫТМІ́ЧНАЯ МО́ВА — фармальная мова, прызначаная для запісу *алгарытмаў*. Апісанне А.м. задае набор асноўных сімвалаў (алфавіт), сістэму дакладных правілаў будавання тэкстаў (сінтаксіс) і адпаведнасць сінтаксічна дапушчальных тэкстаў мовы аб'ектам і дзеянням, якія апісваюцца (семантыка). Многія мовы праграмавання, што выкарыстоўваюцца пры развязанні задач з дапамогай кампутара, ёсць А.м.

АЛГАРЫТМІ́ЧНАЯ НЕРАЗВЯЗА́ЛЬНАСЦЬ — неразвязальнасць *алгарытмічнай праблемы*, якая азначае адсутнасць алгарытму для яе развязання. Прыклад такой праблемы — праблема пошуку цэлых развязкаў сістэм дыяфантавых раўнанняў з цэлымі каэфіцыентамі (яна вядомая як 10-я праблема Гільбэрта); даказаў яе неразвязальнасць Ю.Маціясевіч у 1970 г.

АЛГАРЫТМІ́ЧНАЯ ПРАБЛЕ́МА — праблема, для якой неабходна знайсці адзін метад (алгарытм) для развязання бясконцай серыі аднатыповых задач. Такія праблемы часам называюць масавымі праблемамі; напрыклад, масавымі праблемамі ёсць складанне двух дзесятковых лікаў, здабыванне квадратовага кораня з натуральнага ліку з зададзенай дакладнасцю і інш. А.п. узнікалі і развязваліся ў розных галінах матэматыкі на працягу ўсёй яе гісторыі, але для некаторых з іх доўгі час не ўдавалася знайсці развязкі. Прычына гэтага высветлілася пасля таго, як у 1930-х гг. было выпрацавана дакладнае азначэнне паняцця "алгарытм". Выявілася, што А.п. могуць быць неразвязальнымі, г.зн. шуканыя ў іх алгарытмы не існуюць. Першая А.п., неразвязальнасць якой даказаў у 1936 г. А.Чорч, — гэта праблема пазнавання тоесна праўдзівых формул логікі прэдыкатаў 1-й ступені. Затым было выяўлена, што неразвязальныя А.п. трапляюцца ў алгебры, тапалогіі, тэорыі лікаў і іншых раздзелах матэматыкі.

АЛГАРЫТМІ́ЧНАЯ ТЭО́РЫЯ МНО́СТВАЎ — раздзел тэорыі *рэкурсіўных функцый*, у якім разглядаюцца падмноствы натуральных лікаў з алгарытмічнага пункту гледжання, а таксама даследуюцца структуры, што ўтвараюцца ў выніку класіфікацыі падмностваў.

АЛГАРЫТМІ́ЧНЫЯ ПРАБЛЕ́МЫ ТЭО́РЫІ ГРУ́ПАЎ — кола праблем, у якіх патрабуецца па заданні групы ўтваральнымі і стасункамі пабудаваць алгарытм, які дазваляе распазнаць, ці мае група (або яе элемент, падгрупа і г.д.) пэўную якасць. Найбольш вядомыя наступныя А.п.т.г.: праблема тоеснасці (вызначыць, ці даюць два дадзеныя словы з мноства ўтваральных групы *G* адзін і той жа элемент групы *G*); праблема ізамарфізму (ці ізаморфныя дзве групы, зададзеныя ўтваральнымі і стасункамі). Абедзве праблемы ў агульным выпадку неразвязальныя. Аднак для пэўных класаў групаў патрэбныя алгарытмы знойдзены, што стымулюе далейшую цікавасць да гэтай тэматыкі.

АЛГАРЫ́ТМУ СКЛАДА́НАСЦЬ — найважнейшая характарыстыка *алгарытму*, якая адлюстроўвае затраты вылічальных рэсурсаў, патрэбных для яго здзяйснення. Асноўная ўвага звычайна аддаецца двум відам рэсурсаў — часу і аб'ёму памяці. Няхай выбрана і зафіксавана мадэль вылічальнай машыны, на якой рэалізуецца алгарытм, і спосаб выяўлення інфармацыі ў памяці гэтай машыны. Размешчаныя ў памяці машыны зыходныя звесткі ўсякай індывідуальнай задачы, якая раз-

вязваецца алгарытмам, называюцца у в а х о д а м задачы (уваходам алгарытму). Памерам уваходу лічыцца колькасць ячэяў памяці, якую займае гэты ўваход.

Напрыклад, калі выкарыстоўваюць двайковае выяўленне цэлых лікаў у машыне, то індывідуальная задача вылічэння дэтэрмінанта цэлалікавай $(n \times n)$- матрыцы $A = (a_{ij})$ будзе мець памер уваходу, роўны ліку $\sum_{i,j=1}^{n}([\log a_{ij}]+1)$. Часавая складанасць алгарытму развязання дадзенай задачы (г.зн. мноства індывідуальных задач) вызначаецца як функцыя, якая ставіць у адпаведнасць кожнаму натуральнаму ліку n час рэалізацыі алгарытму ў горшым выпадку на ўваходах памеру n. Часта часавую складанасць называюць проста складанасцю алгарытму. Падобным чынам вызначаецца ёмістая складанасць як функцыя, якая ставіць у адпаведнасць кожнаму n максімальны лік ячэяў памяці, што выкарыстаны алгарытмам пры рабоце з уваходамі памеру n. Цікавыя, як правіла, паводзіны гэтых функцый з ростам n, наколькі менавіта яны ўрэшце вызначаюць памер задач, якія на практыцы магчыма развязаць з дапамогай дадзенага алгарытму.

АЛГЕБРА — частка матэматыкі, якая ўзнікла ў выніку пошукаў агульных метадаў развязання раўнанняў. У сучасным разуменні А. можа быць вызначаная як навука пра сістэмы аб'ектаў той або іншай прыроды, у якіх зададзены аперацыі, паводле сваіх уласцівасцяў больш-менш падобныя на складанне і множанне лікаў. Такія аперацыі называюцца а л г е б р а і ч н ы м і. А. займаецца класіфікаваннем сістэм з вызначанымі на іх алгебраічнымі аперацыямі па іх уласцівасцях і вывучае розныя задачы, якія натуральна ўзнікаюць у гэтых сістэмах, улучна з задачай развязання і даследавання раўнанняў, якая ў новых сістэмах аб'ектаў атрымлівае новы сэнс (развязаннем раўнання могуць быць вектар, матрыца, аператар, адлюстраванне і г.д.). Уласцівасці аперацый з матэматычнымі аб'ектамі часам аднолькавыя, нягледзячы на розныя аб'екты. Калі абстрагавацца ад прыроды аб'ектаў, але фіксаваць уласцівасці аперацый з імі, то прыходзім да паняцця м н о с т в а, надзеленага алгебраічнай структурай, або *універсальнай алгебры*. Спачатку пачалі вывучаць такія універсальныя алгебры, як *групы, вектарныя прасторы, асацыятыўныя кольцы* і *асацыятыўныя алгебры, модулі* і інш., потым неасацыятыўныя кольцы і алгебры, *краты, паўгрупы* і г.д. Развіваюцца таксама галіны, якія вывучаюць асобныя тыпы універсальных алгебраў з дадатковымі структурамі. Такім чынам узнікла *тапалагічная алгебра*, тэорыя групаў Лі (г.зн. групаў са структурай дыферэнцыяльнай мнагастайнасці), тэорыі разнастайных упарадкаваных сістэм. Тэорыя палёў, якая ўзнікла з *алгебраічнай тэорыі лікаў*, і вывучэнне асацыятыўных камутатыўных колцаў далучаюцца да *камутатыўнай алгебры*, якая ў сваю чаргу з'яўляецца асновай алгебраічнай геаметрыі. Алгебраічныя метады далі моцны штуршок развіццю тапалогіі, у якой узнікла спецыяльная галіна — *агебраічная тапалогія*. На стыку гэтых дзвюх навук з'явілася *гамалагічная алгебра*. З ідэямі гамалагічнай алгебры цесна звязаная тэорыя *катэгорый*, якая дае новую мову для апісання паняццяў не толькі А., але практычна ўсіх галін матэматыкі. А. адыгрывае фундаментальную ролю не толькі ў самой матэматыцы, яна мае таксама і вялікае дастасоўнае значэнне, напрыклад, у фізіцы, кібернетыцы, тэорыі кадавання, матэматычнай эканоміцы і г.д.

У Беларусі актыўныя даследаванні ў галіне А. пачалі акад. Дз.Супруненка і яго вучні: акад. У.Платонаў, чл.-кар. А.Залескі, Р.Тышкевіч, У.Конюх. Крыху пазней узнікла школа тэорыі конечных групаў, якую ўзначальваў акад. С.Чуніхін. Зараз гэтыя даследаванні вядуцца ў гомельскай школе (чл.-кар. А.Шамяткоў, А.Раманоўскі, С.Скіба, В.Манахаў, М.Селькін, С. Русакоў, М.Вараб'ёў, С.Каморнікаў, Э.Пальчык). Даследаванні акад. У.Платонава і яго вучняў (В.Янчэўскі, А.Мельнікаў, А.Рапінчук, У.Чарнавусаў, А.Таўгень, В.Беняш-Крывец) прывялі да развіцця ў Беларусі такіх важных галін сучаснай А., як арыфметычная і структурная тэорыя алгебраічных групаў, алгебраічная K-тэорыя, арыфметычная алгебраічная геаметрыя, тэорыя праконечных групаў, тэорыя простых цэнтральных алгебраў і г.д. Працягам і развіццём даследаванняў Дз.Супруненкі па лінейных групах сталі даследаванні А.Залескага, І.Супруненкі, А.Баранава па тэорыі выяўленняў лінейных алгебраічных і конечных групаў, тэорыі алгебраў Лі і групавых алгебрах. Кірунак, што знаходзіцца на мяжы А. і алгебраічнай геаметрыі, актыўна развіваецца і яго вучнямі.

АЛГЕБРА З ІНВАЛЮЦЫЯЙ — пара (A, σ), дзе A — кольца, $\sigma: A \to A$ — антыізамарфізм A, г.зн.

$$\sigma(x+y) = \sigma(x) + \sigma(y),$$
$$\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y) \text{ і } \sigma^2(x) = x$$

для ўсіх $x, y \in A$, дзе σ — *інвалюцыя* колца A. Колца A ёсць алгебра над сваім цэнтрам, вобраз цэнтра пры інвалюцыі ёсць цэнтр, інвалюцыя σ — біектыўнае адлюстраванне. Калі A — некамутатыўная алгебра, σ не можа быць тоесным адлюстраваннем. Калі A — простая алгебра, то абмежаванне інвалюцыі на цэнтр або тоеснае, або мае аўтамарфізм другога парадку. У першым выпадку інвалюцыя называецца інвалюцыяй першага роду, у другім — другога роду.

АЛГЕБРА ЛО́ГІКІ — раздзел матэматычнай логікі, які вывучае логікавыя аперацыі з выказваннямі. Заснавальнік А.л. — Дж.Буль. У А.л. цікавяцца толькі праўдзівасцю і непраўдзівасцю выказванняў. Праўдзівасць выказванняў у А.л. звычайна пазначаюць лічбай 1, а непраўдзівасць — лічбай 0. Логікавыя аперацыі з выказваннямі дазваляюць стварыць новыя выказванні. Праўдзівасць выказвання $A(a_1,...,a_n)$, атрыманага з дапамогай логікавых аперацый з простых выказванняў $a_1,...,a_n$, адназначна выяўляецца праўдзівасцю зыходных выказванняў $a_1,...,a_n$. З гэтай прычыны кожнаму такому выказванню $A(a_1,...,a_n)$ адпавядае n-месцавая функцыя, што прымае значэнні 0,1 і аргументы якой таксама набываюць значэнні 0,1. Такія функцыі называюцца л о г і к а в ы м і (булевымі) функцыямі або функцыямі А.л. Яны могуць быць зададзеныя з дапамогай табліц праўдзівасці, якія маюць 2^n радкоў. Напрыклад, логікавым аперацыям кан'юнкцыі, дыз'юнкцыі, адмаўлення, імплікацыі, эквіваленцыі адпавядаюць логікавыя (булевы) функцыі, якія звычайна абазначаюць адпаведна сімваламі $\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ (замест $\neg x$ часам пішуць $\bar{x}$) і якія могуць быць зададзеныя з дапамогай табліц праўдзівасці:

x	y	$\bar{x}$	$x \wedge y$	$x \vee y$	$x \Rightarrow y$	$x \Leftrightarrow y$
0	0	1	0	0	1	1
0	1		0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1		1	1	1	1

Акрамя таблічнага спосабу задання функцый А.л. ужываецца і заданне функцый з дапамогай формул у мове, якая змяшчае зменныя $x, y, z, ...$ (магчыма, з індэксамі) і сімвалы нейкіх канкрэтных функцый. Найбольш ужывальная мова, якая мае логікавыя сімвалы $\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow$. Формулы гэтай мовы: 1) усе зменныя з'яўляюцца формуламі і называюцца простымі або элементарнымі; 2) калі A і B — формулы, то $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(\neg A)$, $(A \Rightarrow B)$, $(A \Leftrightarrow B)$ — формулы. Кожнай формуле гэтай мовы адпавядае пэўная функцыя А.л. (зрэшты, кожная такая формула вызначае і нейкае "складанае" выказванне). Няхай $x_1,...,x_n$ — пэўны фіксаваны спіс зменных. Кожнай формуле $A(x_1,...,x_n)$, зменныя якой належаць гэтаму спісу, адпавядае n-месцавая функцыя $f(x_1,...,x_n)$, што вызначаецца наступным чынам: значэнне гэтай функцыі (0 або 1) пры зададзеных значэннях зменных (0 або 1) знаходзіцца адпаведна з аперацыямі, пры дапамозе якіх пабудаваная формула $A(x_1,...,x_n)$. Кажуць, што формула A рэалізуе функцыю. Формулы A, B называюцца роўнымі (раўназначнымі), калі адпаведныя ім функцыі роўныя, г.зн. калі супадаюць іх табліцы праўдзівасці. Роўнасць формулаў пазначаюць $A = B$ (ці $A \equiv B$, $A \sim B$), калі кажуць пра іх раўназначнасць.

Важную ролю ў А.л. маюць роўнасці:

1. $\bar{\bar{x}} = x$ — закон падвойнага адмаўлення;

2. $x \wedge y = y \wedge x$
3. $x \vee y = y \vee x$ } — законы камутатыўнасці;

4. $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$
5. $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ } — законы асацыятыўнасці;

6. $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
7. $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ } — законы дыстрыбутыўнасці;

8. $\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$
9. $\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$ } — законы дэ Моргана;

10. $x \wedge x = x$
11. $x \vee x = x$ } — законы ідэмпатэнтнасці;

12. $x \wedge (y \vee \bar{y}) = x$;

13. $x \vee (y \wedge \bar{y}) = x$;

14. $x \sim y = (x \Leftrightarrow y) \wedge (y \Leftrightarrow x)$;

15. $x \Rightarrow y = \bar{x} \vee y$.

Кожная булева функцыя можа быць рэалізаваная пэўнай формулай мовы з логікавымі сімваламі $\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow$. Асаблівае значэнне ў А.л. маюць гэтак званыя дыз'юнктыўныя і кан'юнктыўныя нармальныя формы, для якіх характэрныя шырокія дастасаванні. Сістэма функцый Ф А.л. называецца функцыйна поўнай, калі ўсякая функцыя А.л. можа быць рэалізаваная формулай, якая мае толькі сімвалы функцый з Ф. Напрыклад, сістэмы функцый $\{\wedge, \vee, \neg\}$, $\{\wedge, \neg\}$, $\{\vee, \neg\}$, $\{\Rightarrow, \neg\}$, $\{x \vee y\}$ $\{x \wedge y\}$ функцыйна поўныя.

АЛГЕБРА МНОСТВАЎ — непустая сукупнасць падмностваў нейкага мноства Ω, замкнёная ў дачыненні да концай колькасці тэарэтычна-мноствавых аперацый (*аб'яднання, перасячэння мностваў, дапаўнення*). Для таго каб клас падмностваў мноства Ω быў А.м., дастаткова (і неабходна), каб ён быў замкнёны ў дачыненні да ўтварэння аб'яднанняў і дапаўненняў. А.м., замкнёная ў дачыненні да ўтварэння злічальных аб'яднанняў, называецца σ-алгебрай мностваў (σ-А.м.). Усякая σ-А.м. замкнёная ў дачыненні да злічальнай колькасці тэарэтычна-мноствавых аперацый. Напрыклад, сукупнасць концых падмностваў адвольнага мноства Ω і дапаўненняў да іх ёсць А.м.; сукупнасць не больш як злічальных падмностваў і дапаўненняў да іх ёсць σ-А.м.

АЛГЕБРАІЧНА ЗАМКНЁНАЕ ПОЛЕ — *поле K*, у якім кожны паліном ненулявой ступені над *K* мае хоць адзін корань. З алгебраічнай замкнёнасці поля вынікае, што кожны паліном ступені *n* над *K* мае дакладна *n* каранёў, калі кожны корань лічыць столькі разоў, якая яго кратнасць, г.зн. кожны непрыводны паліном з кольца паліномаў *K* [*x*] мае ступень 1. Поле *K* алгебраічна замкнёнае, калі і толькі калі яно не мае ўласнага алгебраічнага пашырэння. Існуе адзінае з дакладнасцю да ізамарфізму алгебраічнае пашырэнне адвольнага поля *F*, якое з'яўляецца А.з.п.; яно называецца а л г е б р а і ч н ы м з а м ы к а н н е м п о л я *F* і звычайна пазначаецца $\overline{F}$. Кожнае алгебраічна замкнёнае пашырэнне поля *F* мае ў сабе падполе, ізаморфнае $\overline{F}$. Алгебраічным замыканнем поля рэчаісных лікаў ёсць поле камплексных лікаў. Яго алгебраічная замкнёнасць сцвярджаецца *алгебры асноўнай тэарэмай.*

АЛГЕБРАІЧНАЕ ПАШЫРЭННЕ п о л я *K* — пашырэнне поля *K*, кожны элемент якога над *K*, г.зн. з'яўляецца коранем нейкага раўнання $f = 0$, дзе f — паліном з каэфіцыентамі з *K* (яго можна лічыць непрыводным). Ступень непрыводнага паліінома, корань якога α, называецца ступенню алгебраічнага элемента α над *K*. Калі *n* — ступень элемента над *K*, то пашырэнне $K(\alpha)/K$ мае ступень *n*, і кожны элемент з *K*(α) можна запісаць як *g* (α), дзе *g* — паліном ступені $\le n-1$, каэфіцыенты якога з *K*. Кожнае концае пашырэнне аўтаматычна з'яўляецца алгебраічным (адваротнае неабавязкова). Калі поле *F* алгебраічнае над *Z*, а *Z* алгебраічнае над *K*, то *F* алгебраічнае над *K*. Поле, над якім не існуе нетрывіяльных А.п., — алгебраічна замкнёнае. Вывучэннем А.п. (пераважна концых) поля рацыянальных лікаў *Q* займаецца алгебраічная тэорыя лікаў. А.п. поля рацыянальных лікаў *Q* называюцца п а л я м і а л г е б р а і ч н ы х л і к а ў. Важнае месца ў тэорыі лікаў займаюць таксама палі алгебраічных функцый (г.зн. концыя пашырэнні поля рацыянальных функцый з концым полем канстантаў). Адвольнае пашырэнне поля можна здзейсніць за два этапы: спачатку зрабіць цалкам трансцэндэнтнае пашырэнне (пры гэтым атрымаецца поле рацыянальных функцый, не абавязкова ад концай колькасці зменных), а потым алгебраічнае.

АЛГЕБРАІЧНАЕ РАЎНАННЕ — раўнанне выгляду $f_n = 0$, дзе f_n — мнагасклад ступені *n* ад адной ці некалькіх зменных. А.р. з адным невядомым мае выгляд $P_n(x) = 0$, дзе $P_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$, *n* — цэлы дадатны лік, каэфіцыенты $a_n, ..., a_0$ узятыя з пэўнага поля *P*, *x* — невядомая велічыня. Калі $a_n \ne 0$, то *n* называецца с т у п е н н ю А.р. Лік *c* называецца к о р а н е м А.р. і мнагаскладу $P_n(x)$, калі $P_n(c) = 0$. У гэтым выпадку паводле *Бэзу тэарэмы* мнагасклад $P_n(x)$ дзеліцца на $x - c$. Лік *c* называецца *k*-к р а т н ы м к о р а н е м м н а г а с к л а д у $P_n(x)$ (*k* — цэлы дадатны лік), калі $P_n(x)$ дзеліцца на $(x-c)^k$, але не дзеліцца на $(x-c)^{k+1}$. Кожны мнагасклад $P_n(x)$ ступені *n* над полем *P* мае ў гэтым полі не больш за *n* каранёў з улікам іх кратнасці. Карані мнагаскладу звязаны з яго каэфіцыентамі формуламі Віета (гл. *Віета тэарэма*).

АЛГЕБРАІЧНАЯ АДЗІНКА — цэлы алгебраічны лік α, які з'яўляецца дзельнікам ліку 1 у кольцы цэлых алгебраічных лікаў (г.зн. знойдзецца такі цэлы алгебраічны лік β, што αβ = 1). Увогуле ў палях алгебраічных лікаў можа быць бясконца многа алгебраічных адзінак (у полі рацыянальных лікаў іх існуе толькі дзве: +1 і −1). А.а. ствараюць групу ў дачыненні да звычайнага множання. Норма А.а. над **Q** абавязкова роўная ±1. Структуру гэтай групы выяўляе т э а р э м а Д ы р ы х л е: у групе адзінак існуе такая концая сістэма ўтваральных элементаў $\eta_1, ..., \eta_n$, што адвольную адзінку групы можна запісаць у выглядзе здабытку $\eta_1^{n_1}, ..., \eta_r^{n_r}$, дзе $n_1, ..., n_r$ — цэлыя лікі. Група А.а. квадратовых пашырэнняў *Q* цесна звязаная з дыяфантавымі раўнаннямі $x^2 - Dy^2 = 1$ (р а ў н а н н е П э л я). Менавіта няхай $D > 1$ — цэлы рацыянальны лік, адрозны ад поўнага квадрата, і няхай, напрыклад, $D \not\equiv 1 \pmod 4$. Тады кожны развязак $(x_0; y_0)$ гэтага раўнання задае А.а. $x_0 + y_0\sqrt{D}$ поля

$Q(\sqrt{D})$ і наадварот. Таму група А.а. поля $Q(\sqrt{D})$ называецца групай адзінак Пэля.

АЛГЕБРАІЧНАЯ АПЕРАЦЫЯ на мностве A — адлюстраванне ω: $A \xrightarrow{n} A$, дзе n — цэлы неадмоўны лік, $A^n = A \times ... \times A$ — n-я дэкартава ступень мноства A, г.зн. мноства ўсіх упарадкаваных паслядоўнасцяў $(a_1,...,a_n)$, дзе $a_i \in A$ для $i = 1, 2, ..., n$. Лік n называецца арнасцю аперацыі ω. Такім чынам, n-арная алгебраічная аперацыя ω кожнай упарадкаванай паслядоўнасці даўжыні n элементаў мноства A ставіць у адпаведнасць адназначна вызначаны элемент мноства A, які назначаецца $\omega(a_1,a_2,...,a_n)$ або $(a_1,a_2,...,a_n)\omega$. Нуль-арная аперацыя — гэта фіксаваны элемент мноства (ён часта называецца нулём). Пры $n = 1$ аперацыя называецца унарнай, пры $n = 2$ — бінарнай. Прыкладамі бінарных А.а. будуць складанне, множанне, адыманне цэлых (рацыянальных, рэчаісных, камплексных) лікаў, унарных — пошук процілеглага элемента на гэтых лікавых мноствах, пошук адваротнага элемента на мностве ненулявых рацыянальных (ненулявых рэчаісных, ненулявых камплексных) лікаў. Пошук адваротнага элемента і дзяленне на мностве рацыянальных лікаў не ёсць А.а., паколькі для нуля няма адваротнага і на нуль дзяліць нельга.

АЛГЕБРАІЧНАЯ ГЕАМЕТРЫЯ — галіна матэматыкі, якая вывучае алгебраічныя аб'екты, звязаныя з алгебраічнымі раўнаннямі: *алгебраічныя мнагастайнасці* (алгебраічныя крывыя, алгебраічныя паверхні, абэлевы мнагастайнасці і інш.) і розныя абагульненні (схемы, алгебраічныя прасторы). А.г. узнікла ў 18 ст., калі ў *геаметрыю* было ўведзенае паняцце *каардынат*, якое дало магчымасць разглядаць геаметрычныя месцы пунктаў у афіннай прасторы, каардынаты якіх задавальняюць алгебраічныя станоўкі над полем **C** ці над іншым алгебраічна замкнёным полем. Атрыманае падмноства афіннай прасторы $\mathbf{A}^n$ называецца афіннай алгебраічнай мнагастайнасцю (ААМ). Ідэя далучэння "бясконца аддаленых пунктаў" вядзе да пераходу ад $\mathbf{A}^n$ да праектыўнай прасторы $\mathbf{P}^n$ і ўзнікнення паняцця праектыўнай алгебраічнай мнагастайнасці (ПАМ), якая ёсць мноства агульных нулёў сістэмы аднародных алгебраічных раўнанняў ад $n + 1$ зменнай.

ПАМ называецца непрыводнай, калі яна не можа быць пададзена ў выглядзе аб'яднання дзвюх ПАМ, што не супадаюць з ёй, і якія маюць назоў непрыводных кампанентаў. З кожнай ПАМ можна звязаць ідэал у кольцы мнагаскладаў ад $n+1$ зменнай, які створаны концай колькасцю аднародных паліномаў ад $n + 1$ зменнай і які складаецца з усіх мнагаскладаў, што маюць значэнне 0 на V. Калі ідэал ПАМ галоўны, ПАМ называецца гіперпаверхняй у $\mathbf{P}^n$ і задаецца адным раўнаннем $F(x_0,...,x) = 0$. Важны інварыянт x — яе памернасць dim$x$, якая вызначаецца для непрыводнай x як найбольшы цэлы лік $m \geq 0$, для якога існуе ланцужок непрыводных ПАМ $Y = Y_0 \supset Y_1 \supset ... \supset Y_m$, $Y_i \neq Y_{i+1}$. Памернасць прыводнай ПАМ ёсць максімум з памернасцяў яе кампанентаў. ПАМ памернасцяў 1 і 2 называюцца алгебраічнымі крывымі і паверхнямі адпаведна. Кожнай афіннай мнагастайнасці $V \subset \mathbf{A}^n$ адпавядае кольца рэгулярных функцый $K[V]$, атрыманае абмежаваннем мнагаскладаў з $K[x_1,...,x_n]$ на V. Яго поле дзеляў $K(V)$ — поле рацыянальных функцый на V. ААМ, якія маюць ізаморфныя кольцы рэгулярных функцый (палі рацыянальных функцый), называюцца ізаморфнымі (адпаведна біарацыянальна ізаморфнымі). Паняцці кольцаў рэгулярных функцый, палёў рацыянальных функцый, ізамарфізму і біарацыянальнага ізамарфізму ўводзяцца для ПАМ. А.г. вывучае алгебраічныя мнагастайнасці з дакладнасцю да іх ізамарфізму.

Даследаванні ў А.г. у Беларусі былі распачатыя У.Платонавым у межах тэорыі лінейных алгебраічных групаў. Вынікам гэтага стала фармаванне новых матэматычных кірункаў у Беларусі: структурнай тэорыі лінейных алгебраічных групаў (У.Платонаў, В.Янчэўскі), арыфметычнай тэорыі лінейных алгебраічных групаў (У.Платонаў, А.Рапінчук, У.Чарнавусаў, А.Бандарэнка), алгебраічнай k-тэорыі простых алгебраў (І.Вареновіч, В.Янчэўскі), даследаванняў па спецыяльных алгебраічных мнагастайнасцях (В.Беняш-Крывец, А.Рапінчук, У.Чарнавусаў), арыфметычнай алгебраічнай геаметрыі (школа В.Янчэўскага).

АЛГЕБРАІЧНАЯ ГРУПА — група G, якая адначасова і *алгебраічная мнагастайнасць*. Пры гэтым множанне $G \times G \to G$ і пераход да адваротнага элемента $G \to G$ ёсць марфізмы алгебраічных мнагастайнасцяў. Існуюць два асноўныя тыпы А.г. — *абэлевы мнагастайнасці* і *лінейныя алгебраічныя групы* (падгрупы нейкай поўнай лінейнай групы). Адна з грунтоўных тэарэм алгебры сцвярджае, што ў адвольнай А.г. існуе адзіная нармальная лінейная алгебраічная падгрупа, фактар-група па якой ёсць абэлева мнагастайнасць. Прыклад А.г. — поўная лінейная група, група трохвугольных матрыц, эліптычная крывая і інш.

АЛГЕБРАІЧНАЯ КРЫВА́Я — *алгебраічная мнагастайнасць* памернасці 1. Плоская рэчаісная А.к. — мноства пунктаў рэчаіснай афіннай плоскасці, каардынаты якой праўдзяць раўнанне $f(x,y)=0$, дзе $f(x,y)$ — мнагасклад ступені n. Калі мнагасклад раскладаецца на множнікі, то раўнанню будзе адпавядаць сукупнасць крывых (прыводныя А.к.). У пэўных пунктах да А.к. можна правесці больш за адну датычную. Такія пункты асаблівыя, лік каранёў раўнання датычнай — кратнасць пункта. Для А.к. маюць значэнні паняцці парадку, класа і роду. П а р а д а к А. к. — парадак раўнання, якое яе вызначае, не залежыць ад сістэмы каардынат. А.к. парадку n можа быць вызначаная $\frac{n(n+3)}{2}$ пунктамі. К л а с А. к. — яе парадак у дачыненні да *тангенцыйных каардынат* (таксама можа быць азначаны колькасцю датычных, рэчаісных і ўяўных, якія можна правесці да крывой з адвольнага пункта па-за крывой). Р о д А. к. — цэлы неадмоўны лік, роўны рознасці паміж найбольшай колькасцю падвойных пунктаў, якія можа мець А.к., і іх фактычнай колькасцю. Зроблена класіфікацыя крывых да 6-га парадку ўлучна, для $n > 6$ класіфікацыі не існуе (2001). Развіццё алгебраічнай геаметрыі спрычынілася да вывучэння камплексных А.к.

АЛГЕБРАІЧНАЯ МНАГАСТА́ЙНАСЦЬ — *тапалагічная прастора X*, атрыманая "склейкай" *афінных алгебраічных мнагастайнасцяў* у тым сэнсе, што $X=\bigcup_i X_i$, дзе X_i — адкрытыя падмноствы X, гамеаморфныя афінным алгебраічным мнагастайнасцям (з тапалогіяй Зарыскага). Напрыклад, для праектыўнай прасторы $P_n(K)$ праўдзіцца $P_n(K)=\bigcup_{i=0}^{n} X_i$, дзе $X_i = \{(X_0,...,X_n)\in \in P_n(K) / X_i \neq 0\}$ — гамеаморфныя афіннай прасторы R^n, што задае на $P_n(K)$ структуру А.м. Апошнім часам паняцце А.м. атрымала далёкія абагульненні, якія дазволілі ўвесці геаметрычную мову ў тэорыю камутатыўных колцаў і алгебраў.

АЛГЕБРАІЧНАЯ ПАВЕ́РХНЯ — *алгебраічная мнагастайнасць* памернасці 2. У адрозненне ад алгебраічных крывых яны маюць значны шэраг цэлалікавых інварыянтаў. Таму добра даследаваны толькі спецыяльныя тыпы паверхняў.

АЛГЕБРАІЧНАЯ ПАДГРУ́ПА — падгрупа H *алгебраічнай групы G*, калі яна сама з'яўляецца падмнагастайнасцю *алгебраічнай мнагастайнасці G*.

АЛГЕБРАІЧНАЯ СІСТЭ́МА — мноства з вызначанымі на ім алгебраічнымі аперацыямі і дачыненнямі. А.с. ёсць аб'ект $A = < A,\Omega,R >$, дзе A — непустое мноства, Ω — сям'я алгебраічных аперацый, R — сям'я дачыненняў, вызначаных на мностве A. Мноства A называецца н о с ь б і т а м, або асноўным мноствам, А.с. A, а яго элементы — э л е м е н т а м і с і с т э м ы. Магутнасць $|A|$ мноства A называецца м а г у т н а с ц ю або п а р а д к а м сістэмы A. А.с. A называецца концай, калі мноства A концае, і концага тыпу, калі сігнатура $\Omega \bigcup R$ мноства A концая. У адрозненне ад іншых аперацый і дачыненняў, якія могуць быць вызначаныя на A, аперацыі з Ω і дачыненні з R называюцца г а л о ў н ы м і, або а с н о ў н ы м і. А.с. называецца у н і в е р с а л ь н а й а л г е б р а й (часам проста алгебрай), калі мноства яе дачыненняў R пустое, і рэляцыйнай сістэмай, або мадэллю, калі мноства алгебраічных аперацый Ω пустое. Класічныя прыклады А.с. — групы, кольцы, лінейныя прасторы, лінейныя алгебры (лінейныя прасторы і лінейныя алгебры над бясконцымі палямі — А.с. бясконцага тыпу), лінейна ўпарадкаваныя мноствы, лінейна ўпарадкаваныя групы, структуры.

АЛГЕБРАІЧНАЯ ТАПАЛО́ГІЯ — раздзел матэматыкі, у якім вывучаюцца ўласцівасці геаметрычных фігур, нязменных пры непарыўных дэфармацыях (*гаматопіях*). Галоўная мэта А.т. — поўны пералік такіх уласцівасцяў. Найбольш грунтоўнымі аб'ектамі вывучэння з'яўляюцца комплексы (мнагаграннікі, паліэдры), мнагастайнасці (замкнёная, адкрытая, аналітычная і г.д.). Асноўныя тыпы адлюстраванняў у А.т. — адвольныя, непарыўныя, кавалкава-лінейныя, гладкія.

АЛГЕБРАІЧНАЯ ТЭО́РЫЯ ЛІ́КАЎ — галіна тэорыі лікаў, асноўная задача якой ёсць вывучэнне ўласцівасцяў цэлых лікаў у полі *алгебраічных лікаў*. Цэлыя алгебраічныя лікі маюць шэраг уласцівасцяў, адрозных ад уласцівасцяў цэлых рацыянальных лікаў.

Першае парушэнне аналогіі мае дачыненне да адзінак. А д з і н к а й называецца цэлы алгебраічны лік α, для якога ў колцы цэлых алгебраічных лікаў існуе зваротны лік β такі, што $\alpha\beta = 1$. Тым часам калі поле рацыянальных лікаў мае толькі дзве адзінкі — -1 і $+1$, у агульных палях алгебраічных лікаў можа быць бясконцая колькасць адзінак. Адзінкі ствараюць *алгебраічную групу* на множанні. Будову групы адзінак поля высветліў П.Дырыхле. Другое парушэнне аналогіі пры пераходзе ад Q да поля алгебраічных лікаў звязанае

са стратай адназначнасці раскладаў цэлых рацыянальных лікаў на простыя множнікі. Напрыклад, у полі $\mathbf{Q}$ $(\sqrt{-5})$ праўдзяцца расклады $6 = 2 \cdot 3 = (1-\sqrt{-5}) \cdot (1+\sqrt{-5})$. Трэцяе парушэнне аналогіі даюць простыя лікі. Пры пашырэнні поля яны перастаюць быць простымі. Праблему неадназначнага раскладу цэлых лікаў у алгебраічных палях развязаў Э.Кумер. Ён прапанаваў увесці ідэальныя лікі, з дапамогай якіх адназначнасць раскладу аднаўляецца з дакладнасцю да множніка, які з'яўляецца адзінкай. Паняцце ідэальнага ліку заменена эквівалентным паняццем *ідэалу*. Пытанне пра расклад простых лікаў пры пераходзе да палёў алгебраічных лікаў перафармулёўваецца на мове простых ідэалаў, што прывяло да ўзнікнення тэорыі палёў класаў — цэнтральнай часткі сучаснай А.т.л. Першае развязанне гэтага пытання таксама належыць Э.Кумеру. Іншыя пытанні закранаюць агульную структуру палёў алгебраічных лікаў. У прыватнасці, задачу, колькі падпалёў змяшчае поле K і як яны пабудаваныя, развязаў Э.Галуа. Конечнасць колькасці падпалёў пашырэння K ступені n над $\mathbf{Q}$ вынікае з існавання біектыўнай адпаведнасці паміж усімі падпалямі K і ўсімі падгрупамі яго групы Галуа.

АЛГЕБРАІ́ЧНАЯ ФУ́НКЦЫЯ — функцыя $y = (x_1,...,x_n)$ ад n зменных, якая задавальняе алгебраічнае раўнанне $P(y,x_1,...,x_n) = 0$, дзе P — *непрывадны мнагасклад* ад $(y,x_1,...,x_n)$. Калі P запісаць у выглядзе

$$P_k(x_1,...,x_n)y^k + P_{k-1}(x_1,...,x_n)y^{k-d} + P_0(x_1,...,x_n),$$

дзе $P_k(x_1,...,x_n),...,P_0(x_1,...,x_n)$ — мнагасклады ад $x_1,...,x_n$, то пры ўмове $P_k(x_1,...,x_n) \neq 0$ лік k з'яўляецца ступенню А.ф. Пры $k = 0$ А.ф. — рацыянальная функцыя, якую можна запісаць у выглядзе

$$y = -\frac{P_0(x_1,...,x_n)}{P_1(x_1,...,x_n)}.$$

Тэорыя А.ф. мае сувязі з тэорыяй аналітычных функцый, *аналітычнай тэорыяй лікаў*, *алгебрай* і *геаметрыяй*.

АЛГЕБРАІ́ЧНЫ ВЫ́РАЗ — выраз, утвораны конечнай колькасцю літар і лікаў, злучаных знакамі складання, адымання, множання, дзялення, падвышэння да цэлай ступені і здабывання кораня (паказнікі ступені і кораня павінны быць сталымі лікамі). А.в. называецца р а ц ы я н а л ь н ы м у дачыненні да пэўных літар, што ўваходзяць у яго, калі выраз не змяшчае іх пад знакам кораня, называецца ц э л ы м — калі не змяшчае дзялен на выраз з гэтымі літарамі. Напрыклад, выр $\frac{5a}{7} + \frac{bc\sqrt{3}}{6a+b}$ — рацыянальны ў дачыненні да a, c, а выраз $\frac{5a}{c} + bc^2 - \frac{5ac}{7}$ — цэлы ў дачыненні д і b. Калі нейкія (або ўсе) літары А.в. зменныя, ён з'яўляецца алгебраічнай функцыяй.

АЛГЕБРАІ́ЧНЫ ЛІК — камплексны (у пр ватнасці, рэчаісны) лік, які з'яўляецца карані мнагаскладу $P_n(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ з рацы нальнымі каэфіцыентамі, дзе не ўсе a_i роўныя і лю. Для кожнага А.л. α існуе адзіны мнагаскл $P_n(x)$ найменшай ступені n, у якога $a_n = 1$ і $P(\alpha) = 0$. Паказнік n мнагаскладу — с т у п е н ь л і астатнія карані $P(x)$ — л і к і, с п а л у ч а н і з α. Поле А.л. алгебраічна замкнёнае, г.зн. кара мнагаскладу з А.л. таксама ёсць А.л.

АЛГЕ́БРЫ АСНО́ЎНАЯ ТЭАРЭ́МА — т рэма, якая сцвярджае, што кожны палiном ад ной зменнай з камплекснымі каэфіцыентамі м корань у полі камплексных лікаў. А.а.т. выказа ўпершыню А.Жырарам (1629) і Р.Дэкартам (16 у фармулёўцы, адрознай ад сучаснай. К.Ма лёрын і Л.Ойлер (1743) удакладнілі фармулёў А.а.т. надаўшы ёй форму, эквівалентную суча най: кожны паліном з рэчаіснымі каэфіцыента можна раскласці ў здабытак лінейных і квадра вых множнікаў з рэчаіснымі каэфіцыентаі У другой палове 18 ст. з'яўляюцца доказы П.Л ляса, Ж.Лягранжа і інш. Ва ўсіх гэтых доказ папярэдне дапускаецца, што нейкія "ідэальны карані паліному існуюць, а затым даказваеці што хоць бы адзін з іх — камплексны лік. К.Га (1799) першы даказаў А.а.т. без дапушчэння, ш карані існуюць. Адзін з яго доказаў грунтуецца будаванні поля раскладу палінома.

АЛГО́Л, а л г о л 60 (Algol; ад англ. algorithmic алгарытмічны + language — мова) — *праграм вання мова* для апісання алгарытмаў развязан на кампутарах задач вылічальнай матэматыкі таксама для друку алгарытмаў.

АЛФАВІ́Т (ад назваў першых дзвюх літ грэц. А. "альфа" і "бэта") — спіс (конечнае мноств сімвалаў (літар), неабходных для развіцця той іншай сімволікі (або, як часам кажуць, мовы). Д двух А. A і B натуральным чынам вызначаюц іх *аб'яднанне* $A \cup B$, перасячэнне $A \cap B$ і *рознас* $A \setminus B$, а таксама дачыненне ў л у ч э н н я $A \subset B$. мэтах зручнасці часам разглядаюць пусты A

г.зн. А., які не змяшчае ніводнай літары. А. натуральнай мовы (да прыкладу, беларускай) — упарадкаваная сукупнасць літар, што выкарыстоўваюцца ў дадзенай мове; А. станаў *аўтамата* — набор станаў, у якіх аўтамат можа знаходзіцца ў кожны дыскрэтны момант часу.

АЛЬТЭРНАТЫВА (франц. alternative ад лац. alter — адзін з двух) у т э о р ы і г у л ь н я ў — адна з пазіцый, у якую, згодна з правіламі гульні, можна перайсці з дадзенай пазіцыі за адзін ход. А. называецца таксама адпаведны ход ці нададзены яму індэкс.

АЛЬТЭРНАТЫЎНАЕ КОЛЬЦА — кольца, у якім усякія два элементы ўтвараюць *асацыятыўнае кольца*. Мноства ўсіх А.к. задаецца сістэмай тоеснасцяў: $|xy|y = x|yy|$ — п р а в а я а л ь т э р н а т ы ў н а с ц ь; $|xx|y = x|xy|$ — л е в а я а л ь т э р н а т ы ў н а с ц ь. Усе А.к. утвараюць мнагастайнасць. Тэрмін А.к. апраўданы тым, што ў кожным такім кольцы асацыятар $|x, y, z| = |xy|z - x|yz|$ — косасіметрычная (альтэрнатыўная) функцыя сваіх аргументаў. Першы прыклад А.к. — кольца лікаў Кэлі, ці *вікперкамплексных лікаў* (элементаў 8-мернай алгебры над полем рэчаісных лікаў — алгебры Кэлі). Кожнае простае А.к. або асацыятыўнае, або з'яўляецца алгебрай Кэлі над сваім цэнтрам.

АМАЛЬ ПЕРЫЯДЫЧНАЯ ФУНКЦЫЯ — функцыя, якая з адвольнай дакладнасцю прымае прыблізна тыя ж значэнні пры складанні аргумента са спецыяльнымі канстантамі. Больш дакладна: непарыўная функцыя $f(x)$, вызначаная для ўсіх рэчаісных лікаў x, называецца амаль перыядычнай, калі для кожнага $\varepsilon > 0$ можна знайсці такі лік $T = T(\varepsilon)$, што ў кожным інтэрвале даўжыні T існуе адзін лік $t = t(\varepsilon)$, для якога пры кожным x праўдзіцца няроўнасць $|f(x + t) - f(x)| < \varepsilon$. Лікі t называюцца а м а л ь п е р ы я д а м і функцыі $f(x)$. Прыклад А.п.ф. — функцыі выгляду $\sin x + \sin dx$ пры ірацыянальным d. Асноўныя ўласцівасці А.п.ф.: функцыя абмежаваная і раўнамерна непарыўная на R; сума і здабытак А.п.ф. ёсць таксама А.п.ф.; для кожнага $\varepsilon > 0$ можна знайсці такі канцы трыганаметрычны мнагасклад $P(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k e^{-i\lambda_k x}$ з рэчаіснымі λ_k, што для ўсіх x праўдзіцца няроўнасць $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$.

АМАЛЬ СКРОЗЬ — матэматычны выраз (у дачыненні да меры μ), які паказвае, што гаворка ідзе пра ўсе элементы нейкага вымернага мноства X з магчымым выняткам якога-небудзь падмноства $A \in X$ меры нуль. Напрыклад, кажуць, што нейкая няроўнасць праўдзіцца А.с. (ці а м а л ь у с ю д ы), нейкая паслядоўнасць функцыі збягаецца А.с. (ці для амаль усіх значэнняў аргумента) і г.д. У тэорыі імавернасцяў пад збежнасцю выпадковых велічынь А.с. разумеюць збежнасць з імавернасцю адзінка.

АНАЛІТЫЧНАЕ МНОСТВА ў т э о р ы і а н а л і т ы ч н ы х ф у н к ц ы й — мноства, якое вызначаецца лакальна як мноства агульных нулёў канцага мноства галаморфных функцый. Калі S — аналітычнае мноства ў адкрытым падмностве U прасторы $\mathbf{C}^n$, то гэта азначае, што для кожнага пункта $a \in U$ існуе наваколле $V \subset U$, і галаморфныя функцыі $f_1, \ldots, f_k$ такія, што $S \cap V = \{z \in V \mid f_1(z) = \ldots = f_r(z) = 0\}$. Калі функцыі f_k можна выбраць так, што ранг матрыцы Якобі $\left(\frac{df_k}{dz_i}\right)$ роўны r, то a ёсць рэгулярны пункт А.м.; лік $n - r$ — камплексная намернасць S у пункце a (абазначаецца $\dim_a S$).

АНАЛІТЫЧНАЯ ГЕАМЕТРЫЯ — раздзел геаметрыі, у якім геаметрычныя аб'екты вывучаюцца з дапамогай алгебраічных метадаў. Асноўныя паняцці А.г. — *пункт, плоскасць, лініі* і *паверхні другога парадку*. Сродкам даследавання ў А.г. служыць метад каардынат; узнікненне гэтага метаду цесна звязанае з развіццём астраноміі, механікі і тэхнікі ў 17 ст. Асновы метаду распрацаваў Р.Дэкарт у сваёй "Геаметрыі" (1637). Ідэі метаду былі вядомыя таксама яго сучасніку П.Ферма. Далейшае развіццё А.г. атрымала ў працах Г.Лейбніца, А.Ньютана і іншых навукоўцаў. Першы сістэматычны выклад А.г. на плоскасці здзейсніў Л.Эйлер (1748). Асноўныя задачы А.г. у прасторы развязалі Ж.Лагранж і Г.Монж.

Карыстаючыся паняццем каардынат пункта, разглядаюць раўнанне лініі ў дачыненні да сістэмы каардынат Oxy як раўнанне $F(x, y) = 0$, якое задавальняюць каардынаты (x, y) адвольнага пункта гэтай лініі і толькі такіх пунктаў. У А.г. на плоскасці падрабязна вывучаюцца *эліпс, гіпербала, парабала*; гэтыя лініі можна разглядаць як сечывы конуса плоскасцю, якая не праходзіць праз яго вяршыню (гл. *Канічныя сечывы*). Асноўная задача А.г. на плоскасці — даследаванне ліній першага і другога парадку, якія ў дэкартавых каардынатах вызначаюцца алгебраічнымі раўнаннямі адпаведна першай і другой ступені. Лініі

першага парадку з'яўляюцца простымі; наадварот, кожная простая вызначаецца раўнаннем першай ступені

$$Ax + By + C = 0.$$

Лініі другога парадку вызначаюцца раўнаннем

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

А.г. у прасторы сістэматычна даследуе алгебраічныя паверхні першага і другога парадку, якія вызначаюцца алгебраічнымі раўнаннямі ў дачыненні да дэкартавых каардынат x, y, z адпаведна першай ступені

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

і другой ступені

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz +$$
$$+ Gx + Hy + Mz + N = 0.$$

Паверхні першага парадку — плоскасці, да паверхняў другога парадку належаць *эліпс, гіпербалоід, конус, парабалоід, цыліндр* (эліптычны, гіпербалічны, парабалічны). Метад даследавання і класіфікацыі ліній і паверхняў прадугледжвае знаходжанне дэкартавай сістэмы каардынат, у якой адпаведнае раўнанне набывае найбольш просты выгляд. Уласцівасці лініі, паверхні даследуюцца з дапамогай іх кананічных раўнанняў.

АНАЛІТЫ́ЧНАЯ ТЭО́РЫЯ ДЫФЕРЭНЦЫЯ́ЛЬНЫХ РАЎНА́ННЯЎ — раздзел тэорыі дыферэнцыяльных раўнанняў, у якім развязанні даследуюцца з гледзішча тэорыі аналітычных функцый. Тыповая фармалёўка задачы ў А.т.д.р. такая: дадзены пэўны клас дыферэнцыяльных раўнанняў, усе развязкі якіх ёсць аналітычныя функцыі; трэба высветліць, якія спецыфічныя ўласцівасці маюць аналітычныя функцыі, што з'яўляюцца развязкамі дадзенага класа раўнанняў. Для развязкаў звычайных дыферэнцыяльных раўнанняў грунтоўную ролю мае вызначэнне характару і канфігурацыі асаблівых пунктаў, якія падзяляюцца на нерухомыя і рухомыя. Нерухомыя асаблівыя пункты развязкаў з'яўляюцца асаблівасцямі раўнанняў. У адрозненне ад лінейнага выпадку развязкі нелінейнага раўнання могуць мець рухомыя асаблівыя пункты. Палярныя асаблівасці лінейных сістэм падзяляюцца на рэгулярныя і ірэгулярныя. У наваколлі рэгулярнага асаблівага пункта існуе выяўленне развязку ў яўным выглядзе.

Спецыяльныя функцыі (Бэсэля, Мацье, гіпергеаметрычныя і інш.) з'яўляюцца развязкамі лінейных дыферэнцыяльных раўнанняў з аналітычнымі каэфіцыентамі. Аналітычны працяг элемента развязку ў абсягу неаналітычных каэфіцыентаў дыферэнцыяльнага раўнання таксама ёсць развязак, наогул кажучы, неадназначны. Узнікаюць пытанні: якія асаблівасці можа мець гэтая функцыя і як пабудаваны развязак у цэлым? У лінейным выпадку, адрозна ад нелінейнага, атрыманы канчатковыя адказы на гэтыя пытанні. Для нелінейных раўнанняў адна з асноўных задач — іх класіфікацыя паводле характару рухомых асаблівых пунктаў (адназначных, неадназначных, істотна асаблівых і інш.), распачатая ў працах Р.Фукса, П.Пэнлевэ, Б.Гамб'е, Д.Шазі.

АНАЛІТЫ́ЧНАЯ ТЭО́РЫЯ ЛІ́КАЎ — раздзел тэорыі лікаў, у якім вывучаюцца ўласцівасці лікаў сродкамі матэматычнага аналізу. Класічныя задачы А.т.л. — размеркаванне простых лікаў, простыя лікі ў арыфметычных прагрэсіях, размеркаванне дробавых частак мнагаскладаў. Значную ролю метады А.т.л. маюць у дыяфантавых набліжаннях, тэорыі трансцэндэнтных лікаў.

АНАЛІТЫ́ЧНАЯ ФУ́НКЦЫЯ, галаморфная, рэгулярная функцыя. Лікавая функцыя называецца аналітычнай у пункце, калі ў нейкім наваколлі гэтага пункта яе можна падаць у выглядзе сумы ступеневага шэрагу. Функцыя называецца аналітычнай на мностве, калі яна аналітычная ў кожным пункце гэтага мноства. Найбольш распаўсюджаныя камплексныя аналітычныя функцыі адной камплекснай зменнай, г.зн. аналітычныя адлюстраванні выгляду $f\colon D \to \mathbb{C}$, дзе $D \subset \mathbb{C}$. У гэтым выпадку аналітычнасць у пункце z_0 выяўляецца ў выглядзе роўнасці

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n,$$

якая павінна праўдзіцца ў нейкім крузе $|z - z_0| < r$. Іншыя ўмовы, раўназначныя азначэнню аналітычнасці функцыі f у пункце z_0: 1) у нейкім наваколлі пункта z_0 існуе вытворная

$$\lim_{h \to 0,\, h \in C} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z) \in \mathbb{C};$$

2) у нейкім наваколлі пункта z_0 функцыя f С-дыферэнцавальная; 3) у некаторым наваколлі пункта z_0 выконваецца тоеснасць $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \equiv 0$ (*Кашы—Рымана ўмова*); 4) у некаторым наваколлі пункта z_0

функцыя f непарыўная і праўдзіцца роўнасць $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$, дзе $\partial\Delta$ — мяжа кожнага трохвугольніка Δ, які знаходзіцца ў гэтым наваколлі.

Прыкладамі А.ф. з'яўляюцца элементарныя функцыі: цэлыя і дробавыя рацыянальныя функцыі, ступеневая, экспанента, трыганаметрычныя і г.д., а таксама іх кампазіцыі (пры пэўных абмежаваннях). А.ф. заўсёды бясконца дыферэнцавальныя і маюць шмат спецыфічных уласцівасцяў, якія сістэматычна вывучаюцца ў тэорыі аналітычных функцый ці тэорыі функцый камплекснай зменнай або ў камплексным аналізе. Адна з такіх спецыфічных уласцівасцяў — т э а р э м а а д з і н а с ц і: калі для дзвюх функцый f і g, аналітычных у абсягу D, праўдзіцца роўнасць $f|_E = g|_E$, дзе E — мноства, якое мае лімітавы пункт, што змяшчаецца ў D, то $f = g$ скрозь у D. А.ф. маюць шмат дастасаванняў. Яны выкарыстоўваюцца ў геаметрыі (канформавыя адлюстраванні, мінімальныя паверхні, выгінанне паверхняў), у тэорыі гарманічных функцый, у механіцы і фізіцы (тэорыя пругкасці, гідрамеханіка, электрадынаміка), а таксама ў іншых навуках. Асновы тэорыі А.ф. заклалі А.Кашы, Б.Рыман, К.Ваерштрас. У яе развіццё зрабілі ўклад матэматыкі Беларусі М.Ламбін, М.Лукомская, Ф.Гахаў, Э.Звяровіч і інш.

АНАЛІТЫ́ЧНЫ ВЫ́РАЗ, ф о р м у л а — матэматычны тэкст, запісаны з дапамогай матэматычных сімвалаў. Вызначае сукупнасць і парадак дзеянняў, якія патрэбна здзейсніць са значэннямі зменных і канстантамі, каб атрымаць адпаведнае значэнне зададзенага выразу.

АНАЛІТЫ́ЧНЫ ПРАЦЯ́Г — давызначэнне функцыі на больш шырокім абсягу. Функцыя $f: D \to \mathbf{C}$, $D \subset \mathbf{C}$ дапускае А.п. у абсяг $G \supset D$, калі існуе аналітычная функцыя $F: G \to \mathbf{C}$ такая, што $F|_D = f$. Калі на мноства D накладзена дадатковая ўмова (напрыклад, калі D — абсяг або крывая), то можа існаваць не больш як адзін А.п. дадзенай функцыі ў дадзены абсяг (т э а р э м а а д з і н а с ц і).

Напрыклад, тоеснасць

$$1 + z + z^2 + ... = \frac{1}{1-z}$$

можна разглядаць як А.п. сумы шэрагу з круга $|z| < 1$ у абсяг $\mathbf{C} \setminus \{1\}$. Далей, тоеснасць

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{z!} + \frac{z^3}{z!} + ...$$

можна выкарыстоўваць для А.п. экспаненты з $\mathbf{R}$ на $\mathbf{C}$, паколькі шэраг збягаецца скрозь у $\mathbf{C}$. *Гама-функцыя* $\Gamma(z) := \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$ вызначана гэтай роўнасцю толькі пры $\mathrm{Re}\, z > 0$. Тоеснасць $\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z)$ можна выкарыстаць для А.п. гама-функцыі ў абсяг $\mathbf{C} \setminus \{0, -1, -2, ...\}$. У агульным выпадку пры А.п. дадзенай адназначнай аналітычнай функцыі яна можа стаць мнагазначнай аналітычнай функцыяй (напрыклад, лагарыфмічная функцыя $\mathrm{Ln}\, z = \int_0^z \frac{dt}{t}$). Каб зрабіць яе адназначнай, у якасці новага абсягу яе вызначэння будуецца *рыманава паверхня*.

АНАЛІТЫ́ЧНЫ ЭЛЕМЕ́НТ — пара $(D; f)$, дзе D — які-небудзь абсяг пашыранай камплекснай плоскасці, а f — аналітычная ў гэтым абсягу функцыя.

АНТАГАНІСТЫ́ЧНАЯ ГУЛЬНЯ́ — гульня двух удзельнікаў з процілеглымі інтарэсамі. А.г. называецца яшчэ гульнёй дзвюх асоб з нулявой сумай, бо выйгрыш аднаго з гульцоў цягне лікава роўнае памяншэнне выйгрышу другога. А.г. адэкватна фармалізуюць канфліктныя сітуацыі, якія ўзнікаюць пры вызначэнні намеру ва ўмовах нявызначанасці, канкурэнцыі, а таксама пры матэматычным мадэляванні шэрагу практычных задач, напрыклад у планаванні вайсковых аперацый, спартыўных гульняў і г.д. Прыклад А.г. — матрычная гульня.

АНТЫКАМУТАТЫ́ЎНАСЦЬ — уласцівасць множання ў некаторых кольцах і алгебрах. Няхай A — алгебра над полем K, $[\cdot,\cdot]$ — множанне на A. Калі для адвольных элементаў $x, y \in A$ праўдзіцца роўнасць $[x, y] = -[y, x]$, тады кажуць, што множанне задавальняе закон А., прычым A называецца а н т ы к а м у т а т ы ў н а й а л г е б р а й. Калі характарыстыка K адрозная ад 2, А. раўназначная здзяйсненню для ўсіх $x \in A$ роўнасці $[x, x] = 0$.

АНТЫНО́МІЯ (ад грэц. antinomia — супярэчнасць у законе), п а р а д о к с — супярэчнасць паміж двума сцверджаннямі, якія ўзаемна выключаюць адно аднаго, прычым кожнае з іх аднолькава пераканаўча даказваецца (выводзіцца) сродкамі дадзенай тэорыі. У адрозненне ад сафізму як наўмысна няправільнай высновы з замаскаванай памылкай А. сведчыць пра больш глыбокія недахопы тэорыі. Выяўленне А. часта вядзе да істотнай перабудовы ўсёй тэорыі, служыць стымулам для далейшых даследаванняў. Пад назовам "а н о-

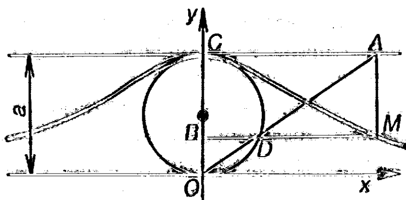
р ы і" А. разглядаліся яшчэ ў старажытнасці (Зянон Элейскі, 5 ст. да н.э.), даследаваліся імі ў філасофіі І.Канта. Вядомыя А. — апорыя "Ахілес і чарапаха", парадокс "Куча". Для матэматыкі найбольш цікавыя А., звязаныя з незвычайнымі спосабамі ўтварэння паняццяў. Логікавыя А.: Расэла (сфармуляваная ў 1902) і яе варыянт "Вясковы цырульнік", Кантара (1899); семантычныя А.: Рышара (1906), Эўбуліда з Мілета і яе варыянт — парадокс манокі (ідэя гэтага парадоксу ляжыць у аснове доказу вядомай *Гёдэля тэарэмы пра няпоўнасць* фармальных аксіяматычных тэорый). Аналіз парадоксаў садзейнічаў радыкальнаму перагляду меркаванняў па праблеме абгрунтавання матэматыкі і развіцці многіх сучасных ідэй і матэматычнай логікі.

АНТЫСІМЕТРЫ́ЧНАСЦЬ (ад грэц. anti... — супраць + сіметрычнасць) — *дачыненне*, процілеглы выпадак *адпаведнасці*. Няхай A і B — адвольныя мноствы, Δ_A — мноства параў (a,a), $a \in A$; R^{-1} — адпаведнасць, утвораная парамі (a,a), што $(a,b) \in R, a \in A, b \in B$. Адпаведнасць R называецца а н т ы с і м е т р ы ч н а й а д п а в е д н а с ц ю, калі $R \cap R^{-1} \subset \Delta_A$.

АНУЛЯ́ТАР (ад лац. annullare — знішчаць) м о д у л я A — *ідэал* Ann A кольца R (над якімі разглядаецца модуль A), што складаецца з усіх элементаў, якія дзейнічаюць на A як нулявыя эндамарфізмы: $\text{Ann}\, A = \{\lambda | \lambda \in R,\ \lambda a = 0,\ \forall a \in A\}$.

АНЦЬЁ (ад франц. entier — цэлы) — тое, што цэлая частка *ліку*, г.зн. для $x \in R$ А. ад x роўнае найбольшаму цэламу ліку, які не пераўзыходзіць x. Гл. *Цэлая і дробавая часткі ліку*.

АНЬЁЗІ ЗАВІТО́К — плоская алгебраічная крывая, раўнанне якой у прамавугольнай сістэме каардынат мае выгляд $y(a^2+x^2)=a^3$, $a>0$ (рыс.). Няхай a — дыяметр акружыны з цэнтрам у пункце $\left(0, \frac{a}{2}\right)$, OA — сечная, CB і AM паралельныя восі Oy, а BM паралельная восі Ox. Тады А.з. —

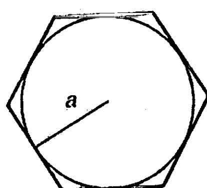


геаметрычнае месца пунктаў M. А.з. — сіметрычная крывая ў дачыненні да восі Oy. Максімум А.з. знаходзіцца ў $C(0, a)$, у гэтым пункце крывая датыкаецца да ўведзенай вышэй акружыны. А.з. мае два пункты перагіну $\left(\pm a\sqrt{3}, \frac{4}{3}a\right)$. Асімптота — вось Ox. Плошча паміж крывой і асімптотай $S = \pi a^2$. Назоў ад прозвішча М.Аньезі, якая вывучала гэтую крывую (1748).

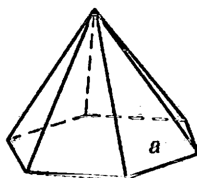
АПАСТЭРЫЁРНАЯ ІМАВЕ́РНАСЦЬ — імавернасць a posteriori (лац., літаральна — з наступнага), умоўная імавернасць падзеі (пры некаторай умове), калі жадаюць падкрэсліць, што ўмова, пра якую ідзе гаворка, фактычна адбылася. Прынцыповай розніцы паміж тэрмінамі "ўмоўная" і "апастэрыёрная" няма. А.і. процілеглая *апрыёрнай імавернасці*.

АПАТЭ́МА — тое, што *апафема*.

АПАФЕ́МА, а п а т э м а (ад грэц. apothema — нешта адкладзенае ўбок) — 1) адрэзак перпендыкуляра, апушчанага з цэнтра правільнага мно-



Рыс. 1



Рыс. 2

гавугольніка на пэўную яго старану (a на рыс. 1), а таксама яго даўжыня; 2) у п р а в і л ь н а й п і р а м і д з е А. — вышыня a яе бакавой грані (рыс. 2).

АПЕРА́ТАР (ад лац. operator — той, хто дзейнічае, выканаўца) — 1) тое, што *адлюстраванне*. Тэрмін пашыраны ў функцыянальным аналізе і лінейнай алгебры. А. A з мноства X у мноства Y можа быць не скрозь вызначаны. Тады кажуць пра яго абсяг вызначэння $D_A = D(A)$. Для $x \in X$ вынік дзеяння А. A на x абазначаюць $A(x)$ або Ax. Калі X і Y — вектарныя прасторы, то з мноства ўсіх А. з X у Y вылучаюць клас *лінейных* А., астатнія А. — н е л і н е й н ы я. Калі X і Y — тапалагічныя прасторы, то з мноства А. з X у Y вылучаюць *непарыўныя аператары, абмежаваныя аператары, кампактныя аператары*. Прыклады: А. д ы ф е р э н ц а в а н н я $D(f(t)) = f'(t)$, які кожнай дыферэнцавальнай функцыі ставіць у адпаведнасць яе

вытворную; А. інтэгравання $\int_a^b f(t)dt = I$, які кожнай інтэгравальнай на $[a, b]$ функцыі ставіць у адпаведнасць лік; А. множання на функцыю $\varphi(t)$, які кожнай функцыі $f(t)$ ставіць у адпаведнасць функцыю $\varphi(t)\cdot f(t)$; інтэгральны А. $\int_a^b F(t,s)g(s)ds = f(t)$, дзе F — непарыўная функцыя на $[a,b]\times[a,b]$, якая мноству непарыўных на $[a, b]$ функцый $g(s)$ ставіць у адпаведнасць непарыўную функцыю $f(t)$; 2) у праграмаванні — каманда ці загад выконваць пэўнае закончанае дзеянне ў праграме. А. выкарыстоўваецца ў *праграмавання мовах* і *праграмаў схемах.*

АПЕРА́ТАРНАЕ РАЎНА́ННЕ — спецыяльны тып *функцыйных раўнанняў*, калі іх развязкамі з'яўляюцца элементы прасторы аператараў.

АПЕРА́ЦЫЙ ДАСЛЕ́ДАВАННЕ — раздзел дастасоўнай матэматыкі, прысвечаны колькаснаму абгрунтаванню выяўлення найлепшых (аптымальных) намераў у арганізацыі і кіраванні мэтамі ўзгодненымі дзеяннямі (аперацыямі). У кожнай галіне дзейнасці ўзнікаюць задачы А.д. з тыповай фармулёўкай: здзейсніць сістэму захадаў дзеля дасягнення пэўнай мэты. Пры гэтым зададзены ўмовы, якія характарызуюць абставіны здзяйснення, а мэту патрэбна дасягнуць найлепшым чынам. Такія задачы з улікам патрабаванняў сістэмнага падыходу пераводзяць у матэматычную форму (будуюць матэматычную мадэль), распрацоўваюць алгарытм развязання і развязваюць (найчасцей з дапамогай кампутара), правяраюць атрыманыя вынікі на магчымасць іх выкарыстання на практыцы. Пры станоўчым адказе ўкараняюць іх, а пры адмоўным — удакладняюць фармулёўку задачы і адпаведную ёй матэматычную мадэль.

Такі аналіз вельмі карысны дзеля пазнання сутнасці і мэты кіравання сістэмай, што вывучаецца. Задачы А.д. класіфікуюцца ў адпаведнасці з матэматычнымі раздзеламі і сродкамі, якія выкарыстоўваліся пры пабудове мадэлі. Вельмі пашыраныя, напрыклад, лінейныя алгебраічныя аптымізацыйныя задачы (гэтак званае *лінейнае праграмаванне*), экстрэмальныя задачы на графах, аптымізацыйныя задачы з улікам выпадковых уздзеянняў ці пры нявызначанасці зыходных звестак. Важны раздзел А.д. — *гульняў тэорыя*, дзе аналізуюцца матэматычныя мадэлі паводзін некалькіх бакоў (удзельнікаў гульні) і распрацоўваюцца метады пошуку рацыянальных паводзін кожнага боку.

АПЕРАЦЫ́ЙНАЕ ЗЛІЧЭ́ННЕ — адзін з метадаў *матэматычнага аналізу*, у якім зыходныя функцыі (арыгіналы) замяняюцца на пэўныя іншыя функцыі (вывы). Калі, напрыклад, замена адбываецца з дапамогай *Ляпляса пераўтварэння*, то аператар дыферэнцавання можна лічыць алгебраічнай велічынёй. У гэтым разе больш цяжкая задача інтэгравання некаторых класаў дыферэнцыяльных раўнанняў і іншых задач матэматычнага аналізу зводзіцца да развязання больш простых задач. А.з. атрымала значнае распаўсюджанне пасля прац О.Хэвісайда, у якіх ён развязаў шэраг праблем электрадынамікі. Поўнае матэматычнае абгрунтаванне А.з. было дадзена з дапамогай *інтэгральнага пераўтварэння* Ляпляса. Існуюць табліцы, з дапамогай якіх робяць пераход ад арыгінала да выяў і наадварот. Так, напрыклад, арыгіналам $f(t) = 1, t^n, \sin\omega t$ адпавядаюць вывы $F(x) = \frac{1}{x}, \frac{n!}{x^{n+1}}$ ($n > 0$ — цэлае), $\frac{\omega}{x^2+\omega^2}$ адпаведна. Створаны таксама шматлікія абагульненні А.з. у розных кірунках.

АПЕРАЦЫ́ЙНАЯ СІСТЭ́МА кампутара — комплекс узаемазлучаных службовых праграм, якія заўсёды знаходзяцца ў памяці кампутара і прызначаныя для кіравання элементамі яго будовы і ўзаемадзеяння з чалавекам.

АПЛІКА́ТА (ад лац. applicata — прыкладзеная) — адна з дэкартавых каардынат пункта ў прасторы, звычайна трэцяя, якая абазначаецца літарай z. Гл. *Дэкартава сістэма каардынат.*

АПО́РНАЯ ПЛО́СКАСЦЬ да мноства M (у прасторы) у яго пункце N — плоскасць, якая праходзіць праз пункт N так, што мноства M цалкам змешчана з аднаго боку ад гэтай плоскасці ці, дакладней, у адной з вызначаных плоскасцю замкнёных паўпрастораў. А.п. карыстаюцца пры вывучэнні ўласцівасцяў выпуклых целаў.

АПРАКСІМА́ЦЫІ ТЭО́РЫЯ, набліжання функцый тэорыя — раздзел матэматычнага аналізу, які вывучае спосабы набліжання адных матэматычных аб'ектаў іншымі, у тым ліку звязаныя з даследаваннем і ацэнкамі хібнасці набліжання. Галоўны змест А.т. складаецца з набліжання лікавых функцый.

Падмурак А.т. закладзены ў працах П.Чабышова (1854—59) пра найлепшае раўнамернае на-

бліжанне функцый мнагаскладамі і К.Ваерштрасам, які ў 1885 г. прыйшоў да прынцыповага выніку пра магчымасць раўнамернага набліжання алгебраічнымі мнагаскладамі функцыі, непарыўнай на концым адрэзку. Грунтоўны этап у развіцці А.т., які звязаны з імёнамі Ш.Вале Пусена, Д.Джэксана, С.Бернштэйна, склалі даследаванні сувязяў паміж хуткасцю змяншэння хібнасці набліжання функцыі $f(t)$ пабудаванымі тым ці іншым спосабам мнагаскладамі $P_n(f,t)$ ступені n, $n \to \infty$, і дыферэнцыяльна-рознасцевымі ўласцівасцямі. Гэтыя ўласцівасці (напрыклад, колькасць вытворных, якія мае функцыя $f(t)$, характар іх непарыўнасці) магчыма ў многіх выпадках акрэсліць на падставе паслядоўнасці мнагаскладаў, якімі набліжаюць, і паводзін адпаведнай хібнасці. Такім чынам, былі знойдзены новыя канструктыўныя характарыстыкі непарыўных і дыферэнцыяльных функцый. У першай трэці 20 ст. такія праблемы былі пераважнымі ў А.т., і ў сувязі з гэтым узнік назоў — канструктыўная тэорыя функцый. У 30—40-х гг. з'явіліся працы А.Калмагорава, Ж.Фавара і С.Нікольскага, якія паслужылі пачаткамі новага кірунку даследавання, звязанага з набліжэннем класа функцый канцамернымі падпрасторамі і атрыманнем дакладных ацэнак хібнасці на падставе дыферэнцыяльна-рознасцевых характарыстык, якія вызначаюць функцыйны клас. Гаворка ідзе пра знаходжанне велічыняў $\sup_{f \in K} \rho(f, P_N(f))$, $f \in K$, дзе $\rho(f, P_N(f))$ — мера хібнасці набліжання, K — некаторы клас функцый, $P_N(f)$ — лінейныя камбінацыі ці абагульнены мнагасклад, якімі набліжаюць. У выніку развязання такіх задач узнікла магчымасць параўнання спосабаў набліжання з гледзішча іх набліжальнай адпаведнасці дадзенаму класу і знаходжання найлепшага спосабу набліжання. Даследаванні ў гэтым кірунку грунтуюцца як на вывучэнні канкрэтных спосабаў набліжання, так і на саміх агульных дасягненнях функцыянальнага аналізу. Дзякуючы ім былі знойдзены новыя сувязі паміж рознымі паводле характару экстрэмальнымі задачамі, вызначаны дакладныя парадкі ці асімптотыка для набліжанняў многіх важных функцыйных класаў. Найбольш поўныя вынікі атрыманы для набліжання перыядычных функцый рэчаіснай зменнай у раўнамернай і інтэгральнай метрыках. Сярод значных дасягненняў вынікі пра судачыненні найлепшых набліжанняў *лінейнымі метадамі сумавання шэрагаў Фур'е*, пра знаходжанне дакладных канстантаў у прамых і адваротных тэарэмах, пра будаванне найлепшых *квадратурных формул* для пэўных класаў функцый.

Асобнае месца ў А.т. займае набліжанне функцыі камплекснай зменнай з дапамогай аналітычных функцый спецыяльнай структуры. Найбольш важкія тут задачы пра магчымасць набліжання, хуткасць набліжання мнагаскладамі, пра апраксімацыйныя ўласцівасці розных спосабаў набліжання функцый (інтэрпаляцыйныя паслядоўнасці экспанентавых мнагаскладаў і шэрагу Дырыхле). Новы этап у развіцці рацыянальных набліжанняў пачынаецца ў 1955 г. пасля публікацыі першых даследаванняў А.Ганчара. Былі знойдзены непалепшальныя, у пэўным сэнсе адваротныя тэарэмы, у якіх на падставе вядомай хуткасці змяншэння найлепшых набліжанняў функцыі $f(t)$ вывучаюцца яе структурныя ўласцівасці. Змястоўныя прамыя тэарэмы былі створаныя на шляху знаходжання такіх функцый, для якіх рацыянальная апраксімацыя дае значны выйгрыш у параўнанні з паліномнай апраксімацыяй. Такія функцыі, у прыватнасці, ёсць кавалкава-аналітычныя функцыі, выпуклыя функцыі, згорткі ядраў Вейля, функцыі абмежаванай варыяцыі і інш.

Даследаванні па А.т. у Беларусі ўзніклі і развіваліся пад уплывам дзейнасці А.Турэцкага. А.Турэцкі і яго паслядоўнікі (В.Русак, А.Пякарскі, В.Прохараў, Я.Роўба) здзейснілі шэраг даследаванняў па А.т., у тым ліку даследаванні, якія датычаць класаў насычэння спосабаў сумавання, збежнасці інтэрпаляцыйных і квадратурных працэсаў, квадратурных формул найвышэйшай ступені дакладнасці. Знойдзены экстрэмальныя ацэнкі для вытворных рацыянальных функцый, распрацаваны спосабы будавання рацыянальных аператараў, якія ажыццяўляюць набліжанне парадку найлепшага (з фіксаванымі полюсамі). Вызначаны дакладныя парадкі рацыянальных апраксімацый са свабоднымі полюсамі для многіх важных функцый і класаў функцый. Даследаваны парадкі адхілення рацыянальных аператараў Падэ для элементарных аналітычных функцый. Апраксімацыйныя спосабы паспяхова выкарыстаны для набліжанага развязання сінгулярных інтэгральных раўнанняў.

Многія даследаванні акад. У.Крылова, чл.-кар. Л.Яновіча і іх паслядоўнікаў выкананыя ў сумежных абсягах або цалкам належаць да А.т. (даследаванні збежнасці інтэрпаляцыі перыядычных аналітычных функцый, вылічэнне кантынуумных інтэгралаў).

АПРАКСІМА́ЦЫЯ (ад лац. approximare — набліжацца) — замена адных матэматычных аб'ек-

таў іншымі, у нейкім сэнсе блізкімі да зыходных. Дазваляе вывучаць уласцівасці больш складаных аб'ектаў праз уласцівасці больш простых. Напрыклад, у тэорыі лікаў вывучаюць А. ірацыянальных лікаў рацыянальнымі лікамі (дыяфантавы набліжэнні). У геаметрыі і тапалогіі разглядаюцца А. крывых, паверхняў прастораў (гл. таксама *Апраксімацыі тэорыя*).

АПРЫЁРНАЯ АЦЭ́НКА — ацэнка (велічыні, развязку і г.д.), якую трэба даць з тых ці іншых меркаванняў да пачатку дэталёвага разгляду задачы. Атрыманне А.а. складае аснову *рознасцевых схемаў тэорыі.*

АПРЫЁРНАЯ ІМАВЕ́РНАСЦЬ (ад лац. a priori — з папярэдняга) — імавернасць пэўнай падзеі, якая разглядаецца без пэўных меркаванняў пра ажыццяўленне іншых падзей. У процілеглым выпадку дадзеную імавернасць называюць *апастэрыёрнай імавернасцю.* Гэтую тэрміналогію ўжываюць у сувязі з *Баеса формулай.*

АПТЫМА́ЛЬНАГА РЭЗЕРВАВА́ННЯ ЗАДА́ЧА — задача пошуку сярод усіх набораў лікаў $(x_1,...,x_n)$ такіх, што пры абмежаванні $\sum_{i=1}^{m} c_i x_i \le c$ надаюць найбольшае значэнне функцыі

$$P(x_1,...,x_n) = \prod_{i=1}^{m} (1-(1-p_i)^{x_i+1}),$$

якая называецца імавернасцю бесперапыннай працы.

АПТЫМА́ЛЬНАЕ КІРАВА́ННЕ — раздзел матэматыкі, які вывучае некласічныя варыяцыйныя задачы. У агульных рысах задача А.к. палягае ў наступным. Разглядаюць кіравальны аб'ект (пад якім разумеюць нейкую машыну, прыладу ці працэс), забяспечаны "рулямі". Матэматычна паводзіны такога аб'екта апісваюцца пэўнымі раўнаннямі, куды ўваходзяць і кіроўныя параметры, якія характарызуюць становішча "руляў". Паўстае пытанне пра пошук найлепшага (аптымальнага) у тым ці іншым сэнсе кіравання рухам, напрыклад пра дасягненне мэты руху за мінімальны час. Гэтае пытанне ёсць задача *варыяцыйнага злічэння.* У адрозненне ад класічных варыяцыйных задач, дзе кіроўныя параметры змяняюцца ў якім-небудзь адкрытым абсягу (без мяжы), тэорыя А.к. разглядае таксама і той выпадак, калі кіроўныя параметры могуць прымаць і межавыя значэнні. Апошняя акалічнасць асабліва істотная з пункту гледжання дастасавання. Цэнтральны вынік тэорыі А.к. — прынцып максімуму Пантрагіна, які дае агульную неабходную ўмову аптымальнасці кіравання. Гэты вынік і звязаныя з ім даследаванні, праведзеныя з пачатку 1950-х гг. Л.Пантрагіным і яго супрацоўнікамі, сталі зыходным пунктам распрацоўкі тэарэтычных, вылічальных і дастасоўных аспектаў тэорыі А.к. Пры развязанні шэрагу задач А.к. паспяхова выкарыстоўваюцца ідэі метаду дынамічнага праграмавання, асновы якога распрацаваў Р.Бэлман з супрацоўнікамі.

У якасці тыповай задачы А.к. можна прывесці кіравальны аб'ект, закон руху якога апісваецца сістэмай дыферэнцыяльных раўнанняў:

$$\frac{\partial x^i}{\partial t^i} = f(x^1,...,x^n,u^1,...,u^r),\ i=1,...,n,\ t \ge t_0, \quad (1)$$

дзе $x^1,...,x^n$ — фазавыя каардынаты, што характарызуюць становішча аб'екта ў момант часу t, а $u^1,...,u^r$ — кіроўныя параметры. Кіраванне аб'ектам азначае выбар кіроўных параметраў як функцый часу $u^j = u^j(t)$, $j=1,...,r$, дапушчальных з пункту гледжання магчымасцяў кіравання аб'ектам. Напрыклад, у дастасоўных задачах часта патрабуецца, каб у кожны момант часу пункт $(u^1,...,u^r)$ належаў зададзенаму замкнёнаму мноству U. Апошняя акалічнасць робіць варыяцыйную задачу некласічнай. Няхай зададзеныя пачатковае $(x_0^1,...,x_0^n)$ і канчатковае $(x_1^1,...,x_1^n)$ становішчы аб'екта (1). Кіраванне рэалізуе мэту кіравання, калі знойдзецца такі момант часу $t_1 > t_0$, што развязак $x^1(t),...,x^n(t)$ задачы (1) пры $x^i(t_0)=x_0^i$, $i=1,...,n$, адпавядае ўмове $x^i(t_1)=x_1^i$, $i=1,...,n$. Якасць гэтага кіравання ацэньваюць з дапамогай значэння функцыянала

$$I(u) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x^1(t),...,x^n(t),u^1(t),...,u^r(t))dt.$$

Задача А.к. палягае ў пошуку такога кіравання, якое дасягае мэты кіравання і для якога функцыянал якасці мае найменшае магчымае значэнне. Для сфармуляванай задачы запісваюць неабходную ўмову аптымальнасці кіравання — прынцып максімуму Пантрагіна. Няхай вектар-функцыя $u^0 = u^0(t) = (u_0^1(t),...,u_0^r(t))$, $t_0 \le t \le t_1$, — аптымальнае кіраванне, а вектар-функцыя $x^0 = x^0(t) = (x_0^1(t),...,x_0^n(t))$, $t_0 \le t \le t_1$, — адпаведны яму развязак. Разглядаюць дапаможную лінейную сістэму звычайных дыферэнцыяльных раўнанняў:

$$\frac{\partial y_k}{\partial t} = -\sum_{i=0}^{n} \frac{df^i(x^0(t),u^0(t))}{\partial x^k} y_i,\ k=1,...,n, \quad (2)$$

і функцыю

$$H(\psi,x,u)=\sum_{i=0}^{n}\psi_i f^i(x,u).$$

Тады ў лінейнай сістэмы (2) існуе такі нетрывіяльны развязак $\psi=\psi(t)=(\psi_0(t),\psi_1(t),\ldots,\psi_n(t))$, $t_0\le t\le t_1$, што для значэнняў t з адрэзка $[t_0,t_1]$, у якіх функцыя $u^0(t)$ непарыўная, праўдзіцца роўнасць

$$\max H(\psi(t),x^0(t),u)=H(\psi(t),x^0(t),u^0(t)),$$

прычым $\psi_0(t)=\text{const}\le 0$. У матэматычнай тэорыі аптымальнага кіравання разглядаюць таксама праблемы дастатковых умоваў аптымальнасці, кіравання, назірання, стабілізацыі і г.д. Вялікую ўвагу аддаюць распрацоўцы вылічальных метадаў А.к. Даследаванні па матэматычнай тэорыі аптымальных сістэм кіравання і дынамічных сістэм у Беларусі распачаты пад уплывам акад. Я.Барбашына і паспяхова выконваюцца галоўным чынам у Інстытуце матэматыкі НАН Беларусі на чале з акад. І.Гайшуном, чл.-кар. Ф.Кірылавай, чл.-кар. В.Гарохавікам і ў БДУ пад кіраўніцтвам Р.Габасава і А.Каліціна. Разам з вучнямі — У.Марчанкам, С.Мінюком, А.Мяцельскім, В.Касцюковай, Л.Мінчанкам, М.Дымковым — імі пабудавана груптоўная матэматычная тэорыя кіравання шырокага класа дынамічных сістэм, якая яднае як цікавыя тэарэтычныя знаходкі, так і менавіта канструктыўныя метады, прыдатныя для шырокага практычнага ўжывання. Вынікі гэтых даследаванняў надрукаваныя больш чым у 20 манаграфіях, значная частка якіх перакладзена на замежныя мовы.

АПТЫМА́ЛЬНАСЦІ ПРЫ́НЦЫП — выраз, які змяшчае тыя або іншыя рысы часам ягчэ інтуіцыйнага разумення абгрунтавання, выгады, устойлівасці і г.д. Безумоўна, задаволіць разам усе рысы аптымальнасці немагчыма, бо яны могуць быць несумяшчальныя. Праблемы выпрацоўкі А.п. трапляюцца і ў такіх задачах, калі вынік нейкага намеру ягчэ не поўнасцю вядомы асобе, якая рэалізоўвала гэты намер. А.п. называюць і правілы, на падставе якіх складаная задача аптымізацыі зводзіцца да больш простых.

АПТЫМА́ЛЬНАЯ КВАДРАТУ́РА — *квадратурная формула*, якая дае найлепшае набліжэнне інтэграла $I(t)=\int_{\Omega} f(p)\cdot\omega(p)dP$ на класе F падынтэгральных функцый. Калі

$$S_N(f)=\sum_{k=1}^{n}c_k\cdot f(p_k),$$

то $R_n(f)=S_n(f)-I(f)$ называецца хібнасцю квадратуры пры вылічэнні інтэграла ад дадзенай функцыі, а $r_n(f)=\sup|R_n(f)|$ называецца хібнасцю квадратуры на класе F. Калі існуе такая квадратура, што $r_n(F)=\inf_{c_k,p_k} r_n(F)$, то гэтую квадратуру называюць А.к. на гэтым класе. А.к. пабудаваны толькі для некаторых класаў функцый, у асноўным адной зменнай. А.к. называюцца таксама найлепшымі квадратурнымі формуламі або экстрэмальнымі квадратурнымі формуламі.

АПТЫМА́ЛЬНЫ АЛГАРЫ́ТМ — алгарытм A, які развязвае задачу P за час $t_A=O(f(n))$ і для кожнага алгарытму B, які развязвае P, праўдзіцца $t_B>C(f(n))$. Тут C — нейкая сталая, а $f(n)$ — функцыя натуральнага аргумента.

АПТЫМІЗАЦЫ́ЙНАЯ ЗАДА́ЧА — задача, якая складаецца з выбару сярод некаторага мноства дапушчальных (г.зн. дапушчальных абставінамі справы) развязкаў лепшых у тым ці іншым сэнсе.

АПТЫМІЗА́ЦЫЯ ВЫЛІЧА́ЛЬНЫХ АЛГАРЫ́ТМАЎ — выбар *аптымальнага алгарытму* пры тэарэтычным даследаванні ці пры развязанні дастасоўных задач. Пры выбары метаду развязання задачы арыентуюцца на пэўныя ўласцівасці агульнага характару, пры гэтым алгарытм будзе прыдатны і пры развязанні іншых задач, якія маюць гэтыя ўласцівасці. Калі абазначыць P — клас задач з пэўнымі ўласцівасцямі, M — мноства метадаў развязання задач класа P, $E(P,m)$ — хібнасць развязку пры выкарыстанні метаду $m\in M$ да задачы $p\in P$, то велічыня $E(P,m)=\sup_{p\in P}|E(p,m)|$

будзе называцца хібнасцю метаду на класе задач P, а $E(P,M)=\inf E(P,m)$ — аптымальнай на класе P ацэнкай хібнасці метадаў з мноства M. Калі існуе метад m_0 такі, што $E(P,m_0)=E(P,M)$, то гэты метад называецца аптымальны м. Аптымальныя алгарытмы можна пабудаваць даволі рэдка, але для вялікай колькасці задач пабудаваны метады, паводле сваіх асімптатычных характарыстык блізкія да аптымальных.

АРА́БСКІЯ ЛІ́ЧБЫ — тое, што *інда-арабскія лічбы*.

АРГУМЕ́НТ (ад лац. argumentum — тут прадмет, знак) — 1) А. функцыі — незалежная зменная велічыня. Гл. *Функцыя*; 2) А. камплек-

с н а г а л і к у $z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $z \neq 0$, — вугал φ, утвораны радыусам-вектарам z з дадатным кірункам восі абсцыс. Гл. таксама *Камплексны лік*, *Камплексная плоскасць*.

АРДЫНА́ТА (ад лац. ordinatus — размешчаны па парадку) — адна з *дэкартавых каардынат* пункта, звычайна другая, абазначаецца літарай y.

АРКСІ́НУСА ЗАКО́Н — лімітавая тэарэма, якая апісвае флуктуацыі выпадковага блукання па простай. А.з. — гэта размеркаванне з функцыяй размеркавання

$$F(x) = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x},\ 0 \le x \le 1.$$

Такое размеркаванне мае велічыня τ_t/t, дзе τ_t — час, праведзены броўнаўскай часціцай на дадатнай паўвосі за прамежак $[0, t]$.

АРКФУ́НКЦЫІ — тое, што *адваротныя трыганаметрычныя функцыі*.

АРТАГАНАЛІЗА́ЦЫІ МЕ́ТАД — метад развязання сістэмы лінейных алгебраічных раўнанняў $Ax = b$ з незвыроднай матрыцай A, які грунтуецца на працэсе Грама—Шміта артаганалізацыі сістэмы вектараў. Калі $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$, $b = (b_1, b_2, ..., b_n)^T$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)^T$, то зыходную сістэму можна запісаць у выглядзе $(a_i, y) = 0$, $i = \overline{1, n}$. Паводле А.м. для сістэмы вектараў a_i, $i = \overline{1, n+1}$, дзе $a_{n+1} = (0, 0, ..., 0, 1)^T$, будуюць ортаўнармаваную сістэму вектараў $q_1, q_2, ..., q_{n+1}$ на падставе рэкурэнтных стасункаў

$$\begin{cases} c_1 = a_1,\ q_q = c_1/\sqrt{(c_1, c_1)}, \\ c_k = a_k - \sum\limits_{i=1}^{k-1}(a_k, q_i)q_i, \\ q_k = c_k/\sqrt{(c_k, c_k)}. \end{cases}$$

Вектар $q_{n+1} = (z_1, z_2, ..., z_{n+1})^T$ праўдзіць сістэму $(a_1, y) = 0$. Значыць, $(z_1/z_{n+1}, z_2/z_{n+1}, ..., z_n/z_{n+1})^T$ — развязак зыходнай сістэмы. На пададзеныя рэкурэнтныя стасункі можна глядзець як на паслядоўныя пераўтварэнні матрыцы A ва унітарную, што раўназначна праўдзівасці роўнасці $A = LV$, дзе L — трохвугольная, V — унітарная матрыцы. А.м. няўстойлівы ў дачыненні да вылічальнай хібнасці: вектары $q_1, q_2, ..., q_n$ н е а р т а г а н а л ь н ы я. Каб направіць гэта, скарыстоўваюць працэс пераартаганалізацыі.

АРТАГАНАЛІЗА́ЦЫЯ, п р а ц э с п е р а а р т а г а н а л і з а ц ы і — алгарытм будавання для дадзенай лінейна-незалежнай сістэмы вектараў (у эўклідавай ці эрмітавай прасторы V), *артаганальнай сістэмы* вектараў, якія ўтвараюць тую ж падпрастору V. Найбольш вядомы п р а ц э с Г р а м а — Ш м і т а, сутнасць якога ў наступным. Няхай дадзена сістэма вектараў $a_1, a_2, ..., a_k$, для якой індукцыйна будуем сістэму вектараў $b_1, b_2, ..., b_i$, пры гэтым $b_1 = a_1$. Калі $b_1, b_2, ..., b_i$ пабудаваны, то $b_{i+1} = a_{i+1} + \sum\limits_{j=1}^{i}\alpha_j b_j$, дзе $\alpha_j = -\frac{(a_{i+1}, b_j)}{b_j, b_j}$. Яўны выраз вектараў b_i праз a_i задае формула $b_i = \begin{vmatrix} (a_1, a_1)...(a_1, a_{i-1})a_1 \\ .... \\ (a_i, a_1)...(a_i, a_{i-1})a_i \end{vmatrix}$, у якой мяркуецца, што вызначнік трэба раскласці па апошнім слупку. Калі вектары b_i унармаваць, атрымліваецца *орта- ўнармаваная сістэма* вектараў q_i, $i = \overline{1, k}$, $q_i = \frac{b_i}{\sqrt{\Gamma_{i-1} \cdot \Gamma_i}}$, дзе Γ_i — *Грама вызначнік* сістэмы $\{a_i\}$, $i = \overline{1, k}$. Працэс Грама—Шміта можна трактаваць як расклад незвыроднай квадратнай матрыцы ў здабытак артаганальнай (у эрмітавым выпадку — унітарнай) і верхняй трохвугольнай матрыцы з дадатнымі дыяганальнымі элементамі. Ён скарыстоўваецца для развязання сістэмы лінейных алгебраічных раўнанняў (гл. *Артаганалізацыі метад*).

АРТАГАНА́ЛЬНАСЦЬ (ад грэц. orthogonios — прамавугольны) — абагульненне паняцця *перпендыкулярнасці*. Калі два вектары ў трохмернай прасторы перпендыкулярныя, то іх скалярны здабытак роўны нулю. Гэта дазваляе абагульніць паняцце перпендыкулярнасці на адвольную вектарную прастору, у якой вызначаны скалярны здабытак: два вектары называюцца а р т а г а н а л ь н ы м і, калі іх скалярны здабытак роўны нулю. Абагульненнем А. ёсць артаганальнасць з вагой. У прыватнасці, калі ў прасторы камплекснaзначных функцый, вызначаных на $[a; b]$, скалярны здабытак функцый $f(x)$, $\varphi(x)$ гэтай прасторы задаецца формулай

$$(f, \varphi)_p = \int\limits_a^b f(x) \cdot \overline{\varphi(x)} \cdot p(x)dx,$$

дзе $p(x) \ge 0$, то $f(x)$ і $\varphi(x)$ называюцца а р т а г а н а л ь н ы м і з в а г о й $p(x)$ пры ўмове $(f, \varphi)_p = 0$. Дзве лінейныя падпрасторы называюцца а р т а г а н а л ь н ы м і, калі кожны вектар адной з іх артаганальны кожнаму вектару другой. Гэтае паняцце абагульняе паняцце перпендыкулярнасці дзвюх простых ці простай і плоскасці

ў трохмернай прасторы (але не перпендыкулярнасць дзвюх плоскасцяў). Крывыя лініі, якія не расякаюцца пад прамым вуглом (г.зн. датычныя да крывых у пункце іх нерасячэння перпендыкулярныя), называюцца **артаганальнымі крывымі**.

АРТАГАНАЛЬНАЯ ГРУПА — група $O(V^n, f)$ незвыродных лінейных пераўтварэнняў, якія захоўваюць незвыродную сіметрычную білінейную форму f у прасторы V^n. Гл. *Класічная група*.

АРТАГАНАЛЬНАЯ МАТРЫЦА — квадратная *матрыца* $A = (a_{ik})$ парадку n з рэчаіснымі элементамі, слупкі якой утвараюць ортаўнармаваную сістэму вектараў, г.зн.

$$a_{i1}a_{k1} + a_{i2}a_{k2} + ... + a_{in}a_{kn}a_{kn} = \begin{cases} 1, \text{ калі } i = k, \\ 0, \text{ калі } i \neq k. \end{cases}$$

А.м. з'яўляюцца матрыцамі пераходу ад аднаго ортаўнармаванага базіса ў эўклідавай прасторы да другога. Вызначнік А.м. роўны ±1. Здабытак дзвюх А.м. ёсць таксама А.м. Паняцце А.м. натуральным чынам пашыраецца на матрыцы з камплекснымі элементамі.

АРТАГАНАЛЬНАЯ ПРАЕКЦЫЯ — прыватны выпадак паралельнай праекцыі, калі плоскасць праекцыі размешчана перпендыкулярна (артаганальна) да кірунку праектавання.

АРТАГАНАЛЬНАЯ СІСТЭМА — 1) А.с. **вектараў** — мноства $\{a_k\}$, $k \in N$, ненулявых вектараў эўклідавай прасторы, для скалярнага здабытку якіх праўдзіцца $(a_i, a_j) = 0$ пры $i \neq j$. Калі дадаткова норма кожнага вектара роўная адзінцы, то сістэма $\{a_k\}$ называецца **ортаўнармаванай**. Поўная А.с. называецца **артаганальным базісам**. Адпаведна азначаецца ортаўнармаваны базіс; 2) А.с. **каардынат** — сістэма каардынат, каардынатныя лініі (паверхні) якой нерасякаюцца пад прамым вуглом, напрыклад дэкартава, палярная, эліптычная (на плоскасці); дэкартава, сферычная, цыліндрычная (у прасторы); 3) А.с. **функцый** — сістэма функцый $\{\varphi_k(x)\}$, $k \in N$, артаганальных з вагой $p(x) > 0$ на $[a, b]$:

$$\int_a^b \varphi_i(x) \cdot \varphi_j(x) \cdot p(x)dx = 0$$

пры $i \neq j$. Напрыклад, трыганаметрычная сістэма $\{1, \cos kx, \sin kx\}$, $k \in N$, — А.с. функцый з вагой 1 на адрэзку $[-\pi, \pi]$.

Калі для кожнай функцыі з А.с. праўдзіцца ўмова ўнармаванасці $N_k = 1$, дзе

$$N_k = \int_a^b |\varphi_k(x)|^2 p(x)dx,$$

то такая сістэма называецца **ортаўнармаванай**. Усякую А.с. функцый можна ўнармаваць, калі памножыць кожную $\varphi_k(x)$ на нармоўны множнік $1/\sqrt{N_k}$. З адвольнай сістэмы лінейна незалежных функцый $\{f_k(x)\}$, $k \in N$, для кожнай з якіх існуе N_k, можна пабудаваць унармаваную А.с. Для гэтага скарыстоўваюць **працэс артаганалізацыі**: разглядаюць лінейныя камбінацыі функцый

$$\varphi_k(x) = \sum_{l=1}^{k} c_{kl} f_l(x)$$

і вызначаюць каэфіцыенты c_{kl} з умовы артаганальнасці $\varphi_k(x)$ да ўсіх $f_l(x)$, $1 \leq l < k$ і ўмовы ўнармаванасці. Напрыклад, пасля артаганалізацыі з вагой 1 на адрэзку $[-1, 1]$ паслядоўнасці функцый $1, x, x^2, ..., x^n$ атрымліваюцца *Лежандра мнагасклады*:

$$P_0(x) = 1/\sqrt{2},$$

$$P_k(x) = \sqrt{\frac{2k+1}{2}} \cdot \frac{1}{2^k \cdot k!} \cdot \frac{d^k(x^2-1)^k}{dx^k}, \ k \in N.$$

Асобныя класы А.с. функцый вывучалі яшчэ ў 18 ст. Л.Ойлер і Д.Бэрнулі, якія раскладалі функцыі ў шэрагі па трыганаметрычнай сістэме, па цыліндрычных функцыях і інш. Важны клас А.с. разглядаў П.Чабышоў у сваіх даследаваннях, звязаных з інтэрпаляцыяй спосабам найменшых квадратаў (гл. *Чабышова мнагасклады*). Адна з асноўных задач тэорыі А.с. функцый ёсць задача пра раскладанне адвольнай функцыі, якая адпавядае пэўным умовам, у шэраг выгляду $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$, дзе $\{\varphi_k(x)\}$ — А.с. (гл. *Фур'е шэраг*).

АРТАГАНАЛЬНЫ БАЗІС — базіс $\{e_n\}$, $n \in N$, эўклідавай прасторы, які адпавядае ўмове $(e_i, e_j) = 0$ пры $i \neq j$. Гл. таксама *Вектарная прастора*.

АРТАГАНАЛЬНЫЯ МНАГАСКЛАДЫ — прыватны выпадак *артаганальнай сістэмы функцый* $\{\varphi_k(x)\}$, $k \in N$, калі кожная функцыя $\varphi_k(x)$ ёсць мнагасклад (гл., напрыклад, *Лягэра мнагасклады*, *Лежандра мнагасклады*, *Чабышова мнагасклады*). А.м. выкарыстоўваюцца ў тэорыі набліжэнняў як сродак выяўлення функцыі ў выглядзе шэрагаў.

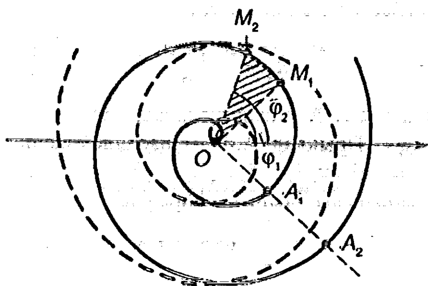
АРТАЦЭНТР (ад грэц. orthos — прамы, правільны і лац. centrum — цэнтр) — пункт перасячэння трох вышыняў трохвугольніка.

АРТЫНАВА КОЛЦА — колца з умовай мінімальнасці для ідэалаў; дуальнае паняцце да нётэрына колца. А.к. с п р а в а (з л е в а), ці колца з умовай абрыву спадальных правых (левых) ідэалаў, — колца, у якім кожная спадальная паслядоўнасць правых (левых) ідэалаў абрываецца на канцым нумары. А.к. таксама можна ўвесці як колца, якое з'яўляецца артынавым модулем над сабой. Кожнае асацыятыўнае А.к. з адзінкай ёсць нётэрына. Названае ў гонар Э.Артына, якому належыць шэраг першых вынікаў у даследаванні такіх колцаў.

АРХІМЕДА АКСІЁМА — аксіёма, якая сцвярджае, што калі адкласці дастатковую колькасць разоў меншы з двух зададзеных адрэзкаў, то заўсёды можна атрымаць адрэзак, які перасягае большы з іх. Аналагічна А.а. фармулюецца для плошчаў, аб'ёмаў, дадатных лікаў і г.д. Наогул, А.а. дастасуецца да нейкай велічыні, калі для адвольных двух значэнняў A і B гэтай велічыні, такіх, што $A < B$, заўсёды можна знайсці цэлы лік m, пры якім $Am > B$. На гэтым заснаваны працэс паслядоўнага дзялення ў арыфметыцы і геаметрыі (гл. *Эўкліда алгарытм*). У 19 ст. даказанае існаванне гэтак званых неархімедавых велічыняў, у дачыненні да якіх А.а. непраўдзівая. А.а. выразна сфармуляваў Архімед, але яшчэ раней яе выкарыстоўваў Эўдокс Кнідскі, таму А.а. часта называюць а к с і ё м а й Э ў д о к с а.

АРХІМЕДА ЦЕЛЫ — тое, што паўправільныя *шматгранікі*. Названыя ў гонар Архімеда, які даказаў існаванне 13 іх тыпаў. Тэорыю А.ц. аднавіў Ё.Кеплер (1619).

АРХІМЕДАВА СПІРАЛЬ — плоская крывая, якую апісвае пункт M пры руху з пункта O з нязменнай хуткасцю v па промні, што аварочваецца вакол полюса O з нязменнай вуглавой хуткасцю ω (гл. рыс.). Раўнанне А.с. у палярных каардынатах



$\rho = a \cdot \varphi$, дзе $a = v/\omega$. А.с. мае дзве галіны, адпаведныя дадатным значэнням φ (суцэльная лінія) і адмоўным (штрыхавая). Адлегласць паміж двума паслядоўнымі віткамі нязменная: $OA_1 = A_1A_2 = 2\pi a$. Плошча сектара M_1OM_2

$$S = \frac{a^2}{6}(\varphi_2^3 - \varphi_1^3).$$

Радыус крывіні

$$R = a\frac{(\varphi^2 + 1)^{3/2}}{\varphi^2 + 2}.$$

Крывая названая ў гонар Архімеда, які вывучаў яе ўласцівасці ў сувязі з задачамі *трысекцыі вугла* і *квадратуры круга* і знайшоў плошчу яе сектара.

АРЫГІНАЛ п е р а ў т в а р э н н я Л я п л я с а — функцыя $f(t)$ рэчаіснай зменнай $t \in (0, \infty)$, якую пераўтварэнне Ляпляса пераводзіць у функцыю $F(p)$ камплекснай зменнай $p = \delta + i\tau$ паводле правіла

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt.$$

АРЫЕНТАВАНАЯ ПАВЕРХНЯ — паверхня, на якой зададзена пэўная *арыентацыя*, напрыклад сфера, на якой зададзенае поле вонкавых нармаляў.

АРЫЕНТАВАНАЯ ПЛОСКАСЦЬ — *плоскасць*, на якой выбраны контур (напрыклад, акружына) з фіксаваным кірункам абыходу. У планіметрыі звычайна лічаць дадатным кірунак абыходу супраць руху гадзіннікавай стрэлкі. Выбраная такім чынам арыентацыя плоскасці задае арыентацыю афінных сістэм адліку: правымі лічацца сістэмы, якія належаць да аднаго класа з сістэмай, у якой пачатак супадае з цэнтрам акружыны, адзін вектар — адвольны, другі выбіраецца так, каб карацейшы паварот ад першага да яго адбыўся ў фіксаваным на акружыне кірунку (супраць руху гадзіннікавай стрэлкі). У E^3 плоскасць арыентуецца заданнем нармальнага вектара паводле правіла шруба.

АРЫЕНТАВАНАЯ ПРОСТАЯ — простая, на якойназначаны дадатны кірунак. Калі на гэтай простай зафіксаваны нейкі пункт (пачатак адліку), то А.п. разбіваецца на дзве паўпростыя — адмоўную і дадатную. Пры найбольш распаўсюджаным гарызантальным размяшчэнні А.п. звычайна дадатным кірункам лічыцца кірунак злева направа.

АРЫЕНТАВА́НЫ ГРАФ — граф, кожны кант якога мае арыентацыю. А.г. задаецца мноствам вяршыняў і наборам упарадкаваных параў вяршыняў.

АРЫЕНТА́ЦЫЯ (франц. orientation, ад лац. oriens (orientis) — усход) — у класічным выпадку гэта выбар аднаго класа сістэм каардынат, звязаных паміж сабою дадатна ў нейкім сэнсе. У выпадку вектарнай прасторы $\mathbf{R}^n$ ці эўклідавай E^n ($n<\infty$) дзве сістэмы маюць аднолькавую арыентацыю, калі матрыца пераходу ад адной сістэмы да другой мае дадатны вызначнік, і процілеглую арыентацыю — калі гэты вызначнік адмоўны. У трохмернай прасторы адрозніваюць правыя і левыя сістэмы. Сістэма $\{e_1, e_2, e_3\}$ будзе п р а в а й, калі, гледзячы з канца вектара e_3, найкарацейшы паварот ад e_2 да e_1 адбываецца супраць гадзіннікавай стрэлкі. Гэтае азначэнне ўмоўнае, бо залежыць ад прынятага кірунку руху гадзіннікавай стрэлкі. Паняцце А. мае дачыненне да *гіперпаверхняў*, у прыватнасці да *гіперплоскасцяў*. Гіперпаверхня арыентуецца заданнем поля нармаляў, а для вызначэння дадатнага кірунку абыходу карыстаюцца правілам шруба.

АРЫТМЕ́ТЫКА — тое, што *арыфметыка*.

АРЫФМЕТЫЗА́ЦЫЯ — метад, які выкарыстоўваецца ў матэматычнай логіцы для замены разважанняў пра выразы якой-небудзь логіка-матэматычнай мовы разважаннямі пра натуральныя лікі. З гэтай мэтай усталёўваецца нейкае даволі простае ўзаемна адназначнае адлюстраванне мноства ўсіх словаў (у алфавіце разглядanай мовы) і паслядоўнасці натуральных лікаў. Дачыненні і аперацыі, вызначаныя на словах, пераходзяць у такім адлюстраванні ў дачыненні і аперацыі, вызначаныя на нумарах (натуральных ліках). Некаторыя асноўныя з гэтых дачыненняў і аперацый павінны мець просты алгарытмічны характар. Упершыню А. выкарыстаў К.Гёдэль для доказу няпоўнасці фармальнай арыфметыкі (гл. *Гёдэля тэарэма пра няпоўнасць*).

АРЫФМЕ́ТЫКА, а р ы т м е т ы к а (грэц. arithmetike ад arithmos — лік) — частка матэматыкі, галоўны аб'ект якой — цэлыя лікі і дзеянні з імі. А. узнікла ў старажытныя часы з патрэбы падліку і простых вымярэнняў. Спачатку было магчыма падлічваць невялікія колькасці рэчаў непасрэдна. Для падліку колькасці элементаў значна большых сукупнасцяў былі створаныя сістэмы лічэнняў. Зручнейшай на практыцы паказала сябе сістэма лічэння з асноваю 10, але існуюць і сістэмы з асновамі 5, 20, 40, 12, 60 і нават 11 (Новая Зеландыя). Апошнім часам у сувязі са значным распаўсюджаннем камп'ютараў на першыя пазіцыі выходзіць *двайковая сістэма лічэння*. Яшчэ да пачатку н.э. у А. былі атрыманыя даволі высокія вынікі: даказана бясконцасць мноства простых лікаў, ірацыянальнасць $\sqrt{2}$, створаны алгарытмы для пошуку агульнай меры двух адрэзкаў і найбольшага агульнага дзельніка двух лікаў (гл. *Эўкліда алгарытм*). З гэтага часу пачалі распрацоўвацца і метады развязання раўнанняў у цэлых ліках (Дыяфант). У сярэднявеччы прагрэс у развіцці А. быў менш значным. Фундаментальнае значэнне А. як навукі стала зразумелым толькі ў канцы 17 ст. у звязку з далучэннем да А. паняцця *ірацыянальнага ліку*. Развіццё апарату сувязяў паміж ірацыянальнымі лікамі і іх дзесятковымі набліжэннямі, а таксама дастасаванне лагарыфмаў значна пашырылі тэматыку даследаванняў у А. Шматлікія пытанні А. знайшлі свой адказ у *лікаў тэорыі*. Спробы аксіяматычнага будавання А., зробленыя ў сярэдзіне 19 ст. Г.Грасманам, прывялі да сістэмы аксіёмаў Пэана А. натуральных лікаў.

АРЫФМЕТЫ́ЧНАЕ ЗНАЧЭ́ННЕ КО́РАНЯ n-й с т у п е н і з л і к у a — тое, што *арыфметычны корань*.

АРЫФМЕТЫ́ЧНАЕ СЯРЭ́ДНЯЕ з н а ч э н н е n л і к а ў $x_1, x_2, ..., x_n$ — велічыня x, якая атрымліваецца дзяленнем іх сумы на колькасць лікаў:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}.$$

АРЫФМЕТЫ́ЧНАЯ ПРАГРЭ́СІЯ — арыфметычная *паслядоўнасць* 1-га парадку, дзе кожны элемент (пачынаючы з другога) атрымліваецца з папярэдняга дадаваннем да яго аднаго і таго ж ліку d, які называецца р о з н а с ц ю гэтай А.п. Кожная А.п. мае выгляд $a, a+d, a+2d, ...$; агульны элемент яе: $a_n = a+(n-1)d,\ n \in N$. Характарыстычная ўласцівасць А.п.:

$$a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}.$$

Калі $d > 0$, то А.п. нарастальная, калі $d < 0$ — спадальная. Прыклад А.п. — паслядоўнасць натуральных лікаў 1, 2, 3, ..., n, ... Суму n элементаў А.п. можна вылічыць па формуле

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2}.$$

АРЫФМЕТЫЧНАЯ ФУНКЦЫЯ — функцыя, у якой аргумент і значэнне — натуральныя лікі.

АРЫФМЕТЫЧНЫ КОРАНЬ, арыфметычнае значэнне кораня n-й ступені з ліку $a \geq 0$ — неадмоўны лік, n-я ступень якога роўная a, $a \in R$.

АСАБЛІВАЯ МАТРЫЦА — тое, што *звыродная матрыца*.

АСАБЛІВЫ ПУНКТ — 1) А.п. крывой, зададзенай раўнаннем $F(x, y) = 0$, — пункт $M_0(x_0, y_0)$, у якім роўныя нулю частковыя вытворныя функцыі $F(x, y)$:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{M_0} = 0, \ \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{M_0} = 0.$$

Калі не роўныя нулю ўсе частковыя вытворныя другога парадку ў пункце M_0, то А.п. называецца падвойным. Пры даследаванні будовы крывой у наваколлі А.п. значную ролю мае знак выразу

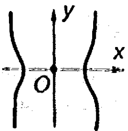
$$\Delta = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_{M_0} \cdot \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_{M_0} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)^2_{M_0}.$$

Калі $\Delta > 0$, то А.п. называецца ізаляваным. Напрыклад, у крывой $y^2 - x^4 + 4x^2 = 0$ пачатак каардынат — ізаляваны А.п. (рыс. 1). Калі $\Delta < 0$, то А.п. называецца пунктам самаперасячэння; напрыклад, у крывой

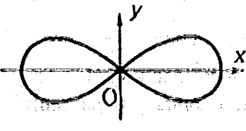
$$(x^2 + y^2 + a^2)^2 - 4a^2x^2 - a^2 = 0$$

пачатак каардынат — пункт самаперасячэння (рыс. 2). Пры $\Delta = 0$ будова крывой каля А.п. можа быць больш складанай; 2) А.п. дыферэнцыяльнага раўнання — пункт, у якім роўныя нулю і лічнік, і назоўнік правай часткі дыферэнцыяльнага раўнання

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$



Рыс. 1



Рыс. 2

дзе P і Q — непарыўна дыферэнцавальныя функцыі. Калі запісаць раўнанне ў выглядзе

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{cx + dy + P_1(x, y)}{ax + by + Q_1(x, y)},$$

дзе $P_1(x, y)$ і $Q_1(x, y)$ бясконца малыя ў дачыненні да $\sqrt{x^2 + y^2}$ у наваколлі пункта (0, 0), то характар А.п. інтэгральных крывых каля А.п. залежыць ад каранёў λ_1 і λ_2 характарыстычнага раўнання

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Існуюць віды А.п.: вузел, сядло, фокус, цэнтр; 3) А.п. аналітычнай функцыі — перашкода для аналітычнага працягу аналітычнай функцыі ўздоўж якога-небудзь шляху. Калі функцыя $f(z)$ пададзеная ў выглядзе ступеневага шэрагу, то на мяжы круга яго збежнасці існуе не менш як адзін А.п. Для шэрагу $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$ усе пункты адзінкавай акружыны $|z| = 1$ асаблівыя.

АСАБЛІВЫ РАЗВЯЗАК звычайнага дыферэнцыяльнага раўнання — развязак, у кожным пункце якога парушаецца адзінасць. Для раўнання

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \ x \in \mathbf{R}^n, \ (t, x) \subset D \subset \mathbf{R}^{1+n},$$

гэта такі развязак раўнання, праз кожны пункт (t_0, x_0) графіка якога праходзяць іншыя развязкі, не супадальныя з першым у адвольным інтэрвале пункта t_0. Графік кожнага А.р. раўнання знаходзіцца на тым мностве, дзе не выконваюцца ўмовы тэарэмы існавання і адзінасці. Развязак, праз кожны пункт графіка якога праходзіць толькі адзін гэты развязак, называецца прыватным развязкам, іншыя развязкі — склеены мі.

АСАЦЫЯТЫЎНАЕ КОЛЦА — *колца*, у якім множанне задавальняе закон *асацыятыўнасці*. Прыклады А.к. — колцы цэлых, рэчаісных і камплексных лікаў, колца квадратных матрыц над полем, колца функцый і г.д. Як самастойны раздзел алгебры тэорыя А.к. сфармавалася да пачатку 20 ст. Яна мае шчыльныя сувязі з рознымі галінамі матэматыкі, асабліва з алгебраічнай геаметрыяй і алгебраічнай тэорыяй лікаў (камутатыўныя колцы), функцыянальным аналізам (камутатыўныя ўнармаваныя колцы, колцы аператараў і функцый).

АСАЦЫЯТЫЎНАСЦЬ — уласцівасць алгебраічнай аперацыі, вызначанай на мностве M, калі для ўсякіх элементаў a, b, c з мноства M праўдзіцца роўнасць $(a \cdot b) \cdot c = (a \cdot b) \cdot c$. Множанні *матрыц*, *падстановак*, *пераўтварэнняў* ёсць асацыя-

тыўныя аперацыі. Вектарнае множанне — не асацыятыўная аперацыя. Для складання і множання лікаў А. азначае выкананне роўнасцяў

$$(a+b)+c=a+(b+c),\ \ (ab)c=(ab)c.$$

АСАЦЫЯТЫЎНАЯ АЛГЕБРА — *асацыятыўнае кольца K* над полем *P*, прычым множанне на элементы поля *P* звязанае з множаннем у алгебры ўмовамі $\alpha(ab)=(\alpha a)b=a(\alpha b), \forall\alpha\in P$. Калі вектарная прастора канцамерная, то алгебра *K* называецца канцамернай А.а. над полем *P*. Прыкладам такой алгебры з'яўляецца алгебра ўсіх $n\times n$-матрыц над полем (поўная матрычная алгебра над полем). Кожная канцамерная простая (г.зн. без уласных ідэалаў) А.а. над полем — гэта поўная матрычная алгебра над целам, канцамерным над сваім цэнтрам (тэарэма Вёдэрбёрна).

АСІМЕТРЫІ КАЭФІЦЫЕНТ — найбольш ужывальная мера асіметрыі размеркавання, якая вызначаецца стасункам $\gamma=\dfrac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}$, дзе μ_2 і μ_3 — адпаведна 2-і і 3-і цэнтральныя моманты размеркавання.

АСІМЕТРЫЧНАСЦЬ (ад грэц. asymmetria — несуразмернасць, бязладнасць) — асіметрычныя дачыненні. Гл. *Адпаведнасць*.

АСІМПТАТЫЧНАЯ ВЫТВОРНАЯ — ліміт тасунку $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, калі x імкнецца да x_0 і прабягае пункты мноства, для якога x_0 ёсць *шчыльнасці пункт*. А.в. абагульняе паняцце *вытворнай*.

АСІМПТАТЫЧНАЯ ЛІНІЯ — лінія γ на рэгулярнай паверхні *M*, *нармальная крывіня* якой уздоўж γ роўная нулю. А.л. вызначаюцца дыферэнцыяльным раўнаннем

$$Y_2=Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2=0,$$

дзе Y_2 — другая квадратовая форма паверхні *M*. Праз кожны пункт парабалічнага тыпу (дзе поўная крывіня $K=0, Y_2\neq 0$) праходзіць адзіная А.л. Праз кожны пункт гіпербалічнага тыпу ($K<0$) праходзяць дзве і толькі дзве А.л., якія ўтвараюць асімптатычную сетку на паверхні. На паверхнях, якія складаюцца з пунктаў эліптычнага тыпу ($K>0$), А.л. адсутнічаюць. Судатычная плоскасць А.л. γ (там, дзе яна існуе) супадае з датычнай плоскасцю паверхні *M* (у пунктах γ).

АСІМПТАТЫЧНАЯ РОЎНАСЦЬ дзвюх функцый $f(x)$ і $g(x)$ пры $x\to x_0$ — набліжаная роўнасць, якая вызначаецца стасункам $f(x)=g(x)\cdot(1+o(1))$ пры $x\to x_0$. Такім чынам, А.р. функцый $f(x)$ і $g(x)$ пры $x\to x_0$ азначае, што параўнальная хібнасць $\dfrac{f(x)-g(x)}{g(x)}$ пры $g(x)\neq 0$ з'яўляецца бясконца малой велічынёй $o(1)$ пры $x\to x_0$. А.р. запісваецца $f(x)\sim g(x)$ пры $x\to x_0$ (або $f=g+o(g)$, ці $g=f+o(x)$), а самі функцыі $f(x)$ і $g(x)$ у гэтым выпадку называюцца эквівалентнымі пры $x\to x_0$.

АСІМПТАТЫЧНАЯ ФОРМУЛА — формула, з дапамогай якой дадзеную функцыю $f(x)$ можна замяніць на функцыю $g(x)$, пабудаваную больш проста, а рознасць $|f(x)-g(x)|$ пры $x\to x_0$ не істотная ў параўнанні з $g(x)$. Напрыклад, $\cos x=1+O(x^2)$, $x\to 0$; $x^3+x^2+1\sim x^3$, $x\to\infty$; функцыю $\pi(x)$ — колькасць простых лікаў, якія не пераўзыходзяць x, можна падаць у выглядзе

$$\pi(x)=\frac{x}{\ln x}+o\left(\frac{x}{\ln x}\right),\ \ x\to\infty.$$

АСІМПТАТЫЧНЫ ВЫРАЗ функцыі — набліжанае выяўленне функцыі з дапамогай іншай больш простай функцыі на аснове іх асімптатычнай роўнасці. Дакладней, функцыя $g(x)$ служыць А.в. для функцыі $f(x)$ пры $x\to x_0$, калі $f(x)\sim g(x)$, г.зн. $f(x)=g(x)\cdot(1+o(1))$ пры $x\to x_0$. А.в. функцый выкарыстоўваецца для вывучэння паводзін функцый пры імкненні аргумента да нейкага ліміту. Напрыклад, $\sin x\sim x$, $\ln(1+x)\sim x$ пры $x\to 0$. А.в. можна зрабіць больш дакладным за кошт дадатковых складнікаў, калі карыстацца асімптатычным раскладам функцый. А.в. разглядаюцца таксама ў камплексным абсягу.

АСІМПТАТЫЧНЫ РАСКЛАД функцыі $f(x)$ — шэраг $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\varphi_n(x)$ такі, што для адвольнага цэлага $N\geq 0$ маем

$$f(x)=\sum_{n=0}^{N}\varphi_n(x)+o(\varphi_n(x))$$

пры $x\to x_0$, дзе кожны наступны элемент шэрагу бясконца малы ў параўнанні з папярэднім. У гэтым выпадку пішуць

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(x)$$

пры $x\to x_0$. Шэраг $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\varphi_n(x)$ называецца асімптатычным шэрагам. Найбольш ужывальныя і зруч-

ныя ступеневыя шэрагі, у прыватнасці шэрагі Тэйлара. Напрыклад, пры $x \to 0$

$$\sin x \sim x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots$$

Асімптатычныя шэрагі могуць разбягацца. Аднак, калі абмяжоўвацца концай колькасцю складнікаў А.р., можна атрымаць карысныя формулы і выкарыстоўваць іх для набліжанага вылічэння функцый, ацэнкі інтэгралаў, развязання раўнанняў. Метад А.р. — эфектыўны метад вывучэння функцый у лікавых задачах матэматыкі, механікі, фізікі.

АСІМПТАТЫ́ЧНЫ СТАСУ́НАК — дачыненне, якое апісвае паводзіны пры $x \to x_0$ дадзенай функцыі $f(x)$ у тэрмінах вядомай функцыі $g(x)$. Каб апісаць іх, выкарыстоўваюцца сімвалы o, O і знак "~" эквівалентнасці: а) $f(x) = o(g(x))$ пры $x \to x_0$, калі

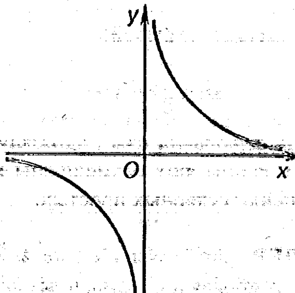
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0;$$

б) $f(x) = O(g(x))$ пры $x \to x_0$, калі тасунак $f(x)/g(x)$ абмежаваны пры $x \neq x_0$ у нейкім наваколлі x_0. У прыватнасці, калі

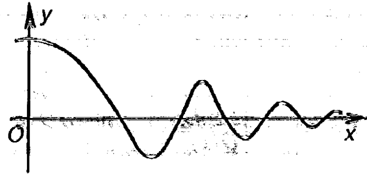
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = k \neq 0,$$

то $f(x) \sim k \cdot g(x)$ пры $x \to x_0$.

АСІМПТО́ТА крывой з бясконцай галінай (ад грэц. asýmptōtos — несупадальны, недатыкальны) — такая простая, што адлегласць ад пункта дадзенай крывой да гэтай простай імкнецца да нуля пры неабмежаваным аддаленні пункта па бясконцай галіне крывой. Напрыклад, у гіпербалы $y = 1/x$ (рыс. 1) асімптотамі з'яўляюцца восі каардынат Ox і Oy. Крывая можа перасякаць сваю А. (напрыклад, графік згасальных ваганняў, рыс. 2). Крывыя з бясконцымі галінамі могуць не мець А.



Рыс. 1



Рыс. 2

(напрыклад, няма А. у парабалы). Калі функцыя вызначана на промні $(a, +\infty)$ і мае месца $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, дзе $k, b \in \mathbb{R}$, $\alpha(x) \to 0$ пры $x \to +\infty$, то простая $y = kx + b$ будзе нахільнай А. управа графіка функцыі $f(x)$. Аналагічна вызначаецца А. улева (пры $x \to -\infty$). Калі нахільная А. існуе, то

$$k = \lim \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim (f(x) - kx)$$

адпаведна пры $x \to +\infty$ або $x \to -\infty$. У выпадку, калі $k = 0$, А. гарызантальная, яе раўнанне $y = b$, дзе $b = \lim f(x)$ пры $x \to +\infty$ або $x \to -\infty$. Калі лінія $x = x(t)$, $y = y(t)$ мае вертыкальную А. пры $t \to t_0$, то $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = \pm\infty$ і раўнанне А. мае выгляд $x = c$, дзе $c = \lim\limits_{t \to t_0} x(t)$; калі мае пры $t \to t_0$ нахільную А. $y = kx + b$, то

$$k = \lim_{t \to t_0} \frac{y(t)}{x(t)}, \; b = \lim_{t \to t_0} (y(t) - kx(t)).$$

АСТА́ЧА — 1) лік r, які атрымліваецца ў выпадку, калі цэлы лік b не дзеліць нацэла цэлы лік a; тады пішуць $a = bt + r$, $t \in z$, $0 \le r \le b - 1$; 2) рэшткавы складнік раскладу функцыі; адытыўны складнік у формуле, якая задае апраксімацыю функцыі з дапамогай іншай, у нейкім сэнсе больш простай функцыі. А. роўная рознасці паміж зададзенай функцыяй і функцыяй, якая яе набліжае. Ацэнка А. — гэта ацэнка дакладнасці разгляданай апраксімацыі. Напрыклад, у *Тэйлара формуле*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^n - O((x - x_0)^n), \; x \to x_0.$$

А. (у форме Пеана) называецца складнік $o((x - x_0)^n)$; у *Стэрлінга формуле*, якая дае асімптатычны расклад *гама-функцыі*,

$$\Gamma(z + 1) = \sqrt{2\pi z}\left(\frac{z}{e}\right)^z + o\left(e^{-z} \cdot z^{z - \frac{1}{2}}\right), \; \mathrm{Re}\, z \to \infty.$$

А. з'яўляецца $o\left(e^{-z} \cdot z^{z - \frac{1}{2}}\right)$.

АСТРАГРА́ДСКАГА МЕ́ТАД — метад вылучэння рацыянальнай часткі нявызначанага інтэграла

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx, \qquad (1)$$

дзе $Q(x)$ — мнагасклад ступені n, які мае кратныя карані, а $P(x)$ — мнагасклад ступені $m \leq n-1$. А.м. дае магчымасць, карыстаючыся алгебраічнымі прыёмамі, запісаць інтэграл (1) у выглядзе двух складнікаў, першы з якіх ёсць рацыянальная функцыя зменнай x, а другі рацыянальнай часткі не змяшчае:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx, \qquad (2)$$

дзе Q_1, Q_2, P_1 і P_2 — мнагасклады адпаведна ступеняў n_1, n_2, m_1 і m_2, прычым $n_1 + n_2 = n$, $m_1 \leq n_1 - 1$, $m_2 \leq n_2 - 1$. Мнагасклад $Q_1(x)$ — найбольшы супольны дзельнік мнагасклада $Q(x)$ і яго вытворнай $Q'(x)$, г.зн. яўны выраз $Q_1(x)$ можна атрымаць, напрыклад, на падставе *Эўкліда алгарытму*. Мнагасклад $Q_2(x)$ роўны дзелі $Q(x)/Q_1(x)$ і таму не мае кратных караней. Нявызначаныя каэфіцыенты мнагасkладаў $P_1(x)$ і $P_2(x)$ вылічаюцца пры дапамозе дыферэнцавання тоеснасці (2) і метаду нявызначаных каэфіцыентаў. А.м. упершыню прапанаваў М.Астраградскі (1844).

АСТРАГРА́ДСКАГА ФО́РМУЛА — формула інтэгральнага злічэння функцый многіх зменных, якая выяўляе сувязь паміж n-кратным інтэгралам па абмежаваным абсягу $G \subset R^n$ і $(n-1)$-кратным інтэгралам па мяжы ∂G абсягу G. Мяжа ∂G — гэта аб'яднанне конечага мноства кавалкава-гладкіх $(n-1)$-мерных гіперпаверхняў, арыентаваных з дапамогай вонкавай нармалі ν. Для гладкіх функцый у трохмерным выпадку атрымана М.Астраградскім (1829) і мае выгляд:

$$\iiint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz =$$

$$= \iint_{\partial G} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy,$$

дзе P, Q, R — функцыі пункта (x, y, z) з $G \cup \partial G$. У тэрмінах вектарнага аналізу А.ф. азначае, што інтэграл ад *дывергенцыі* вектара $\boldsymbol{a}$ па абсягу G роўны *плыні* вектара $\boldsymbol{a}$ праз мяжу ∂G:

$$\int_G \cdots \int \mathrm{div}\, a \cdot dv = \int_{\partial G} \cdots \int a \cdot \nu \cdot d\sigma,$$

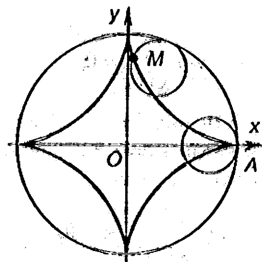
дзе dv — элемент аб'ёму абсягу G, $d\sigma$ — элемент паверхні мяжы ∂G. Абагульненнем А.ф. ёсць *Стокса формула* для мнагастайнасці з краем.

АСТРО́ІДА (ад грэч. astron — зорка + eidos — выгляд) — плоская алгебраічная крывая 6-га парадку, якая апісвае пунктам M акружыны радыусам r, што коціцца па нутраным баку акружыны радыусам $R = 4r$. Раўнанне А. у прамавугольных дэкартавых каардынатах:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = R^{2/3},$$

параметрычныя раўнанні:

$$x = R\cos^3\frac{t}{4}; \quad y = R\sin^3\frac{t}{4}.$$



А. мае 4 пункты звароту (гл. рыс.). Даўжыня дугі ад пункта A

$$l = \frac{3}{2}R\sin^2\frac{t}{4}.$$

Даўжыня ўсёй крывой $6R$. Радыус крывіні

$$r_k = \frac{3}{2}R\sin\frac{t}{2}.$$

Плошча, абмежаваная крывой:

$$S = \frac{3}{8}\pi R^2.$$

А. з'яўляецца *агінальнай* сям'і адрэзкаў нязменнай даўжыні, канцы якіх размешчаны на дзвюх узаемна перпендыкулярных простых.

АСЭ́МБЛЕР (англ. assembler, ад assemble — збіраць) — службовая праграма, прызначаная для перакладу праграм (якія належыць выканаць на камп'ютары) на лічбавую мову камп'ютара. Адзін з відаў *транслятара*. Выходныя праграмы для А. запісваюцца ў сістэме абазначэнняў, блізкай да мовы машынных камандаў, але больш зручнай для чалавека.

АТЛАС тапалагічнай прасторы M — мноства $\{(U_i, \varphi_i)\}$ лакальных картаў гэтай прасторы, для якіх φ_i — гомеамарфізмы адкрытых падмностваў $U_i \subset M$ на адкрытыя падмноствы прасторы $\mathbf{R}^n$, якія накрываюць M, г.зн. $\bigcup_i U_i = M$. Прыкладам А. на паверхні сферы будуць *стэрэаграфічныя праекцыі* сферы з паўночнага і паўднёвага полюсаў.

АЎТАМАРФІЗМ — ізамарфізм нейкага аб'екта на сябе. Калі A — аб'ект катэгорыі U, $\mathrm{Aut}\,(A)$ — мноства ўсіх яго А., то $\mathrm{Aut}\,(A)$ — група ў дачыненні да камназіцыі А.

АЎТАМАТ (ад грэц. automatos — самадзейны) — 1) прылада, прызначаная для выканання матапакіраваных дзеянняў без простага ўдзелу чалавека. Скарыстанне А. значна павялічвае прадукцыйнасць працы, хуткасць і зладжанасць вытворчага працэсу. А. атрымалі пашырэнне ў вытворчасці як аснова тэхнічнага прагрэсу; 2) м а т э м а т ы ч н а е п а н я ц ц е — матэматычная мадэль аўтамата і біялагічных сістэм, наогул усіх сістэм, якія перапрацоўваюць інфармацыю. Абстракцыя А. можна ўявіць як нейкую прыладу ("чорную скрынку"), што мае концы лік уваходных і выхадных каналаў і пэўнае мноства унутраных станаў. На ўваходныя каналы А. звонку паступаюць сігналы, і ў залежнасці ад таго, у якім стане ён знаходзіўся, А. пераходзіць у наступны стан і выдае сігналы на свае выхадныя каналы. Такім чынам, матэматычная мадэль А. задаецца з дапамогай трох мностваў (уваходных сігналаў, станаў і выхадных сігналаў) і двух функцый (пераходаў і выхадаў); функцыя пераходаў пераводзіць першыя два мноствы ў другое, функцыя выхадаў — адпаведна ў трэцяе. Час у аўтамаце падзяляецца на асобныя прамежкі (такты). Змены станаў А., а таксама ўваходных і выхадных сігналаў адбываюцца на межах тактаў — А. працуе ў дыскрэтным часе. У залежнасці ад характарыстык вызначальных мностваў і функцый А. падзяляюцца на концыя і бясконцыя, імавернасныя і дэтэрмінаваныя і г.д.

АЎТАМАТА ПАВОДЗІНЫ — матэматычнае паняцце, якое апісвае ўзаемадзеянне *аўтамата* з вонкавым асяроддзем. Прыкладам вонкавага асяроддзя концага аўтамата ёсць мноства яго ўваходных словаў, а паводзінамі — слоўнікавая функцыя, што рэалізуецца аўтаматам, або падзея, якая вызначаецца аўтаматам.

АЎТАМАТАЎ АЛГЕБРАІЧНАЯ ТЭОРЫЯ — кірунак у *аўтаматаў тэорыі*, дзе выкарыстоўваюцца алгебраічныя сродкі ў вывучэнні аўтаматаў. Грунтуецца на тым, што аўтаматы можна разглядаць як спецыяльныя алгебры ці алгебраічныя сістэмы. Падзеі, якія адлюстроўваюцца концымі аўтаматамі, у дачыненні да аперацый *аб'яднання, здабытку* і *ітэрацыі* ствараюць *алгебру*, што вызначаецца концым мноствам гэтак званых элементарных падзей, кожная з якіх ёсць аднаілітарнае (ці пустое) слова. Алгебраічны падыход дазваляе выкарыстоўваць алгебраічныя вынікі ў тэорыі аўтаматаў, а таксама дапамагае знаходзіць сувязі тэорыі аўтаматаў з іншымі галінамі матэматыкі.

АЎТАМАТАЎ ТЭОРЫЯ — раздзел тэарэтычнай *кібернетыкі*, які ўзнік з развіццём аўтаматызацыі вытворчасці і тэхнікі вылічальных і мадэлявальных прыстасаванняў. Вывучае *аўтаматы* — абстрактныя мадэлі рэальных тэхнічных ці біялагічных сістэм, якія перапрацоўваюць інфармацыю. Пераўтварэнне інфармацыі ў аўтамаце можа быць дэтэрмінаванае або імавернаснае, а сама інфармацыя — непарыўная або дыскрэтная. З улікам гэтых абставін аўтаматы падзяляюцца на н е п а р ы ў н ы я і д ы с к р э т н ы я, д э т э р м і н а в а н ы я і і м а в е р н а с н ы я. У залежнасці ад аб'ёму памяці, якую выкарыстоўвае аўтамат, адрозніваюць аўтаматы з концай памяццю (гл. *Концы аўтамат*) і аўтаматы з неабмежаванай памяццю (гл. *Бясконцы аўтамат*). Асноўная задача А.т. — аналіз і сінтэз аўтаматаў. Матэматычны апарат А.т. складаецца з матэматычнай логікі, алгебры, тэорыі графаў, камбінаторыкі і тэорыі імавернасцяў. Вынікі А.т. шырока выкарыстоўваюцца ў розных галінах тэхнікі і біялогіі, напрыклад пры стварэнні вылічальных машын розных сістэм кіравання і рэгулявання, пры мадэляванні біялагічных сістэм.

АЎТАМОРФНАЯ ФУНКЦЫЯ — *мераморфная функцыя*, значэнні якой не змяняюцца, калі на яе аргумент накладваецца некаторае дробава-лінейнае пераўтварэнне. Няхай D — абсяг, $D \subset \mathbf{C}$, Γ — нейкая група дробава-лінейных пераўтварэнняў $T: z \to \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$, якая дзейнічае ў абсягу D. Кожная адназначная аналітычная функцыя $f\colon D \to \mathbf{C}$, для якой выконваецца ўмова $\forall T f(T(z)) \equiv f(z)$, называецца ф у н к ц ы я й, а ў т а м о р ф н а й у д а ч ы н е н н і д а г р у п ы Γ. Прыклады А.ф.: мераморфныя ў $\mathbf{C}$ перыядычныя функцыі з асноўным перыядам $T \neq 0$, $f(z + nT) \equiv f(z)$, $n \in \mathbf{Z}$, два-

якаперыядычныя (эліптычныя функцыі) з асноўнымі перыядамі ω_1 і ω_2: $f(z+n\omega_1+m\omega_2)=f(z)$, $m,n\in \mathbf{Z}$, а таксама мадулярныя функцыі, г.зн. аўтаморфныя ў дачыненні да *мадулярнай групы* і яе падгрупаў.

АФІННАЕ ПЕРАЎТВАРЭННЕ — узаемна адназначнае пунктавае адлюстраванне плоскасці ці прасторы на сябе. Пры гэтым тром пунктам, якія знаходзяцца на адной простай, адпавядаюць тры пункты таксама адной простай А.п. адлюстроўваюць простыя ў простыя, прычым перасякальныя — у перасякальныя, паралельныя — у паралельныя, крыжаваныя — у крыжаваныя. А.п. плоскасці вызначаецца формуламі

$$x' = c_{11}x + c_{12}y,$$

$$y' = c_{21}x + c_{22}y,$$

дзе $\begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, г.зн. А.п. — незвыроднае *лінейнае пераўтварэнне*. Аналагічна вызначаецца А.п. у прасторы.

Прыклады А.п.: ізаметрычнае пераўтварэнне, пераўтварэнне падобнасці, раўнамернае сцісканне да простай. Пры А.п. алгебраічная лінія пераходзіць у алгебраічную, пры гэтым парадак лініі захоўваецца. У прыватнасці, лінія другога парадку пераходзіць у лінію другога (эліпсы — у эліпсы, гіпербалы — у гіпербалы, парабалы — у парабалы).

АФІННАЯ АЛГЕБРАІЧНАЯ МНАГАСТАЙНАСЦЬ — адзін з асноўных аб'ектаў *алгебраічнай геаметрыі*. Падмноства ў K^n, дзе K — поле, называецца замкнёным паводле Зарыскага, калі яно можа быць зададзена сістэмай паліномных раўнанняў у дачыненні да стандартных каардынат у K^n. Заўжды можна абысціся концай сістэмай такіх раўнанняў (Д.Гільбэрт, 1890). Замкнёныя паводле Зарыскага падмноствы задаюць тапалогію на $\mathbf{R}^n$ (*Зарыскага тапалогію*). А.а.м. — замкнёнае паводле Зарыскага падмноства ў $\mathbf{R}^n$, якое не з'яўляецца аб'яднаннем двух строга меншых замкнёных падмностваў. На яго пераносіцца з $\mathbf{R}^n$ тапалогія Зарыскага. Калі каэфіцыенты раўнанняў, якія задаюць А.а.м. X, ляжаць у падполі $F=K$, то кажуць, што X — А.а.м. над F. Абмежаванні паліномаў (рацыянальных функцый) на $\mathbf{R}^n$ на А.а.м. $X\subset K^n$ называюцца рэгулярнымі (рацыянальнымі) функцыямі на X.

АФІННАЯ ГЕАМЕТРЫЯ (ад лац. affinis — родны) — раздзел *геаметрыі*, у якім вывучаюцца ўласцівасці фігур на плоскасці (ці ў прасторы), што захоўваюцца пры адвольных *афінных пераўтварэннях* плоскасці ці прасторы, г.зн. інварыянтныя ў дачыненні да такіх пераўтварэнняў. Асноўны афінны інварыянт — просты тасунак трох пунктаў M_1, M_2, M_3 адной простай $|x_2-x_1|:|x_3-x_2|$, дзе x_i — іх абцысы. Афінныя інварыянты адвольнай сістэмы з n пунктаў ($n\geq 4$) можна выразіць праз простыя тасункі. Адсюль, у прыватнасці, вынікае, што цэнтр цяжару геаметрычнай фігуры захоўваецца пры афінных пераўтварэннях. Апошнія ўпершыню разгледаў Л.Ойлер, ён прапанаваў лацінскі тэрмін affinitas — роднасць (1748). Уласцівасць геаметрычных вобразаў, якія пераходзяць адзін у адзін пры афінных пераўтварэннях, першым вывучаў А.Мёбіус у 1-й палове 19 ст. Тэрмін А.г. усталяваўся пасля прапанаванай Ф.Кляйнам у 1872 г. *эрлангенскай праграмы*, паводле якой кожнай групе пераўтварэнняў адпавядае свая геаметрыя, якая вывучае ўласцівасці фігур, інварыянтныя ў дачыненні да пераўтварэнняў гэтай групы.

АФІННАЯ ПРАСТОРА над полем k — мноства A (элементы A называюцца пунктамі А.п.), да якога далучаныя вектарная прастора L над k і адлюстраванне мноства $A\times A$ у прастору L. Вобраз элемента $(a,b)\in A\times A$ пазначаецца $\mathbf{ab}$ і называецца вектарам з пачаткам a і канцом b, які мае наступныя ўласцівасці:

а) для адвольнага пункта a адлюстраванне $X\rightarrow \mathbf{ax}$, $X\in A$, з'яўляецца біекцыяй A на L;

б) для адвольных пунктаў $a,b,c\in A$ праўдзіцца тоеснасць

$$\mathbf{ab}+\mathbf{bc}+\mathbf{ca}=\mathbf{0}.$$

Памернасцю А.п. A называюць памернасць L.

Б

БА́ЕСА ФО́РМУЛА — формула, якая дазваляе вылічаць *апастэрыёрныя імавернасці* падзей (або гіпотэз) праз *апрыёрныя імавернасці*. Няхай $A_1,...,A_n$ — поўная група падзей, г.зн. $\cup A_i = \Omega$, $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$. Тады апастэрыёрная імавернасць $P(A_j/B)$ падзеі A пры ўмове, што адбылася падзея B, вылічаецца па формуле

$$P(A_j/B) = \frac{P(A_i)P(B/A_i)}{\sum_{j-1}^{n} P(A_j)P(B/A_j)},$$

дзе $P(A_j)$ — апрыёрная імавернасць падзеі A_j, $P(B/A_j)$ — умоўная імавернасць падзеі B пры ўмове, што адбылася падзея A_j.

БА́ЗА ЗВЕ́СТАК — структураваная сукупнасць звестак, якая забяспечвае адэкватную мадэль прадметнага абсягу пры мінімальным лішку звестак. У Б.з. змяшчаецца інфармацыя пра аб'екты прадметнага абсягу і дачыненні паміж імі. Паводле арганізацыі сваіх звестак Б.з. падзяляюцца на сеткавыя, іерархічныя і рэляцыйныя. Для маніпулявання са звесткамі, якія знаходзяцца ў Б.з., служыць сістэма кіравання Б.з., што забяспечвае заданне структуры запісу, папаўненне, рэдагаванне, пошук і прагляд інфармацыі ў Б.з., фармаванне і друкаванне справаздач, а таксама іншыя аперацыі са звесткамі. Уласцівасць Б.з. — яе незалежнасць ад дастасоўных праграм, з якімі яна ўзаемадзейнічае.

БА́ЗІС м н о с т в а X — мінімальнае падмноства, якое з'яўляецца сістэмай ствαральных для X у дачыненні да аперацыі, вызначанай дадзенай структурай. Базіс вектарнай прасторы V над полем **K** — гэта сям'я вектараў $(e_i)_{i\in I}$ прасторы V, якая задавальняе дзве ўмовы: 1) $(e_i)_{i\in I}$ — *лінейна незалежная*; 2) $(e_i)_{i\in I}$ з'яўляецца сістэмай с т в а р а л ь н ы х прасторы V (гэта значыць, што для кожнага вектара $\boldsymbol{a}$ існуе сям'я скаляраў $(x_i)_{i\in I}$, $x_i =$ $= 0$ для ўсіх, акрамя концага мноства індэксаў i, такая, што $\boldsymbol{a} = \sum_{i\in I} x_i e_i$). У прыватнасці, у выпадку канцамернай вектарнай прасторы V, $\dim V = n$, Б. — гэта ўпарадкаваны набор вектараў $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n)$ такі, што: 1) з умовы $x_1 \boldsymbol{e}_1 + ... + x_n \boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{0}$ вынікае $x_1 = ... = x_n = 0$; 2) для кожнага вектара $\boldsymbol{a} \in V$ існуюць скаляры $x_1, ..., x_n \in \mathbf{K}$ такія, што $\boldsymbol{a} = x_1\boldsymbol{e}_1 + ...$ $+ x_n \boldsymbol{e}_n$. Скаляры $x_1, ..., x_n$ называюцца к а а р д ы н а т а м і в е к т а р а $\boldsymbol{a}$ у дачыненні да Б. $(\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_n)$. Б. існуюць у кожнай *вектарнай прасторы*; калі прастора V мае n-элементавы Б., то кожны Б. V складаецца з n вектараў. Б. *тапалагічнай прасторы* (X, r) — гэта такая сям'я $(U_i)_{i\in I}$ адкрытых мностваў тапалогіі r, што кожнае адкрытае мноства $U \in r$ ёсць аб'яднанне: $U = \cup U_i$, $i \in I' \subset I$ (мінімальнасці тут не патрабуецца).

БА́ЗІСНЫ ВЕ́КТАР — вектар, які ўваходзіць у *базіс* нейкай вектарнай прасторы.

БА́ЗІСНЫ МІНО́Р м а т р ы ц ы — такі не роўны нулю *мінор* парадку k гэтай матрыцы, што ўсе міноры парадку $k + 1$, якія змяшчаюць гэты мінор, роўныя нулю. Парадак кожнага Б.м. матрыцы роўны яе *рангу*. Усе слупкі (радкі) Б.м. лінейна незалежныя, прычым кожны слупок (радок) матрыцы ёсць лінейная камбінацыя гэтых слупкоў (радкоў).

БАЛЬЦА́НА—ВА́ЕРШТРАСА ТЭАРЭ́МА — тэарэма, паводле якой кожная абмежаваная лікавая паслядоўнасць змяшчае збежную падпаслядоўнасць. Доказ Б.—В.т., які грунтуецца на паслядоўным дзяленні адрэзка папалам, даў ідэю агульнаму прынцыпу *ўкладзеных адрэзкаў* Кантара. У такім выглядзе Б.—В.т. мае шматлікія абагульненні на поле камплексных лікаў, канцамерныя эўклідавы прасторы і г.д.

БА́НАХАВА А́ЛГЕБРА — *тапалагічная алгебра* A над полем камплексных лікаў, тапалогія якой задаецца нормай, у дачыненні да якой A — *банахава прастора*, прычым множанне элементаў ёсць непарыўнае па кожным множніку. Б.а. называецца к а м у т а т ы ў н а й, калі $xy = yx$ для ўсіх $x, y \in A$. Б.а. называецца а л г е б р а й з а д з і н к а й, калі A мае такі элемент $e \in$ A, што $ex = xe = x$ для ўсіх $x \in$ A. Калі ў Б.а. няма адзінкі, то яе можна заўсёды далучыць. Ва ўсякай Б.а. з адзінкай можна так змяніць норму на эквівалентную, каб у новай норме выконваліся стасункі: $\|xy\| \le \|x\| \cdot \|y\|$, $\|e\| = 1$.

Калі ў Б.а. усякі элемент мае адваротны, то алгебра ізаметрычна ізаморфная полю камплексных лікаў (т э а р э м а Г е л ь ф а н д а — М а з у р а). Адна з важных задач Б.а. — задача апісання максімальных ідэалаў у Б.а. Тэорыя Б.а. (у асаблівасці камутатыўных) мае многія дастасаванні ў розных галінах матэматыкі і тэарэтычнай фізікі.

БÁНАХАВА ПРАСТÓРА — поўная ўнармаваная вектарная прастора. Даследаваная С.Банахам (1922). Тэорыя Б.п. — добра распрацаваны раздзел функцыянальнага аналізу, які мае шматлікія матэматычныя дастасаванні. Развівалася паралельна з агульнай тэорыяй тапалагічных вектарных прастораў. Для Б.п. праўдзіцца тэарэма Хана — Банаха пра пашырэнне лінейных функцыяналаў: калі лінейны непарыўны функцыянал зададзены ў падпрасторы Y унармаванай прасторы X, то ён можа быць распаўсюджаны з захаваннем лінейнасці і непарыўнасці на ўсю прастору X. У Б.п. справядлівыя таксама тэарэмы для лінейных аператараў. Тэарэма Банаха — Штайнгаўза: калі мноства лінейных абмежаваных аператараў $T = \{T_\alpha\}$, $T_\alpha : X \to Y$, дзе X — Б.п., Y — унармаваная прастора, абмежаванае ў кожным пункце, то яно абмежаванае па норме. Тэарэма Банаха пра адваротны аператар: калі X, Y — Б.п. і абмежаваны аператар $A : X \to Y$ біектыўны, то адваротны аператар A^{-1} таксама абмежаваны.

БÁНК ЗВЕ́СТАК — сукупнасць звестак (базаў звестак, файлаў), якія далучаюцца да аднаго прадметнага абсягу. У сучасных Б.з. прадугледжана магчымасць звяртацца да іх многім карыстальнікам праз вылічальныя (інфармацыйныя) сеткі.

БАРЭ́ЛЕВА МНÓСТВА — *вымернае мноства*, якое атрымліваецца ў выніку не больш як злічальнай сукупнасці аперацый аб'яднання і перасячэння адкрытых і замкнёных мностваў тапалагічнай прасторы. Б.м. таксама элемент найменшага замкнёнага ў дачыненні дапаўненняў злічальнага адытыўнага класа мностваў, які змяшчае замкнёныя мноствы. Б.м. увёў Э.Барэль (1898).

БАРЭ́ЛЕВА ПÓЛЕ МНÓСТВАЎ, утворанае сістэмай мностваў M — найменшая сістэма мностваў, якая змяшчае M і замкнёная ў дачыненні да аперацый злічальнага аб'яднання і пераходу да дапаўненняў.

БЕЛАРУ́СКАЕ МАТЭМАТЫ́ЧНАЕ ТАВАРЫ́СТВА (БМТ) — грамадская арганізацыя, якая на добраахвотных пачатках аб'ядноўвае спецыялістаў, што вядуць навуковыя даследаванні ў галіне матэматыкі і яе дастасаванняў. Асноўная мэта БМТ — спрыянне развіццю матэматыкі і матэматычнай адукацыі ў Беларусі, умацаванне міжнародных сувязяў і міжнароднага аўтарытэту беларускіх матэматыкаў. БМТ створанае ў 1993 г. Яго прэзідэнтам абраны акад. І.Гайшун. З сакавіка 1994 г. пры БМТ працуе навуковы семінар "Матэматычныя даследаванні", на паседжаннях якога абмяркоўваюцца актуальныя праблемы матэматыкі і яе дастасаванняў, а таксама працы, што прэтэндуюць на доктарскія дысертацыі.

У верасні 1994 г. БМТ прынята ў Еўрапейскае матэматычнае таварыства. Пад эгідай БМТ рэгулярна праводзяцца міжнародныя матэматычныя канферэнцыі: VII і VIII Беларускія матэматычныя канферэнцыі; Яругінскія чытанні (памяці акад. М.Яругіна); "Алгебра і матэматычная кібернетыка" (памяці акад. Дз. Супруненкі); "Дыяфантаў аналіз і яго дастасаванні" (памяці акад. У.Спрынджука); "Межавыя задачы, спецыяльныя функцыі і дробавае злічэнне" (памяці акад. Ф.Гахава); "Дынамічныя сістэмы: устойлівасць, кіраванне, аптымізацыя" (памяці акад. Я.Барбашына); рэспубліканскія канферэнцыі па звычайных дыферэнцыяльных раўнаннях (памяці праф. Ю.Багданава) і інш. Інфармацыя аб працы БМТ і семінарах БМТ друкуецца ў часопісе "Весці НАН Беларусі", серыя фізіка-матэматычная.

БЕРНШТЭ́ЙНА НЯРÓЎНАСЦЬ — 1) няроўнасць тэорыі набліжанняў, якая ацэньвае вытворную трыганаметрычнага мнагаскладу ці алгебраічнага мнагаскладу праз найбольшае значэнне самога мнагаскладу. Даказаў С.Бернштэйн (1912). Калі $T_n(x)$ — трыганаметрычны палінам парадку не вышэй за n, $M = \max|T_n(x)|$, то для кожнага x праўдзяцца няроўнасці $|T_n^{m}(x)| \le Mn^r$, $r = 1, 2, \ldots$. Б.н. для алгебраічных палінамаў мае наступны сэнс: калі палінам $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ задавальняе ўмову $|P_n(x)| \le M$, $a \le x \le b$, то для яго вытворнай $P_n'(x)$ праўдзіцца няроўнасць $|P_n'(x)| \le \le \dfrac{Mn}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$, $a < x < b$; 2) Б.н. у *імавернасцяў тэорыі* — удакладненне класічнай *Чабышова няроўнасці*.

БЕСКААЛІЦЫ́ЙНАЯ ГУЛЬНЯ́ — гульня з канцым мноствам гульцоў $I = \{1, \ldots, n\}$, мноствам стратэгій $\{x_i\}_{i \in I}$, мноствам функцый выйгрышу $\{H_i\}_{i \in I}$, дадзеных на мностве ўсіх сітуацый $x = = \prod_{i \in I} x_i$. Кожная Б.г. зводзіцца да адвольнага выбару кожным з гульцоў $i \in I$ сваёй стратэгіі x_i і затым да атрымання выйгрышу $H_i(x_1, \ldots, x_n)$.

БІАРТАГАНАЛЬНАЯ СІСТЭМА функцый — абагульненне *артаганальнай сістэмы.* Няхай

$$\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_i, ..., \ i \in \mathbf{N}, \qquad (1)$$

— сістэма элементаў з вектарнай прасторы R (вызначанай над полем рэчаісных або камплексных лікаў),

$$U_1, U_2, ..., U_i, ..., \ i \in \mathbf{N}, \qquad (2)$$

— сістэма лінейных *функцыяналаў* (вызначаных у R), роўнамагутная сістэме (1).

Сістэма $\{\varphi_i; U_i\}$ называецца Б.с., калі

$$U_j(\varphi_i) = 0 \ \text{для} \ i \neq j.$$

Калі

$$U_j(\varphi_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ для } i \neq j, \\ 1 \text{ для } i = j, \end{cases} \qquad (3)$$

то сістэма $\{\varphi_i; U_i\}$ называецца біортаўнармаванай (што ёсць абагульненне *артаўнармаванай сістэмы*). Сістэмы (1) і (2), якія задавальняюць (3), лінейна незалежныя. Калі $\{\varphi_i\}$ — базіс *банахавай прасторы,* то існуе сістэма $\{U_i\}$ лінейных функцыяналаў, што $\{\varphi_i; U_i\}$ ёсць Б.с. У прыватнасці, для прастораў $L^p[a,b]$, $p \geq 1$, і $L^q[a, b]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, біортаўнармаванасць вызначаецца роўнасцю

$$\int_a^b \Psi_i(t)\psi_j(t) = \delta_{ij}, \text{ дзе } \varphi_i(t) \in L^p, \ \Psi_i(t) \in L^q.$$

Раскладам функцыі f па Б.с. называецца шэраг

$$f \sim \sum_{i=1}^{\infty} U_i(f)\varphi_i, \ i \in \mathbf{N}.$$

БІВЕКТАР (ад лац. bi... — двойчы + вектар) — упарадкаваная пара *вектараў,* прыватны выпадак *полівектара.*

БІГАРМАНІЧНАЯ ФУНКЦЫЯ — функцыя $u(x, y)$ дзвюх рэчаісных зменных, вызначаная ў абсягу D плоскасці (x, y), якая мае непарыўныя частковыя вытворныя да 4-га парадку ўключна і задавальняе ў D бігарманічнае раўнанне

$$\Delta^2 u = \Delta(\Delta u) = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0,$$

дзе $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — аператар Лапласа. Клас Б.ф. уключае клас *гарманічных функцый* і ўключаны ў клас *полігарманічных функцый.* Кожная Б.ф. — гэта аналітычная функцыя зменных x і y. Б.ф. n рэчаісных зменных $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$, дзе $n \geq 2$, вызначаюцца аналагічна, як развязак раўнання $\Delta^2 u = 0$, дзе $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$.

БІЕКТЫЎНАЕ АДЛЮСТРАВАННЕ (біекцыя) мноства A у мноства B — адлюстраванне $f: A \to B$, пры якім розныя элементы з A маюць вобразы і $f(A) = B$. Інакш, f — узаемна адназначнае адлюстраванне A на B ці *ін'ектыўнае* і *сюр'ектыўнае адлюстраванні* адначасова. Б.а. утварае ўзаемна адназначную адпаведнасць паміж элементамі мностваў A і B. Б.а. мноства A на A называецца таксама падстановай.

БІЕКЦЫЯ (ад лац. bi... — двойчы + jacio — кідаю) — тое, што *біектыўнае адлюстраванне.*

БІКАМПАКТНАСЦЬ — уласцівасць *тапалагічнай прасторы:* з адвольнага адкрытага накрыцця можна выбраць канцае накрыццё. Гл. *Бікампактная прастора, Кампактнасць.*

БІКАМПАКТНАЯ ПРАСТОРА — тое, што *кампактная прастора.* Тэрмін Б.п. увёў П.Аляксандраў (1923); паняцце Б.п. з'явілася як першапачатковае ўзмацненне ўведзенага М.Фрэшэ паняцця кампактнай прасторы, калі патрабавалася метрызавальнасць тапалагічнай прасторы або наяўнасць у ёй злічальнай базы. Далейшае развіццё матэматыкі і яе дастасаванняў паказала, што паняцце бікампактнасці настолькі больш важнае, чым пачатковае паняцце кампактнасці, што зараз пад кампактнасцю разумеюць менавіта бікампактнасць, а кампактныя ў старым сэнсе прасторы называюць злічальнакампактнымі.

БІКВАДРАТОВАЕ РАЎНАННЕ — раўнанне выгляду $ax^4 + bx^2 + c = 0$. Падстановай $x^2 = y$ развязанне Б.р. зводзіцца да развязання *квадратовага раўнання.*

БІЛІНЕЙНАЯ ФОРМА — мнагасклад выгляду $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j$, $a_{ij} = a_{ji}$, у якім кожны складнік уваходзіць у 1-й ступені на кожнай зменнай з дзвюх сістэм зменных $x_1, ..., x_n$ і $y_1, ..., y_n$ (прыватны выпадак *полілінейнай формы*).

БІНАРМАЛЬ — *нармаль,* перпендыкулярная *судатычнай плоскасці.*

БІНАРНАЕ ДАЧЫНЕННЕ на мностве A — падмноства дэкартавага квадрата $A \times A$.

Б.д. — асобны выпадак *дачынення* (пры $n = 2$). Няхай $R \subseteq A \times A$ — Б.д. Калі $(a, b) \subset R$, то кажуць, што элемент a знаходзіцца ў бінарным дачыненні R да элемента b. Замест $(a, b) \in R$ пішуць таксама aRb. Пустое мноства $\varnothing$ і само мноства $A \times A$ называюцца адпаведна нуль-дачыненнем і універсальным дачыненнем на мностве A. Дыяганаль мноства $A \times A$, г.зн. $\Delta = \{(a,a)|a \in A\}$, ёсць дачыненне роўнасці, або адзінкавае бінарнае дачыненне. Гл. таксама *Парадку дачыненне*, *Эквівалентнасці дачыненне*.

БІНА́РНАЯ АПЕРА́ЦЫЯ на мностве A — двухмесцавая алгебраічная аперацыя (або аперацыя арнасці 2), г.зн. адлюстраванне $\omega: A \times A \to A$.

БІНА́РНАЯ ФО́РМА (ад лац. binarius — падвойны) — аднародны мнагасклад ад дзвюх зменных x і y: $f(x, y) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k y^{n-k}$. Лік n называецца ступенню формы (пры $n = 2$ маем бінарную квадратовую, а пры $n = 3$ — бінарную кубічную форму). Алгебраічны кірунак у тэорыі Б.ф. звязаны з вывучэннем інварыянтаў такіх формаў пры лінейных пераўтварэннях зменных. Арыфметычная тэорыя Б.ф. вывучае дыяфантавы раўнанні тыпу $f(x, y) = b$ з цэлымі каэфіцыентамі.

БІНО́М (ад лац. bi... + грэч. nome — доля, частка), двухсклад — сума ці рознасць двух алгебраічных выразаў, якія называюцца складнікамі Б., напрыклад: $a + b$, $5x - \frac{y^2}{1 + x^2}$ і г.д. Пра ступені Б., г.зн. выразы выгляду $(x + y)^n$, гл. у арт. *Ньютана бiном.*

БІНО́МНАЕ РАЗМЕРКАВА́ННЕ — тое, што *Бэрнулі размеркаванне.*

БІНО́МНЫ ДЫФЕРЭНЦЫЯ́Л — тое, што *дыферэнцыяльны бiном.*

БІНО́МНЫ КАЭФІЦЫЕ́НТ — выраз выгляду $\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}$, дзе n — адвольны натуральны лік, k — цэлы лік, $0 \le k \le n$. Абазначаецца C_k^n або $\binom{n}{k}$. Б.к. роўны ліку *спалучэнняў* з n элементаў па k і $C_n^k = C_n^{n-k}$. Каэфіцыенты пры x^k і x^{n-k} мнагасклада n-й ступені *Ньютана бінома* $(1 + x)^n$ роўныя Б.к. C_n^k (адсюль іх назоў). Існуе абагульненне Б.к. на выпадак адвольнага рэчаіснага ці камплекснага ліку α: $C_\alpha^k = \frac{\alpha(a-1)...(\alpha-k+1)}{k!}$. Б.к. і іх уласцівасці часта дастасоўваюцца ў тэорыі лікаў, матэматычным аналізе, камбінаторыцы, тэорыі імавернасцяў.

БІНО́МНЫ ШЭ́РАГ — ступеневы шэраг выгляду $\sum_{k=0}^{\infty} C_\alpha^k x^k$, дзе α — адвольны фіксаваны рэчаісны лік, x — рэчаісная зменная, C_α^k — *біномныя каэфіцыенты*. Пры цэлых $\alpha = n \ge 0$ Б.ш. з'яўляецца концай сумай $n+1$ складнікаў — гэтак званы *Ньютана бiном*:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + ... + x^n.$$

Б.ш. з'яўляецца абагульненнем гэтага бінома на выпадак дробавых і адмоўных паказнікаў ступені і дае расклад функцыі $(1+x)^\alpha$ у *Тэйлара шэраг* (дакладней, Маклёрына). Умовы збежнасці ступеневага шэрагу, калі $\alpha \ne n \ge 0$: 1) пры $\alpha \ge 0$ абсалютна збягаецца для $-1 \le x \le 1$; 2) пры $\alpha < -1$ абсалютна збягаецца для $-1 < x < 1$; 3) пры $-1 < \alpha \le$ ≤ 0 абсалютна збягаецца для $-1 < x < 1$, умоўна збягаецца для $x = 1$; 4) разбягаецца для іншых значэнняў зменнай x ва ўсіх выпадках. Б.ш. абагульняецца на выпадак адвольнага фіксаванага камплекснага ліку. Поўнае даследаванне збежнасці Б.ш. зрабіў Н.Абэль (1826).

БІРАЦЫЯНА́ЛЬНАЕ ПЕРАЎТВАРЭ́ННЕ — пунктавае пераўтварэнне плоскасці, якое кожнаму пункту T ставіць у адпаведнасць пункт такім чынам, што каардынаты пункта T_1 выражаюцца рацыянальна праз каардынаты пункта T_1 і, наадварот, каардынаты пункта T маюць рацыянальны выраз праз каардынаты пункта T_1. Напрыклад, *інверсія* з цэнтрам у пачатку каардынат і ступенню K:

$$x' = \frac{Kx}{x^2 + y^2}, \quad y' = \frac{K_y}{x^2 + y^2}.$$

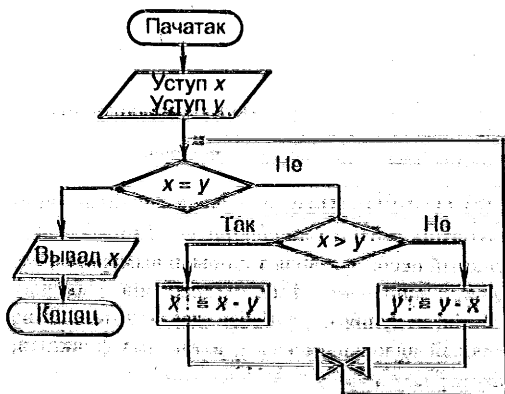
БІСЕКТРЫ́СА (франц. bissectrice, ад лац. bissectrix (bissectricis) — якая рассякае на дзве часткі) — простая, якая праходзіць праз вяршыню вугла і дзеліць яго папалам. Кожны пункт Б. аднолькава аддалены ад старон вугла. Б. трохвугольніка — адрэзак Б. аднаго з вуглоў гэтага трохвугольніка, які знаходзіцца паміж яго вяршыняй і процілеглай стараной. Б. трох вуглоў трохвугольніка перасякаюцца ў адным пункце — цэнтры ўмежанай у трохвугольнік акружыны.

БІТ (англ. bit ад binary — двайковая + digit — лічба, знак) — адзінка вымярэння колькасці інфармацыі і аб'ёму памяці. Вымярае мінімальную колькасць інфармацыі — такую колькасць, для кадавання (паказу) якой дастаткова аднаго двайковага разраду.

БІФУРКА́ЦЫЯ (ад лац. bifurcus — раздвоены) — тэрмін, які ўжываецца ў матэматыцы ў дачыненні да аб'ектаў, што залежаць ад параметра $t\in\mathbf{R}^m$, які задае розныя якасныя перабудовы пры змяненні гэтага параметра. Калі ў кожным дастаткова малым абсягу нейкага пункта t_0 аб'ект мае неаднолькавыя якасныя ўласцівасці, то t_0 называецца *біфуркацыйным значэннем* ці *пунктам* Б. У найпрасцейшым выпадку (m=1) пры руху ўздоўж восі α і пераходзе праз пункт t_0 аб'ект траціць (або набывае) нейкую ўласцівасць. Напрыклад, няхай гладкая дынамічная сістэма залежыць ад параметра $t\in\mathbf{R}$ і пры пераходзе праз значэнне t_0 траціць устойлівасць (дакладней, асаблівы пункт сістэмы з устойлівага становіцца няўстойлівым) і пры гэтым з'яўляецца лімітавы цыкл. У гэтым выпадку кажуць пра Б. нараджэння лімітавага цыкла.

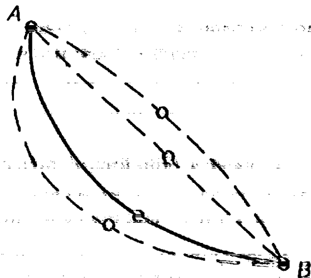
БЛІЗНЯ́ТЫ — два *простыя лікі* з рознасцю 2. Напрыклад, 5 і 7, 29 і 31, 71 і 73. Невядома, з'яўляецца мноства Б. бясконцым або не (2001).

БЛОК-СХЕ́МА — 1) сістэма *падмностваў* B концага мноства V, якая адпавядае пэўным умовам, што звязаныя з частасцю з'яўлення параў элементаў мноства V у падмноствах сістэмы B. Элементы мноства V называюцца элементамі Б.-с., а элементы мноства B — яе блокамі; 2) Б.-с. *алгарытму*, графічная выява *алгарытму* ці *праграмы*. Складаецца з фігур стандартнай формы (блокаў) і стрэлак паміж імі. У блоках запісваюцца каманды ці назовы дзеянняў. Стрэлкі паказваюць парадак іх здзяйснення. Б.-с. выкарыстоўваецца ў якасці дапаможных сродкаў для выяўлення структуры алгарытму, а таксама для дакументавання праграм. На рыс. дадзена Б.-с. Эўкліда: на вонкавую канструкцыю падаюцца два натуральныя лікі x, y, затым знаходзіцца іх найбольшы агульны дзельнік, які выводзіцца на вонкавую канструкцыю. Б.-с. замяняюцца структурнымі выяўленнямі праграм, сродкамі моваў праграмавання, моваў высокага ўзроўню.



БРА́ЎНАВА РУ́ХУ ПРАЦЭ́С — працэс, які апісвае хаатычны рух дробных часцінак у вадкасці ці газе ў выніку сутыкнення з малекуламі асяроддзя. Існуе некалькі мадэляў такога руху: найбольш пашыраная — *вінэраў працэс*.

БРАХІСТАХРО́НА (ад грэч. brachistos — найкарацейшы + chronos — час) — крывая найхутчэйшага спуску. Б. — тая з усіх магчымых крывых, якія злучаюць два дадзеныя пункты A і B (гл. рыс.) патэнцыяльнага сілавога поля (што ляжаць



у вертыкальнай плоскасці), рухаючыся ўздоўж якой пад уздзеяннем толькі сілаў поля з пачатковай хуткасцю, роўнай нулю, матэрыяльны пункт прыйдзе са становішча A у B за найменшы час. Калі рух адбываецца ў аднародным полі сілы цяжару, то Б. — *цыклоіда* з гарызантальнай асновай і зваротным пунктам, што супадае з пунктам A. Тэрмін увёў Ё.Бэрнулі (1696).

БУ́ЛЕВА А́ЛГЕБРА — непустое мноства з *бінарнымі аперацыямі* і ўнарнай аперацыяй, якія праўдзяць аксіёмы:

1. $x = x$;
2. $x\vee y = y\vee x$, $x\wedge y = y\wedge x$;
3. $x\vee(y\vee z) = (x\vee y)\vee z$,
   $x\wedge(y\wedge z) = (x\wedge y)\wedge z$;
4. $x\wedge(x\vee z) = (x\wedge y)\vee(x\wedge z)$,
   $x\vee(y\vee z) = (x\vee y)\wedge(x\vee z)$;
5. $\overline{x\vee y} = \bar{x}\wedge\bar{y}$, $\overline{x\wedge y} = \bar{x}\vee\bar{y}$;

6. $x \vee x = x$, $x \wedge x = x$;

7. $(x \wedge \bar{x}) \vee y = y$, $(x \vee \bar{x}) \wedge y = y$.

Замест $\bar{x}$ часам пішуць Cx ці x'. Магчымы і іншыя аксіяматыкі. Прыклад Б.а. — сукупнасць усіх падмностваў нейкага мноства са звычайнымі тэарэтыка-мноствавымі аперацыямі $\cap$ (аб'яднанне), $\cup$ (перасячэнне) і $^{-}$ (дапаўненне). Іншы прыклад — сукупнасць выказванняў з лагічнымі аперацыямі $\wedge$ (кан'юнкцыя), $\vee$ (дыз'юнкцыя) і $\neg$ (адмаўленне).

БУЛЕВА КОЛЦА — *асацыятыўнае колца* з адзінкай, усе элементы якога адпавядаюць умове $x^2 = x$. Прыклады: поле Z_2 з двух элементаў і прамая сума такіх палёў. Канцае Б.к. вычэрпваецца прыкладам: канцае Б.к. — прамая сума палёў Z_2. Бясконцае Б.к. — падпрамая сума палёў Z_2. Б.к. — колцавы варыянт булевых алгебраў.

БУЛЕВА ПРАГРАМАВАННЕ — раздзел *матэматычнага праграмавання*, у якім вывучаецца задача: максімізаваць мэтавую функцыю $f(x_1, ..., x_n)$ на дапушчальным мностве G, дзе G задаецца сістэмай $g_i(x_1, ..., x_n) \geq 0$, $i = 1, ..., m$, $(x_1, ..., x_n) \in X$ і X ёсць нейкае падмноства вяршыняў n-мернага куба $\{0, 1\}^n$ у $\mathbf{R}^n$. Звычайна разглядаецца задача з лінейнымі функцыямі f і g_i, $i = 1, m$, якая з'яўляецца спецыяльным выпадкам задачы цэлалікавага лінейнага праграмавання. Ёсць доказ, што задача Б.п. належыць да ліку *NP-поўных задач* і настолькі ж складаная, як і задача цэлалікавага лінейнага праграмавання. Таму эфектыўнага алгарытму (алгарытму паліномнай часавай складанасці) для развязання задачы Б.п. хутчэй за ўсё не існуе.

БУЛЕВА ФУНКЦЫЯ — тое, што функцыя *алгебры логікі*.

БУЛЕВЫ АПЕРАЦЫІ — аперацыі дыз'юнкцыя ($\vee$), кан'юнкцыя ($\wedge$), дапаўненне $\bar{x}$ (ці Cx) у *булевай алгебры*.

БУНЯКОЎСКАГА НЯРОЎНАСЦЬ — няроўнасць, якая сцвярджае, што для функцый $f(x)$ і $g(x)$, інтэгравальных з квадратам, праўдзіцца

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx.$$

Устанавіў В.Бунякоўскі (1859). Прыватны выпадак — *Гёльдэра няроўнасць* пры $p = 2$.

БЭЗУ ТЭАРЭМА — тэарэма пра дзяленне мнагасклаДу на лінейны двухсклад: астача ад дзялення мнагасклаДу $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n$ на двухсклад $x - c$ роўная $P_n(c)$. Мяркуецца, што каэфіцыенты мнагасклаДаў змяшчаюцца ў пэўным камутатыўным колцы з адзінкай (напрыклад, у полі рацыянальных ці камплексных лікаў). Вынік Б.т.: лік c — корань мнагаскладу $P_n(x)$, калі і толькі калі $P_n(x)$ дзеліцца без астачы на $x - c$. Названая імем французскага матэматыка Э.Бэзу (1779).

БЭЙСІК (ад анг. basic — скарочанае ад beginner's all-purposes symbolic instruction code) — шматмэтавая камандная мова для пачаткоўцаў, дыялогавая *праграмавання мова* працэдурнага тыпу. Мае сінтаксіс, які забяспечвае хуткае авалоданне ёю. Першую версію мовы Б. стварылі Д.Кемэні і Т.Курц (ЗША, 1964) з навучальнымі мэтамі. Б. — распаўсюджаная мова праграмавання для персанальных камп'ютараў, мае мноства версій (куды ўлучаны аперацыі з лікамі павялічанай разраднасці, радковымі сімвальнымі зменнымі, графічнымі аб'ектамі), а таксама сродкі, што забяспечваюць структурызацыю праграм.

БЭЛМАНА РАЎНАННЕ — дыферэнцыяльнае раўнанне з частковымі вытворнымі спецыяльнага выгляду для развязання задач аптымальнага кіравання. Гл. таксама *Дынамічнае праграмаванне*.

БЭРА КЛАСІФІКАЦЫЯ — класіфікацыя разрыўных функцый, якую ўвёў Р.Бэр (1899). Да першага класа далучаюць усякую разрыўную функцыю, якая можа быць пададзена ў выглядзе ліміту збежнай паслядоўнасці непарыўных функцый — функцый нулявога класа. Разрыўную функцыю, якая не ўваходзіць у першы клас, але можа быць пададзеная ў выглядзе ліміту збежнай паслядоўнасці функцый першага класа, далучаюць да другога класа і г.д. Напрыклад, функцыя $f_{m,n}(x) := |\cos(n!\pi x)|^m$ зменнай x ёсць функцыя нулявога класа пры натуральных m, n. Яе ліміт $f_m(x) = \lim_{n\to\infty} f_{m,n}(x)$ ёсць разрыўная функцыя першага класа. Функцыя Дырыхле

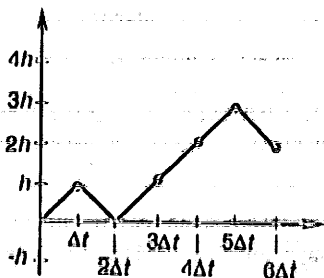
$$D(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{калі } x \text{ ірацыянальны,} \\ 1, & \text{калі } x \text{ рацыянальны} \end{cases}$$

— разрыўная функцыя другога класа.

БЭРА ФУНКЦЫЯ — усякая функцыя, якая ўваходзіць у *Бэра класіфікацыю*. Тэорыя такіх функцый цесна звязаная з тэорыяй вымерных, *барэлевых мностваў*. Б.ф. падрабязна вывучыў Н.Лузін з вучнямі. А.Лебэг даказаў існаванне функцый адвольнага класа, а таксама функцый, якія не ўваходзяць у класіфікацыю Бэра.

БО́РЖА МО́ЦНАЯ ГІПО́ТЭЗА: граф G дасканалы, калі і толькі калі ні ў $\bar{G}$, ні ў дапаўняльным графе G няма вымушаных падграфаў, што былі б цыкламі няпарнай даўжыні, большай за 3 (гл. *Граф*). Б.м.г. не даказаная і не абвергнутая, аднак пацверджаная для спецыяльных класаў графаў.

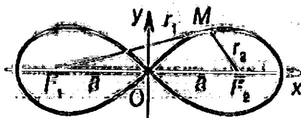
БЭРНУ́ЛІ БЛУКА́ННЕ — выпадковае блуканне, утворанае *Бэрнулі выправаваннямі*. Б.б. можна апісаць на прыкладзе: часцінка рухаецца па восі x ("блукае") па кратах пунктаў выгляду kh (k — цэлае, $h > 0$). Рух пачынаецца ў момант $t = 0$ і становішча часцінкі (рыс.) адзначаецца ў дыскрэтныя моманты часу $0, \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \ldots$. На кожным кроку каардыната часцінкі павялічваецца або змяншаецца на велічыню h з імавернасцямі p і $q = 1 - p$ адпаведна. У фізіцы Б.б. выкарыстоўваюць для грубага апісання аднамерных працэсаў дыфузіі (гл. *Дыфузійны працэс*) і *броўнава руху працэсу*.



Пачатковы ўчастак графіка руху часцінкі, якая здзяйсняе блуканне Бэрнулі

БЭРНУ́ЛІ ВЫПРАБАВА́ННІ — незалежныя выпрабаванні, у якіх разглядаюцца два зыходы, прычым імавернасці зыходаў не змяняюцца ад выпрабавання да выпрабавання. Няхай p — імавернасць поспеху, $q = 1 - p$ — імавернасць няўдачы, і няхай 1 абазначае зыход поспеху, а 0 — зыход няўдачы. Тады імавернасць вызначанага чаргавання поспехаў і няўдачаў, напрыклад 1 0 0 1 1 1 0 ... 1, роўная $pqqppq...p = p^m q^{n-m}$, дзе m — колькасць поспехаў у разглядanай паслядоўнасці n выпрабаванняў. Схема названая ў гонар Я.Бэрнулі, які даказаў тэарэму — *вялікіх лікаў закон* — для такой паслядоўнасці выпрабаванняў. Гл. таксама *Бэрнулі тэарэма*, *Вялікіх лікаў узмоцнены закон*, *Лапласа тэарэма*, *Пуасона тэарэма*.

БЭРНУ́ЛІ ЛЕМНІСКА́ТА — плоская алгебраічная крывая 4-га парадку (гл. рыс.). Раўнанне ў прамавугольных каардынатах $(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 + y^2) = 0$, у палярных $\rho^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$. Здабытак



адлегласцяў r_1 і r_2 кожнага пункта M крывой да двух дадзеных пунктаў $F_1(-a, 0)$ і $F_2(a, 0)$ роўны квадрату паловы адлегласці паміж F_1 і F_2. Б.л. сіметрычная ў дачыненні да восяў і пачатку каардынат, які з'яўляецца вузлавым пунктам (з датычнымі $y = \pm x$) і пунктам перагіну. Радыус крывізны $R = 2a^2/3\rho$. Плошча кожнай пятлі $S = a^2$. Б.л. — прыватны выпадак *Касіні авалу*.

БЭРНУ́ЛІ ЛІ́КІ — паслядоўнасць рацыянальных лікаў $B_0, B_1, B_2, \ldots$, якую ўпершыню даследаваў Я.Бэрнулі (1713) у сувязі з вылічэннем сумы аднолькавых ступеняў натуральных лікаў

$$\sum_{k=1}^{m-1} k^n \frac{1}{n+1} = \sum_{s=0}^{n} C^s_{n+1} B_s m^{n+1-s},$$

дзе C^s_{n+1} — біноміныя каэфіцыенты, $n = 0, 1, \ldots, m = 1, 2, \ldots$. Першыя Б.л. маюць значэнні: $B_0 = 1$, $B_1 = -1/2$, $B_2 = 1/6$, $B_3 = 0$, $B_4 = -1/30$, $B_5 = 0$, $B_6 = 1/42$, $B_7 = 0$, $B_8 = -1/30$, $B_9 = 0$. Усе Б.л. з няцотнымі нумарамі, акрамя B_1, роўныя нулю, знакі Б.л. з цотнымі нумарамі мяняюць па чарзе. Рэкурэнтныя адносіны, якія дазваляюць вылічыць Б.л., маюць выгляд $B_0 = 1$, $\sum_{k=0}^{n-1} C^k_n B_k = 0$, $n \geq 2$.

БЭРНУ́ЛІ МНАГАСКЛА́ДЫ — мнагасклады выгляду $B_n(x) = \sum_{s=0}^{n} C^s_n B_s x^{n-s}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, дзе B_s — *Бэрнулі лікі*. Калі $n = 0, 1, 2, 3$, Б.м. маюць выгляд

$$B_0(x) = 1,\ B_1(x) = x - \frac{1}{2},\ B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6},$$

$$B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x.$$

Вызначэнне Б.м. можна рабіць па рэкурэнтнай формуле

$$\sum_{s=0}^{n} C^s_n B_s(x) = nx^{n-1},\ n=2, 3, \ldots$$

Для натуральных x Б.м. упершыню разглядаў Я.Бэрнулі (1713).

БЭРНУ́ЛІ РАЗМЕРКАВА́ННЕ — размеркаванне выпадковай велічыні x, якая прымае значэнне $0, 1, \ldots, n$ з імавернасцямі $P(x = k) =$

$= C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, дзе $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ — *біномны каэфіцыент*. Такое размеркаванне мае колькасць поспехаў k у n выпрабаваннях Бэрнулі. Б.р. называюць таксама *біномным размеркаваннем*, паколькі імавернасці $P(x=k)$ ёсць каэфіцыенты пры z^k раскладзе выразу $[(1-p)+pz]^n$.

БЭРНУ́ЛІ РАЎНА́ННЕ — *дыферэнцыяльнае раўнанне звычайнае* 1-га парадку $y' + p(x)y = g(x)y^\alpha$, дзе p, g — зададзеныя непарыўныя на прамежку $[a, b]$ функцыі, α — рэчаісны лік, які адрозны ад 0 або 1. Гэтае раўнанне было разгледжанае Я.Бэрнулі (1695). Падстановай $y^{\alpha-1} = z$ Б.р. пераўтвараецца ў *лінейнае дыферэнцыяльнае раўнанне* ў дачыненні да z. Развязак задачы Кашы для Б.р. з пачатковымі ўмовамі (x_0, y_0), $x_0 \in [a, b]$, $y_0 \neq 0$, існуе і ён адзіны. Калі $\alpha > 0$, то Б.р. мае нулявы развязак, пры $0 < \alpha < 1$ і ў пунктах гэтага развязку парушаецца адзінасць.

БЭРНУ́ЛІ ТЭАРЭ́МА — першая з лімітавых тэарэм тэорыі імавернасцяў; гістарычна першая форма *вялікіх лікаў закону*. Б.т. сцвярджае, што калі пры кожным з n незалежных выпрабаванняў імавернасць нейкай выпадковай падзеі роўная p, то імавернасць таго, што частасць m/n надыходу гэтай падзеі задавальняе няроўнасць $|m/n - p| < \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ — адвольная), будзе блізкай да 1 пры дастаткова вялікай колькасці n выпрабаванняў.

БЭ́СЭЛЯ НЯРО́ЎНАСЦЬ — няроўнасць тэорыі функцый і функцыянальнага аналізу пра ўласцівасці каэфіцыентаў *Фур'е шэрагу* па адвольнай *артаганальнай сістэме* функцый. Няхай функцыя $f(x)$ вымерная, а функцыя $f^2(x)$ інтэгравальная на адрэзку $[a; b]$ і c_k, $k = 1, 2, ...,$ — каэфіцыенты шэрагу Фур'е $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$ функцыі $f(x)$ па *ортаўнармаванай сістэме* функцый $\varphi_k(x)$, $k = 1, 2, ...$; тады Б.н. сцвярджае, што $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \le \int_a^b f^2(x)dx$. З Б.н. вынікае, што каэфіцыенты Фур'е функцыі $f(x)$ імкнуцца да нуля, і лікі $c_1, c_2, ...$ толькі тады могуць быць каэфіцыентамі Фур'е нейкай функцыі $f(x)$, калі шэраг $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$ збежны. Б.н. упершыню даказаў Ф.Бэсэль (1828) у прыватным выпадку трыганаметрычнай сістэмы.

БЭ́СЭЛЯ РАЎНА́ННЕ — лінейнае *дыферэнцыяльнае раўнанне звычайнае* 2-га парадку $z^2y'' + zy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$ з двума асаблівымі пунктамі $z = 0$ і $z = \infty$. Пункт $z = 0$ — рэгулярны асаблівы пункт, $z = \infty$ — ірэгулярны, z — камплексная зменная. У Б.р. уваходзіць параметр ν (індэкс Б.р.), увогуле кажучы, камплексны. Развязкі Б.р. — аналітычныя функцыі ў камплекснай плоскасці з вылучанымі пунктамі $z = 0$, $z = \infty$. Калі індэкс ν не цэлы лік, развязак Б.р. — мнагазначныя функцыі і $z = 0$, $z = \infty$ — пункты галінавання. Б.р. задае два лінейна незалежныя развязкі, якія называюцца **цыліндрычнымі бэсэлевымі функцыямі**. Сярод іх вылучаюцца цыліндрычныя функцыі 1-га роду (Бэсэля функцыі) і 2-га роду (Вэбэра або Ноймана функцыі). Б.р. — прыватны выпадак звыроднага гіпергеаметрычнага дыферэнцыяльнага раўнання, які ўзнікае пры падзеле зменных у хвалевым дыферэнцыяльным раўнанні з частковымі вытворнымі, запісанымі ў цыліндрычных каардынатах, а таксама ў іншых задачах матэматычнай фізікі. Лінейная камбінацыя двух лінейна незалежных развязкаў дае агульны развязак Б.р. Развязкі ў наваколлі пункта $z = 0$ можна падаць у выглядзе шэрагаў, якія збягаюцца ва ўсёй камплекснай плоскасці, без $z = \infty$, а пры $z \to \infty$ — асімптатычнымі шэрагамі.

БЭ́ТА-ФУ́НКЦЫЯ, **Ойлера функцыя** — функцыя дзвюх рэчаісных зменных p і q, якая пры $p > 0$, $q > 0$ вызначаецца роўнасцю

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx. \qquad (1)$$

Значэнні Б.-ф. пры розных значэннях зменных p і q звязаныя паміж сабою формуламі:

$$B(p,q) = B(q,p);$$

$$B(p,q) = \frac{q-1}{p+q-1} B(p,q-1), \quad q > 1;$$

$$B(p, 1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}, \quad 0 < p < 1.$$

У выпадку камплексных p і q інтэграл (1) збягаецца, калі $\operatorname{Re} p > 0$, $\operatorname{Re} q > 0$. Б.-ф. звязаная з *гама-функцыяй*: $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$. Назоў Б.-ф. і абазначэнне $B(p, q)$ увёў Ж.Бінэ (1839).

БЭ́ЦІ ЛІК — тапалагічны інварыянт b^t *паліэдра*, які паказвае колькасць парамі негамалагічных цыклаў паліэдра. Пад гамалагічнымі t-мернымі

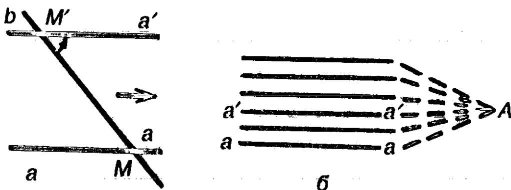
цыкламі разумеюць такія дзве сукупнасці t-мерных граняў, якія самі не маюць межаў, але ў той жа час ствараюць мяжу пэўнага $(t+1)$-мернага паліэдра. Б.л. для *сферы*: $b^0 = b^2 = 1$, $b^1 = 0$; для *тора* — $b^0 = b^1 = b^2 = 1$. Для паліэдра сума $\sum_{t=0}^{n}(-1)^t b^t$ з'яўляецца яго ойлеравай характарыстыкай.

БЯЗМЕЖНА ПАДЗЕЛЬНАЕ РАЗМЕРКАВАННЕ — размеркаванне імавернасцяў, якое пры кожным $n = 2, 3, \ldots$ можа быць пададзена ў выглядзе згорткі n аднолькавых размеркаванняў імавернасцяў. Характарыстычная функцыя Б.п.р. можа быць пададзеная як n-я ступень іншай характарыстычнай функцыі $f(t) = (f_n(t))^n$ пры кожным $n = 2, 3, \ldots$. Прыклады Б.п.р. — *нармальнае размеркаванне*, *Пуасона размеркаванне* і інш.

БЯСКОНЦА АДДАЛЕНЫ ПУНКТ — 1) Б.а.п. у камплекснай плоскасці — уяўны (ідэальны) пункт $z = \infty$, якім дапаўняецца камплексная плоскасць $\overline{\mathbf{C}}$. Пасля далучэння Б.а.п. $z = \infty$ камплексная плоскасць **C** ператвараецца ў пашыраную камплексную плоскасць $\overline{\mathbf{C}}$, якая ўзаемна адназначна непарыўна адлюстроўваецца на сферу (напрыклад, з дапамогай *стэрэаграфічнай праекцыі*). Пункт $\omega \in \mathbf{C}$ імкнецца да Б.а.п. $z = \infty$, калі і толькі калі яго модуль неабмежавана нарастае: $|\omega| \to \infty$; 2) Б.а.п. — гл. у арт. *Бясконца аддаленыя элементы*, *Аднародныя каардынаты*.

БЯСКОНЦА АДДАЛЕНЫЯ ЭЛЕМЕНТЫ, неўласцівыя элементы — элементы (пункты, простыя, плоскасці), якія ўзнікаюць пры пашырэнні якой-небудзь *афіннай* (у прыватнасці, эўклідавай) *прасторы* да *кампактнай прасторы*.

Паходжанне гэтага тэрміна можна разгледзець на прыкладзе праектыўнай плоскасці. Няхай a і a' — паралельныя простыя ў эўклідавай плоскасці,



простая b перасякае іх у пунктах M і M' (гл. рыс.). Няхай b аварочваецца вакол пункта M' у кірунку, паказаным на рысунку стрэлкай, да супадзення з простай a'. Відавочна, што чым бліжэй простая b будзе падыходзіць да a', тым больш пункт M перасячэння простых a і b будзе аддаляцца ад свайго пачатковага становішча. Гэта і азначае, што пункт M імкнецца да бясконцасці. У праектыўнай геаметрыі лімітавае (бясконцае) становішча пункта M называецца бясконца аддаленым (ці няўласным) пунктам A. Усе простыя, паралельныя дадзенаму кірунку, папаўняюцца адным бясконца аддаленым пунктам. Такім чынам, усе такія простыя перасякаюцца ў гэтым пункце. Розным кірункам адпавядаюць розныя бясконца аддаленыя пункты, значыць, плоскасць папаўняецца бясконцай колькасцю бясконца аддаленых пунктаў. Сукупнасць усіх бясконца аддаленых пунктаў плоскасці называецца бясконца аддаленай простай. Плоскасць, якая папаўняецца такім чынам бясконца аддаленымі пунктамі і бясконца аддаленай простай, называецца праектыўнай плоскасцю. Праектыўная плоскасць (адрозна ад эўклідавай) ёсць кампактная.

Аналагічна ўводзіцца праектыўная трохмерная прастора: кожная плоскасць папаўняецца бясконца аддаленай простай. Усе бясконца аддаленыя пункты і бясконца аддаленыя простыя складаюць бясконца аддаленую плоскасць. Калі разглядаецца n-мерная праектыўная прастора, то ўсе Б.а.э. памернасці $\leq n-2$ утвараюць бясконца аддаленую $(n-1)$-мерную гіперплоскасць.

БЯСКОНЦА ВЯЛІКАЯ ВЕЛІЧЫНЯ — лікавая паслядоўнасць, якая мае бясконцы ліміт. Вывучэнне Б.в.в. можа быць зведзенае да вывучэння *бясконца малых велічыняў*, бо калі (x_n) — Б.в.в., то (x_n^{-}) — бясконца малая.

БЯСКОНЦА ВЯЛІКАЯ ПАСЛЯДОЎНАСЦЬ — паслядоўнасць (x_n), $n = 1, 2, \ldots$, якая імкнецца да бясконцасці: $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$. Азначаецца наступным чынам: для адвольнага $M > 0$ існуе $n(M) \in \mathbf{N}$ такі, што для ўсіх $n > n(M)$ праўдзіцца $|x_n| > M$.

БЯСКОНЦА ВЯЛІКАЯ ФУНКЦЫЯ — функцыя $y = f(x)$, вызначаная ў наваколлі пункта x_0, называецца Б.в.ф. пры $x \to x_0$, калі для кожнага $k > 0$ знойдзецца такі лік $\varepsilon = \varepsilon(k) > 0$, што для ўсіх x, для якіх $0 < |x - x_0| < \varepsilon$, праўдзіцца няроўнасць $|f(x)| > k$.

БЯСКОНЦА МАЛАЯ ВЕЛІЧЫНЯ — лікавая паслядоўнасць, якая мае ліміт, роўны нулю. Паняцце Б.м.в. можа быць пакладзенае ў аснову агульнага паняцця ліміту лікавай паслядоўнасці:

паслядоўнасць (x_n) мае (конца) ліміт a, калі і толькі калі $(x_n - a)$ ёсць Б.м.в.

БЯСКОНЦА МАЛАЯ ФУНКЦЫЯ — функцыя $y = f(x)$, вызначаная ў наваколлі пункта x_0, называецца Б.м.ф. пры $x \to x_0$, калі для кожнага $\varepsilon > 0$ знойдзецца такі лік $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, што для ўсіх x, $|x - x_0| < \delta$, праўдзіцца $|f(x)| < \varepsilon$. Паняцце Б.м.ф. можна пакласці ў аснову агульнага азначэння *ліміту функцыі*.

БЯСКОНЦА МАЛЫХ ЗЛІЧЭННЕ — тэрмін, які раней аб'ядноўваў шэраг частак *матэматычнага аналізу*, звязаных з паняццем бясконца малой функцыі. Дакладныя азначэнні асноўных паняццяў тэорыі бясконца малых функцый склаліся толькі ў 19 ст. Да гэтага часу развіццё гэтак званага *вычэрпвання метаду* прывяло ўжо да стварэння *інтэгральнага злічэння* і *дыферэнцыяльнага злічэння*. Сучаснае разуменне Б.м.з. у якасці зменных велічыняў, якія імкнуцца да нуля, было заўважанае ўжо А.Ньютанам, але канчаткова замацавалася ў матэматыцы толькі пасля А.Кашы. Для цяперашняга стану дыферэнцыяльнага і інтэгральнага злічэння характэрная, з аднаго боку, поўная лагічная абгрунтаванасць, а з іншага — прастасць і наглядпасць, што дае магчымасць развязваць розныя складаныя задачы з дапамогай простых алгарытмаў.

БЯСКОНЦА СПАДАЛЬНАЯ ГЕАМЕТРЫЧНАЯ ПРАГРЭСІЯ — паслядоўнасць a, aq, aq^2, ..., aq^n, ... пры $|q| < 1$. Лік $S = \dfrac{a}{1-q}$ называецца с у м а й Б.с.г.п. Гл. *Геаметрычная прагрэсія*.

БЯСКОНЦАМЕРНАЯ ПРАСТОРА — *вектарная прастора*, у якой пры кожным n можна знайсці n лінейна незалежных вектараў. Гл. *Вектарная прастора*.

БЯСКОНЦАСЦЬ — паняцце, якое ўзнікае ў розных галінах матэматыкі ў асноўным як супрацьпастаўленне паняццю концага. Паняцце Б. выкарыстоўваецца ў аналітычных і геаметрычных тэорыях для абазначэння «неўласцівых» ці «бясконца аддаленых» элементаў, у тэорыі мностваў і матэматычнай логіцы пры вывучэнні «бясконцых мностваў» і ў іншых галінах матэматыкі. Уяўленне пра бясконца малыя і бясконца вялікія зменныя велічыні — адно з галоўных у матэматычным аналізе. Кажуць, што велічыня y бясконца малая пры $x \to a$, калі пры ўсіх $\varepsilon > 0$ існуе лік $\delta > 0$ такі, што з няроўнасці $|x - a| < \delta$ вынікае няроўнасць $|y| < \varepsilon$. Зусім у іншых лагічных абставінах Б. узнікае ў выглядзе «няўласных» бясконца аддаленых геаметрычных вобразаў. Тут, напрыклад, бясконца аддалены пункт на простай разглядаецца як асаблівы аб'ект, далучаны да звычайных пунктаў. Аналагічны характар мае дапаўненне сістэмы рэчаісных лікаў двума «няўласнымі» лікамі $+\infty$ і $-\infty$ ці пераўтварэнне афіннай прасторы **A** у праектыўную $\mathbf{P}^n$ дапаўненнем бясконцымі пунктамі і г.д.

БЯСКОНЦЫ АЎТАМАТ — абстрактны *аўтамат*, у якога хоць бы адно з вызначаных мностваў бясконцае. Напрыклад, *Т'юрынга машына*, якая мае бясконцую вонкавую памяць (у выглядзе бясконцай стужкі, падзеленай на асобныя ячэі).

БЯСКОНЦЫ ДЗЕСЯТКОВЫ ДРОБ — бясконцая паслядоўнасць пунктаў a_0, $b_1b_2...b_n...$, дзе a_0 — цэлы лік, а b_j, $j \geq 1$, — лічбы 0, 1, ..., 9. З дапамогай Б.дз.д. можна запісаць кожны лік рэчаісный простай. Гл. *Дзесятковы дроб*.

БЯСКОНЦЫ ЗДАБЫТАК — здабытак бясконцай колькасці лікавых ці функцыйных множнікаў u_1, u_2, ..., u_n, г.зн. выраз выгляду $u_1 \cdot u_2 \cdot ... \cdot u_n = \prod_{n=1}^{\infty} u_n$. Калі існуе не роўны нулю ліміт паслядоўнасці частковых здабыткаў $P_n = u_1 \cdot u_2 \cdot ... \cdot u_n$ пры $n \to \infty$, то Б.з. называецца з б е ж н ы м, а $\lim_{n\to\infty} P_n = P$ — яго велічынёй. Запісваецца $P = \prod_{n=1}^{\infty} u_n$.

Б.з. упершыню трапляюцца ў сувязі з вылічэннем ліку π. Напрыклад, Ф.Віет (1593) атрымаў формулу

$$\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot ... = \frac{2}{\pi},$$

а Дж.Уоліс (1665) — формулу

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot ... = \frac{4}{\pi}.$$

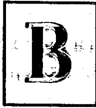
Б.з. з функцыйнымі множнікамі ўпершыню разгледзеў Л.Ойлер (1740—50), які ўжываў Б.з. для запісу функцый. Напрыклад, расклад сінуса ў Б.з. мае выгляд

$$\sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2 \pi^2}\right).$$

Расклады функцый у Б.з. аналагічныя раскладам мнагачленаў на множнікі, яны выяўляюць усе

значэнні незалежнай зменнай, пры якіх функцыя роўная нулю. Для збежнасці Б.з. неабходна і дастаткова, каб $u_n \neq 0$ для ўсіх n, каб $u_N > 0$, пачынаючы з нейкага нумара N, і каб збягаўся шэраг $\sum_{n=N}^{\infty} \ln u_n$. Тым самым даследаванне збежнасці Б.з. робіцца эквівалентным даследаванню збежнасці шэрагаў.

БЯСКО́НЦЫ ІНТЭРВА́Л — кожны з інтэрвалаў выгляду $(-\infty, \infty)$, $(-\infty, a)$, $(b, +\infty)$, дзе a, b — рэчаісныя лікі.



ВА́ГАВАЯ ФУ́НКЦЫЯ, вага — функцыйны множнік, які дазваляе атрымаць, напрыклад, концыя сумы нейкага шэрагу ці інтэграла ад нейкай функцыі, якія без гэтага множніка бясконцыя.

ВАГА́ННЕ ФУ́НКЦЫІ на мностве M — рознасць паміж верхняй і ніжняй мяжамі значэнняў функцыі на гэтым мностве; вызначаецца: $\omega_M(f) = \sup_{x', x'' \in M} \{|f(x') - f(x'')|\}$. Для неабмежаванай на мностве M функцыі В.ф. лічыцца бясконцым; $\omega_M = 0$ толькі для $f = \text{const}$ на M. У выпадку $M \subset \mathbb{R}^n$ В.ф. у кожным пункце $x \in \overline{M}$ вызначаецца формулай $\omega_{x,M}(f) = \inf_{(u)} \omega_M(f)$, дзе ніжняя мяжа разглядаецца па ўсіх акругах u пункта x. У выпадку $x \in M$ для непарыўнасці f у пункце x неабходна і дастаткова, каб $\omega_{x,M}(f) = 0$.

ВА́ЕРШТРАСА ПРЫКМЕ́ТА — 1) В.п. раўнамернай збежнасці функцыйных шэрагаў: функцыйны шэраг $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ збягаецца абсалютна і раўнамерна на мностве E, калі існуе збежны знакададатны лікавы шэраг $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ такі, што $|u_n(x)| \leq a_n$, $n = 1, 2, \ldots$, для ўсіх $x \in E$; 2) В.п. раўнамернай збежнасці неўласцівых інтэгралаў. Няхай функцыя $f(x, y)$ інтэгравальная па x на кожным адрэзку $[a, b] \subset [a, \infty]$ пры кожным $y \in Y$. Калі для адвольнага $y \in Y$ і адвольнага $x \in [a, \infty)$ мае месца няроўнасць $|f(x, y)| \leq g(x)$, $g(x) \geq 0$, а неўласцівы інтэграл $\int_a^{\infty} g(x)dx$ збягаецца, тады інтэграл $\int_a^{\infty} f(x, y)dx$ збягаецца абсалютна і раўнамерна на мностве Y.

ВА́ЕРШТРАСА ТЭАРЭ́МА — 1) В.т. пра набліжанні функцый: для кожнай рэчаіснай функцыі $f(x)$, непарыўнай на адрэзку $[a, b]$, існуе паслядоўнасць паліномаў $P_0(x)$, $P_1(x)$, ..., $P_n(x)$, ..., якая збягаецца да $f(x)$ раўнамерна на $[a, b]$; 2) В.т. пра суму шэрагу аналітычных функцый: калі функцыйны шэраг $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(z)$, дзе $u_k(z)$, $k \in N$, аналітычныя ў абсягу D, збягаецца раўнамерна ў D, то яго сума $f(z)$ ёсць функцыя, аналітычная ў D. Акрамя таго, для кожнага $m \in N$ шэраг з вытворных $\sum_{k=0}^{\infty} u_k^{(m)}(z)$ таксама раўнамерна збягаецца ў D да $f^{(m)}(z)$; 3) В.т. пра бясконцы здабытак: для кожнай паслядоўнасці пунктаў камплекснай плоскасці

$$0, \ldots, 0, a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots, \quad 0 < |a_k| \leq |a_{k+1}|, \quad \lim_{k \to \infty} |a_k| = \infty \qquad (1)$$

існуе цэлая функцыя, якая мае нулі ў пунктах гэтай паслядоўнасці і толькі ў іх. Гэтая функцыя можа быць пабудаваная ў форме здабытку

$$W(z) = z^{\lambda} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right) \exp\left(\frac{z}{a_k} + \frac{z^2}{2a_k^2} + \ldots + \frac{z^{m_k}}{k a_k^{m_k}}\right), \qquad (2)$$

дзе λ — кратнасць пункта $z = 0$ у паслядоўнасці (1), лікі m_k бяруцца так, каб забяспечыць збежнасць здабытку (2).

ВА́ЕРШТРАСА ЎМО́ВА — неабходная і (асобна) дастатковая ўмова моцнага *экстрэмуму* ў класічным *варыяцыйным злічэнні*. Прапанаваў К.Ваерштрас (1879).

ВАЛЬТЭ́РЫ АПЕРА́ТАР — *кампактны аператар*, які дзейнічае ў банахавай прасторы і мае нулявы спектр. Напрыклад, лінейны інтэгральны аператар $v_\varphi = \int_a^x k(x, y)\varphi(y)dy$, дзе $k(x, y)$ — непарыўная ў квадраце $a \leq x$, $y \leq b$ функцыя, ёсць В.а. у прасторы $C[a, b]$ непарыўных на адрэзку $[a, b]$ функцый.

ВАЛЬТЭ́РЫ РАЎНА́ННЕ — інтэгральнае раўнанне II роду выгляду

$$\varphi(s)-\lambda\int_a^s K(s,t)\varphi(t)dt = f(s),\ a\le s\le b.$$

В.р. — прыватны выпадак *Фрэдгальма раўнання*. Калі $f(s)$ — непарыўная функцыя на адрэзку $a \le \le s \le b$, $K(s,t)$ — непарыўная ў трохвугольніку $a\le s\le b$, $a\le t\le s$, то пры кожным значэнні λ В.р. мае адзіны развязак, які запісваецца ў выглядзе абсалютна і раўнамерна збежнага шэрагу:

$$\varphi(s)=a_0(s)+\lambda a_1(s)+\lambda^2 a_2(s)+\ldots+\lambda^n a_n(s)+\ldots,$$

дзе

$$a_0(s)=f(s),\ a_k(s)=\int_a^s K(s,t)a_{k-1}(t)dt,\ t=1,2,\ldots$$

Да В.р. пры пэўных дадатковых ўмовах прыводзяцца і раўнанні выгляду $\int_a^s K(s,t)\varphi(t)dt = f(s)$ — В.р. I роду. В.р. II роду выкарыстоўваюцца, напрыклад, пры даследаваннях рэнтгенавых промняў.

ВАНДЭРМОНДА ВЫЗНАЧНІК — вызначнік выгляду

$$\Delta(a_1,\ldots,a_n)=\begin{vmatrix}1 & 1 & \ldots & 1\\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n\\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \ldots & a_n^{n-1}\end{vmatrix},$$

дзе a_i — элементы адвольнага поля. В.в. роўны здабытку рознасцяў (a_i-a_j), $1\le j<i\le n$: $\Delta(a_1,\ldots,a_n)=\Pi_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j)$. В.в. адрозны ад нуля, калі і толькі калі элементы $a_1,\ldots,a_n$ парамі розныя. Для выпадку $n=3$ В.в. увёў А.Вандэрмонд (1774), а ў агульным выпадку — А.Кашы (1815).

ВАРАНОГА ДЫЯГРАМА — геаметрычная канструкцыя; пэўны падзел *эўклідавай прасторы* E^n, які адпавядае мноству $S=(P_1,P_2,\ldots,P_k)$ пунктаў з E^n. Вызначаецца праз паняцце рэгіёна Вараногa $v(i)$ для асобнага пункта P_i: $V(i)$ — геаметрычнае месца пунктаў $P\in E^n$, якія знаходзяцца бліжэй да P_i, чым да кожнага іншага пункта з S. $V(i)$ — выпуклае мнагаграннае мноства, якое змяшчае P_i і не змяшчае іншых пунктаў з S. Сукупнасць k рэгіёнаў $V(i)$ стварае падзел $E(n)$, мяжа якога называецца В.д. у E^2. В.д. ёсць плоскі граф, у кожнай вяршыні якога злучаюцца роўна тры прасталінейныя канты. Дзвюхмерная В.д. можа быць пабудаваная аптымальным алгарытмам складанасці парадку $n\log n$ аперацый. Выкарыстанне В.д. у вылічальнай геаметрыі дазволіла атрымаць эфектыўныя алгарытмы (парадку $n\log n$ аперацый) для задач пра «найбліжэйшых суседзяў» і пра мінімальны каркас на эўклідавай плоскасці. Тэрмін названы ў гонар расійскага матэматыка Г.Вараногa (1868—1908).

ВА́РТАСНАЯ ЛІ́ЧБА — тэрмін, які мае дачыненне да набліжанага задання рэчаіснага ліку. Няхай у сістэме лічэння з асновай q рэчаісны лік запісаны ў выглядзе дробу

$$x\approx x^*=\alpha_n\alpha_{n-1}\ldots\alpha_0,\alpha_{-1}\ldots\alpha_{-m}.$$

Калі α_s — першая ненулявая лічба, лічачы злева, то α_s і ўсе лічбы, якія стаяць справа ад яе, называюцца В.л. набліжанага ліку x^*. В.л. α_t называецца дакладнай, калі абсалютная хібнасць $\Delta(x^*)$ ліку x^* праўдзіць няроўнасць $\Delta(x^*)\le\frac{1}{2}q^t$.

ВА́РТАСЦІ КРЫТЭ́Р — адзін з метадаў статыстычнай праверкі гіпотэз, які выкарыстоўваецца для праверкі адпаведнасці вынікаў назіранняў $x_1,\ldots,x_n$, што з'яўляюцца рэалізацыямі выпадковых велічыняў $x_1,\ldots,x_n$, нейкай гіпотэзе H_0 пра імавернаснае размеркаванне гэтых выпадковых велічыняў. Звычайна В.к. выкарыстоўваецца наступным чынам: выбраўшы статыстыку крытэра $T=T(x_1,\ldots,x_n)$, па яе размеркаванні, пры праўдзівасці гіпотэзы H_0, і па загадзя выбраным узроўні значнасці α вызначаюць крытычнае значэнне t_α такое, што $P(T>t_\alpha\,|\,H_0)=\alpha$. Пры $T(x_1,\ldots,x_n)>t_\alpha$ гіпотэзу H_0 адхіляюць, а пры $T\le t_\alpha$ лічаць, што гіпотэза H_0 не супярэчыць вынікам назіранняў.

ВА́РТАСЦІ ЎЗРО́ВЕНЬ — імавернасць памылкова адхіліць асноўную правяраную гіпотэзу, калі яна праўдзіцца. У тэорыі статыстычнай праверкі гіпотэз В.ў. называецца імавернасць памылкі першага роду і абазначаецца α. В.ў. α выбіраецца загадзя, каб падзеі, якія маюць імавернасць не большую, чым α, лічыць практычна немагчымымі. На практыцы звычайна бяруць $0{,}01\le\alpha\le 0{,}1$.

ВА́РЫНГА ПРАБЛЕ́МА — праблема тэорыі лікаў, якую выказаў без доказу Э.Варынг (1770): кожны цэлы лік $n\ge 1$ можна запісаць у выглядзе сумы пэўнай колькасці складнікаў: $n=a_1^k+\ldots+a_l^k$. Пры гэтым кожны складнік ёсць k-я ступень дадатнага цэлага ліку, l залежыць толькі ад k. Даказаная Д.Гільбэртам (1909). Т.Харды і Дж.Літлвуд

(1920) зменшылі ацэнкі колькасці складнікаў у залежнасці ад k, потым І.Вінаградаў (1934) атрымаў ацэнкі, блізкія да канчатковых.

ВАРЫЯЦЫІ КАЭФІЦЫЕНТ — беспамерная мера роскіду *размеркавання імавернасцяў* выпадковай велічыні. Існуе некалькі спосабаў вызначэння В.к. Найбольш часта ён вызначаецца па формуле $v = \frac{\sigma}{\mu}$, дзе σ^2 — дысперсія, μ — матэматычнае спадзяванне (пры гэтым $\mu \neq 0$).

ВАРЫЯЦЫЙНАЕ ЗЛІЧЭННЕ — 1) раздзел матэматыкі, у якім даследуюцца экстрэмумы *функцыяналаў*, вызначаных на мноствах канкрэтных функцыянальных прастораў. Тыповая задача В.з. — задача мінімізацыі функцыянала

$$I(x) = \int_T L(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt, \qquad (1)$$

дзе $T \subset R^m$, $t = (t_1, \dots, t_m)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\dot{x} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial t_0}\right)$, $L: R^m \times R^n \times R^{mn} \to R_1$ на мностве функцый $x: R^m \to R^n$, якія задавальняюць абмежаванні

$$f_1(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0,\ f_1: R^m \times R^n \times R^{mn} \to R^l; \qquad (2)$$

$$f_2(t_1, x(t), \dot{x}(t)) = 0,\ f_2: R^m \times R^n \times R^{mn} \to R^k \qquad (3)$$

і краявыя ўмовы. Варыяцыйныя задачы такога тыпу называюцца з а д а ч а м і Л я г р а н ж а. Акрамя задачы Лагранжа ў В.з. разглядаюцца і іншыя задачы, у прыватнасці задача Маера, задача Больца, ізаперыметрычная задача і іншыя, якія адрозніваюцца ад задачы Лягранжа тыпамі мінімізаванага функцыянала і тыпам абмежаванняў.

Гісторыя В.з. бярэ свой пачатак з задачы пра *брахістахрону* (крывую найхутчэйшага спуску), якую прапанаваў для даследавання ў 1696 г. Ё.Бэрнулі. Гэтая задача (і некаторыя іншыя з механікі і фізікі) паслужыла прататыпам найбольш простай варыяцыйнай задачы (прыватны выпадак задачы Лягранжа), у якой зменная t аднамерная, $T = [t_0, t_1] \subset R$, абмежаванні (2) і (3) адсутнічаюць, а краявыя ўмовы маюць выгляд $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$. Тэарэтычныя асновы В.з. былі распрацаваныя на прыкладзе найпрасцейшай варыяцыйнай задачы яшчэ ў 18 ст. Л.Ойлерам і Ж.Лягранжам. Менавіта Ж.Лягранж прапанаваў для даследавання задач В.з. метад варыяцый, які даў пазней назоў усяму раздзелу. Значны ўклад у распрацоўку В.з. зрабілі К.Ваерштрас, К.Якобі, Д.Гільбэрт і многія іншыя вядомыя матэматыкі. Галоўныя кірункі даследавання В.з.: умовы існавання экстрэмуму; неабходныя і дастатковыя ўмовы, якім задавальняюць экстрэмальныя крывыя; якасныя пытанні, звязаныя з рознымі тыпамі экстрэмальных крывых і іх колькасцю; алгарытмічныя метады пошуку экстрэмальных крывых і г.д. Абагульненнем задач класічнага В.з. з'яўляюцца задачы аптымальнага кіравання, даследаванні якіх былі распачатыя ў 1950-х гг. пад уплывам шэрагу практычных задач.

Найбольш прынцыповы вынік тэорыі аптымальнага кіравання — прынцып максімуму. Яго як гіпотэзу сфармуляваў Л.Пантрагін, доказ у лінейным выпадку знайшоў Р.Гамкрэлідзе, а ў нелінейным — У.Балцянскі;

2) В.з. — раздзел *вылічальнай матэматыкі*, прысвечаны метадам пошуку экстрэмальных значэнняў функцыяналаў. Лікавыя метады В.з. падзяляюць на два класы: непрамыя і прамыя (падзел умоўны). Н е п р а м ы я м е т а д ы заснаваныя на выкарыстанні неабходных умоў аптымальнасці, з дапамогай якіх зыходная варыяцыйная задача пераўтвараецца ў краявую задачу. П р а м ы я м е т а д ы арыентаваныя на непасрэдны пошук экстрэмуму функцыянала.

ВАРЫЯЦЫЙНАЯ ПАСЛЯДОЎНАСЦЬ — паслядоўнасць, пабудаваная на падставе вынікаў назіранняў. Няхай назіраецца выпадковы вектар $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, і няхай зададзена функцыя $\varphi(x) = \tilde{x}$, дзе $\tilde{x} = (x_{(n1)}, x_{(n2)}, \dots, x_{(nn)})$ — вектар, атрыманы з вектара x у выніку чаргавання яго каардынат у парадку нарастання: $x_{(n1)} \le x_{(n2)} \le \dots \le x_{(nn)}$. У гэтым выпадку статыстыка $\tilde{x} = \varphi(x) = (x_{(n1)}, \dots, x_{(nn)})$ называецца В.п. парадкавых статыстык, а яе k-я кампанента x_{nk}, $k = \overline{1, n}$, — k-й п а р а д к а в а й с т а т ы с т ы к а й.

ВАРЫЯЦЫЯ (ад лац. variatio — змяненне) — тэрмін для абазначэння малога змянення незалежнай зменнай ці функцыянала. Увёў Ж.Лягранж (1762). Няхай X — пэўная прастора, на якой зададзены функцыянал $f(x)$, V — прастора некаторых параметраў. В. аргумента $x_0 \in X$ называецца крывая $x(t; v)$, $v \in V$, $\alpha \le t \le \beta$, $\alpha \le 0$, $\beta \ge 0$, у прасторы X, якая праходзіць праз x_0 паблізу (у пэўным сэнсе) ад абмежаванняў, прычым x_0 адпавядае $t = 0$. Калі v прабягае мноства ўсіх параметраў, В. прабягаюць пэўную сям'ю крывых, якія выходзяць з x_0. Метад В. — метад даследавання экстрэмальнай задачы, які грунтуецца на малых змяненнях аргумента і вывучэнні змянення функ-

цыяналаў у залежнасці ад гэтага (адсюль і назоў *варыяцыйнае злічэнне*).

ВАРЫЯЦЫЯ АДЛЮСТРАВАННЯ — лікавая характарыстыка *адлюстравання*, звязаная з яго дыферэнцыяльнымі ўласцівасцямі. Азначаная С.Банахам (1925).

ВАРЫЯЦЫЯ МНОСТВА — лік, які характарызуе k-мерную працягласць мноства ў n-мернай *эўклідавай прасторы*. Нулявая варыяцыя $V_0(E)$ замкнёнага абмежаванага мноства E ёсць колькасць кампанентаў гэтага мноства. У найпрасцейшым выпадку лінейная варыяцыя $V_1(E)$ мноства (В.м. 1-га парадку) ёсць інтэграл

$$V_1(E) = c\int_0^{2\pi}\Phi(\alpha,E)d\alpha$$

ад функцыі

$$\Phi(\alpha,E) = \int_{\Pi\alpha} V_0(E\cap\Pi^1_{\alpha,z})dz,$$

дзе інтэграванне здзяйсняецца на простай Π_α, што праходзіць праз пачатак каардынат і нахілена пад вуглом α да фіксаванай восі; $\Pi^1_{\alpha,z}$ — простая, якая перасякае Π_α у пункце z пад прамым вуглом; $c =$ = const. Для дастаткова простых мностваў, напрыклад выпрастальных крывых, В.м. роўная даўжыні крывой.

ВАРЫЯЦЫЯ ФУНКЦЫІ (ад лац. variation — змяненне) — лікавая характарыстыка функцый адной рэчаіснай зменнай, звязаная з яе дыферэнцыяльнымі ўласцівасцямі. Азначаецца як верхняя мяжа сумаў $\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|$, $n\in N$, распаўсюджаная на ўсе магчымыя падзелы $a=x_0<x_1<...<$ $<x_{n-1}<x_n=b$ адрэзка $[a, b]$, на якім зададзена функцыя $f(x)$. Абазначаецца $\overset{b}{\underset{a}{V}} f$. Тэрмін прапанаваў Ж.Лягранж (1762). Геаметрычна варыяцыя непарыўнай функцыі $f(x)$ ёсць даўжыня праекцыі крывой $y=f(x)$ на вось ардынат (калі лічыць кратнасць накрыцця). Для непарыўна дыферэнцавальнай функцыі $f(x)$ праўдзіцца роўнасць $\overset{b}{\underset{a}{V}} f = \int_a^b|f'(x)|dx$. Калі $\overset{b}{\underset{a}{V}} f<\infty$, то $f(x)$ называецца **функцыяй абмежаванай варыяцыі**. Клас такіх функцый абазначаецца $V\ [a, b]$, іх азначыў і пачаў вывучаць К.Жардан (1881). Да класа $V\ [a, b]$ належаць, напрыклад, функцыі: манатонныя; з концай колькасцю экстрэмумаў; якія задавальняюць умове Ліпшыца. Усякая функцыя з $V\ [a, b]$ абмежаваная і мае не больш чым злічальнае мноства пунктаў разрыву; яна інтэгравальная паводле Рымана і можа быць пададзеная ў выглядзе рознасці дзвюх неспадальных функцый. Функцыі з абмежаванай варыяцыяй маюць амаль скрозь концую вытворную, інтэгравальную паводле Лебэга; трыганаметрычныя шэрагі Фур'е для функцый з $V\ [0, 2\pi]$ збягаюцца на ўсёй лікавай восі. Функцыі з $V\ [a, b]$ скарыстоўваюцца ў тэорыі інтэграла Стыльт'еса, геаметрыі, тэорыі трыганаметрычных шэрагаў і інш.

ВЕКТАР (ад лац. vector — які вязе, які нясе) у элементарнай эўклідавай геаметрыі — накіраваны адрэзак AB простай (пункт A — пачатак, пункт B — канец адрэзка). Два накіраваныя адрэзкі AB і CD называюцца роўнымі, калі яны сумяшчаюцца *паралельным пераносам*. Гэтае паняцце роўнасці не з'яўляецца тоеснай роўнасцю ў матэматычным сэнсе, а з'яўляецца дачыненнем *эквівалентнасці* на мностве накіраваных адрэзкаў. Таму В. у аналітычнай геаметрыі называецца клас эквівалентных накіраваных адрэзкаў, і абазначаецца ён $\vec{AB}$ ці $\vec{a}$, **a**. Такім чынам, В. $\vec{a}=\vec{AB}$ — гэта мноства ўсіх накіраваных адрэзкаў, якія сумяшчаюцца з накіраваным адрэзкам AB паралельнымі пераносамі; CD сумяшчаецца з AB паралельным пераносам, калі і толькі калі яны маюць роўныя даўжыні і аднолькава накіраваныя. Часам В. у першым сэнсе называецца **звязаным вектарам**, а ў другім — **свабодным вектарам**. На мностве ўсіх В. задаюцца аперацыі складання В., множання В. на рэчаісныя лікі, а таксама *скалярны здабытак, вектарны здабытак, змяшаны здабытак* і інш. Вектар у лінейнай алгебры — гэта элемент *вектарнай прасторы*.

ВЕКТАРНАЕ ЗЛІЧЭННЕ — раздзел матэматыкі, дзе вывучаюцца аперацыі з *вектарамі* і іх уласцівасці. Складаецца з *вектарнай алгебры* і *вектарнага аналізу*. В.з. — матэматычная база для механікі, гідрамеханікі, электрадынамікі.

ВЕКТАРНАЕ ПОЛЕ — звычайна функцыя пункта нейкай прасторы X, значэнні якой — *вектары*, вызначаныя ў тым або іншым сэнсе для гэтай прасторы. У класічным *вектарным злічэнні* ў якасці X выкарыстоўваюць падмноствы *эўклідавай прасторы*, а В.п. з'яўляюцца накіраваныя адрэзкі, а дкладзеныя з пунктаў гэтага падмноства. Напрыклад, сукупнасць датычных або перпендыкулярных вектараў да гладкай крывой (паверхні) — В.п. на ёй.

ВЕ́КТАРНАЯ А́ЛГЕБРА — раздзел *вектарнага злічэння*, у якім вывучаюцца аперацыі з *вектарамі*: складанне вектараў, множанне вектара на лік, скалярны і вектарны здабыткі двух вектараў, змяшаны і падвойны здабыткі трох вектараў, а таксама ўласцівасці гэтых аперацый. Калі ў *ортаўнармаваным базісе* $\{i, j, k\}$ вектары a, b, c зададзеныя каардынатамі $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$, $c = (c_1, c_2, c_3)$, с у м а й в е к т а р а ў a і b будзе вектар $a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$; з д а б ы т к а м в е к т а р а a і л і к у λ з'яўляецца вектар $\lambda a = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$; *скалярны здабытак* вектараў a і b — лік $(a \cdot b) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$; *вектарны здабытак* вектараў a і b — вектар

$$[a, b] = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right);$$

змяшаным здабыткам вектараў a, b, c будзе лік

$$(a, b, c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix};$$

п а д в о й н ы я в е к т а р н ы я з д а б ы т к і вектараў a, b, c можна вылічыць з дапамогай формул

$$[[a, b], c] = (a, c)b - (b, c)a;$$

$$[a, [b, c]] = (a, c)b - (a, b)c.$$

ВЕ́КТАРНАЯ ЛІ́НІЯ — тое, што *лінія цёку*.

ВЕ́КТАРНАЯ ПАДПРАСТО́РА — тое, што *лінейная падпрастора*.

ВЕ́КТАРНАЯ ПРАСТО́РА, л і н е й н а я п р а с т о р а — мноства $V = \{a, b, ...\}$, элементы якога называюцца в е к т а р а м і і ў якім зададзеныя дзве аперацыі: с к л а д а н н е в е к т а р а ў $V \times V \ni (a, b) \to a + b \in V$ і м н о ж а н н е в е к т а р а ў і э л е м е н т а ў п о л я $K = \{\alpha, \beta, ...\}$ (ці скаляраў) $K \times V \ni (\alpha, a) \to \alpha a \in V$. У дачыненні да складання V з'яўляецца *абэлевай групай*, акрамя таго, праўдзяцца наступныя аксіёмы:

$$(\alpha + \beta) a = \alpha a + \beta a; \ (\alpha\beta)a = \alpha(\beta a);$$

$$\alpha (a + b) = \alpha a + \alpha b; \ 1 \cdot a = a$$

для адвольных вектараў a, b і адвольных скаляраў α, β.

Прыклад В.п. — мноства $V(E^3)$ звычайных вектараў трохмернай эўклідавай прасторы E^3 у дачыненні да звычайнага складання вектараў і множання вектараў на рэчаісныя лікі. Да В.п. належаць таксама: мноства $n \times m$-матрыц $K_{n,m}$ з элементамі з поля K у дачыненні да складання матрыц і множання матрыц на скаляры, мноства функцый $F(X, K)$, зададзеных на адвольным мностве X са значэннямі ў полі K, і інш. В.п. і іх марфізмы, якія называюцца лінейнымі аператарамі, уяўляюць прадмет вывучэння лінейнай алгебры.

Кожная В.п. мае базіс: калі В.п. V мае базіс, утвораны n вектарамі, то V называецца к о н ц а й п р а с т о р а й, а натуральны лік n — яе п а м е р н а с ц ю V: $n = \dim V$; калі V мае бясконцы базіс, то V называецца б я с к о н ц а м е р н а й п р а с т о р а й. Памернасць — важнейшая характарыстыка В.п.: дзве В.п. над адным полем K ізаморфныя, калі і толькі калі супадаюць іх памернасці. Такім чынам, з дакладнасцю да ізамарфізму для кожнага $n \in N$ існуе толькі адна В.п. памернасці n над полем K — у якасці стандартнай такой прасторы часцей за ўсё бярэцца мноства $K^n = \{(\alpha_1, ..., \alpha_n) \mid \alpha_i \in K\}$ радкоў даўжыні n з элементамі поля K. Больш агульным паняццем, чым В.п. над полем, з'яўляюцца паняцці В.п. над целам і модуля над кольцам.

ВЕ́КТАРНАЯ ФУ́НКЦЫЯ — тое, што *вектар-функцыя*.

ВЕ́КТАРНЫ АНА́ЛІЗ — раздзел *вектарнага злічэння*, у якім вывучаюцца *вектарныя палі* і *скалярныя палі*.

ВЕ́КТАРНЫ ЗДАБЫ́ТАК д в у х н е н у л я в ы х і н е к а л і н і я р н ы х в е к т а р а ў a і b — вектар $c = [a, b]$ такі, што: $|c| = |a| \cdot |b| \sin(a \wedge b)$; $c \perp a$ і $c \perp b$; c накіраваны так, што тройка вектараў a, b, c — правая. Калі вектары a і b калінеарныя, дык лічаць, што $c = 0$. Калі ў ортаўнармаваным базісе вектары a і b маюць каардынаты $a = (x_1, y_1, z_1)$, $b = (x_2, y_2, z_2)$, то

$$[a, b] = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right).$$

Асноўныя ўласцівасці В.з.: $[a, b] = -[b, a]$; $[a, b + c] = [a, b] + [a, c]$; $\lambda [a, b] = [\lambda a, b] = [a, \lambda b]$. Геаметрычны сэнс В.з. — модуль $|[a, b]|$, роўны плошчы паралелаграма, утворанага вектарамі a, b.

ВЕ́КТАР-РАДО́К — матрыца выгляду $[a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}]$. Гл. *Матрыца*.

ВЕ́КТАР-СЛУПО́К — матрыца выгляду

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}.$$

Гл. *Матрыца*.

ВЕ́КТАР-ФУ́НКЦЫЯ, вектарная функцыя — функцыя $r = f(t)$, значэнні якой ёсць *вектары*. У трохмернай прасторы заданне В.-ф. раўназначнае заданню трох функцый $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$, якія вызначаюць каардынаты вектара $r = xi + yj + zk$, дзе i, j, k — орты сістэмы каардынат. В.-ф. называецца непарыўнай, дыферэнцавальнай і да т.п. (у пункце або ў абсягу), калі такія ж усе функцыі f_i. Мноства канцоў вектараў r, адкладзеных ад нулявога пункта каардынат, называецца гадографам В.-ф. Дыферэнцыяльныя і інтэгральныя ўласцівасці В.-ф. вывучае *вектарны аналіз*.

ВЕЛІЧЫНЯ́ — матэматычнае паняцце, якое азначае лікавыя адрозненні фізічных рэчаў, з'яваў, працэсаў, іх прыкмет і дачыненняў. Пачатковае паняцце В. — абагульненне канкрэтных паняццяў даўжыні, плошчы, масы і г.д. Кожны канкрэтны род В. звязаны з пэўным спосабам параўнання аб'ектаў (напрыклад, у геаметрыі адрэзкі параўноўваюцца накладваннем, і гэта прыводзіць да паняцця даўжыні). У межах сістэмы ўсіх аднародных В. (у межах сістэмы ўсіх даўжыняў ці ўсіх плошчаў і г.д.) вызначаюцца дачыненні няроўнасці і аперацыя складання, уласцівасці якіх апісваюцца пэўнай сістэмай аксіём. Выбіраючы адну з В. пэўнага роду за адзінку вымярэння (напрыклад, метр у якасці адзінкі даўжыні), можна выразіць дадатным лікам іншую В. таго ж роду праз адзінку вымярэння.

У межах кожнай сістэмы аднародных В. вызначаюцца дачыненні няроўнасці: дзве В. a і b або супадаюць ($a = b$), або першая меншая за другую ($a < b$), або другая меншая за першую ($b < a$). Дачыненні $a < b$ і аперацыя складання $a + b + c$ маюць наступныя ўласцівасці:

1) якія б ні былі a і b, мае месца адно і толькі адно з трох дачыненняў: ці $a = b$, ці $a < b$, ці $b < a$;

2) калі $a < b$ і $b < c$, то $a < c$ (транзітыўнасць дачыненняў "менш", "больш");

3) для двух адвольных В. a і b існуе толькі адна В. $c = a + b$ (адзінасць сумы);

4) $a + b = b + a$ (камутатыўнасць складання);

5) $a + (b + c) = (a + b) + c$ (асацыятыўнасць складання);

6) $a + b > a$ (манатоннасць складання);

7) калі $a > b$, то існуе адна і толькі адна В. c, для якой $b + c = a$ (магчымасць адымання);

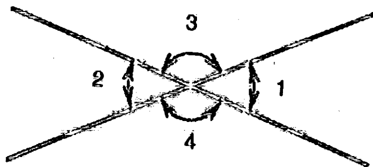
8) якія б ні былі В. a і натуральны лік n, існуе такая В. b, што $n \cdot b = a$ (магчымасць дзялення);

9) якія б ні былі В. $a > 0$ і $b > 0$, існуе такі натуральны лік n, што $a < n \cdot b$ (гэтая ўласцівасць называецца Архімеда аксіёмай).

Цалкам закончаная тэорыя В. атрымліваецца пры дапаўненні патрабаванняў 1—9 той або іншай аксіёмай непарыўнасці.

ВЕРАГО́ДНАЯ ПАДЗЕ́Я — падзея, якая апрыёры павінна адбыцца. Абазначаецца Ω і складаецца з усіх элементарных падзей. В.п. прыпісваюць імавернасць, роўную 1. Дадатковай падзеяй да В.п. з'яўляецца *немагчымая падзея*.

ВЕРТЫКА́ЛЬНЫЯ ВУГЛЫ́ — пары вуглоў з агульнай вяршыняй, якія ўтвараюцца пры перасячэнні дзвюх простых так, што стораны аднаго



вугла з'яўляюцца працягам старон другога. На рыс. дзве пары В.в.: ($\angle 1$, $\angle 2$) і ($\angle 3$, $\angle 4$). Вертыкальныя вуглы парамі роўныя.

ВЕ́РХНІ І НІ́ЖНІ ЛІМІ́ТЫ — 1) В. і н.л. лікавай паслядоўнасці — найбольшы і адпаведна найменшы з частковых лімітаў паслядоўнасці рэчаісных лікаў. Для кожнай такой паслядоўнасці (x_n), $n = 1, 2, ...$, на пашыранай лікавай восі В. і н.л. (концы ці бясконцы) заўсёды існуюць і могуць быць вызначаны формуламі:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k \geq n} x_k$$

— верхні ліміт і

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k \geq n} x_k$$

— ніжні ліміт. Напрыклад, калі $x_n = (-1)^n$, то

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = -1, \ \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = 1;$$

калі $x_n = n + (-1)^n n$, то

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = 0, \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = +\infty.$$

Паслядоўнасць x_n мае ліміт (концы ці бясконцы), калі і толькі калі выкананы ўмовы

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n;$$

2) В. і н. л. **функцыі ў пункце**: няхай рэчаісная функцыя $f(x)$ вызначана на метрычнай прасторы E з метрыкай d,

$$x_0 \in E, O(x_0; \varepsilon) = \{x \in E | d(x, x_0) \le \varepsilon\}$$

— ε-акруга пункта x_0. Тады

$$\overline{\lim_{x \to x_0}} f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{x \in O(x_0, \varepsilon)} f(x)$$

— верхні ліміт $f(x)$ у пункце x_0,

$$\underline{\lim_{x \to x_0}} f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \inf_{x \in O(x_0, \varepsilon)} f(x)$$

— ніжні ліміт. Функцыя $f(x)$ мае ліміт (концы ці бясконцы) у пункце x_0, калі і толькі калі

$$\overline{\lim_{x \to x_0}} f(x) = \underline{\lim_{x \to x_0}} f(x);$$

3) В. і н. л. **паслядоўнасці мностваў** A_n, $n = 1, 2, \ldots$. $\overline{A} = \overline{\lim_{n \to \infty}} A_n$ — мноства такіх элементаў x, якія належаць да бясконцай колькасці мностваў A_n. $\underline{A} = \underline{\lim_{n \to \infty}} A_n$ — мноства такіх x, якія належаць усім A_n, пачынаючы з пэўнага $n = n(x)$. Відавочна, $\underline{A} \subset \overline{A}$.

ВЕ́РХНІ ІНТЭГРА́Л Дарбу — ліміт верхніх інтэгральных сумаў Дарбу. Гл. *Дарбу сумы, Ніжні інтэграл.*

ВЕ́РХНЯЯ І НІ́ЖНЯЯ МЕ́ЖЫ — характарыстыкі мностваў рэчаісных лікаў. Мноства $A \subset \mathbf{R}$ называецца абмежаваным зверху (знізу), калі $\exists C \in \mathbf{R}$, што $\forall x \in A: x \le C$ ($x \ge C$). Лік C называецца **верхняй (ніжняй) мяжой мноства** A. Мноства, абмежаванае зверху і знізу, называецца **абмежаваным**. Няхай C — верхняя (ніжняя) мяжа мноства A. Тады ўсякі лік a, большы (меншы) за C, — таксама верхняя (ніжняя) мяжа мноства A. Мноства, абмежаванае зверху (знізу), мае *дакладную верхнюю і ніжнюю межы.*

ВІЕ́ТА ТЭАРЭ́МА **пра карані** — тэарэма пра сувязь паміж каранямі мнагаскладу і яго каэфіцыентамі. Няхай

$$P_n(x) = x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

— мнагасклад ступені n з каэфіцыентамі з нейкага поля. У полі, у якім знаходзяцца ўсе карані $P_n(x)$, мнагасклад раскладаецца на лінейныя множнікі:

$$P_n(x) = (x - \alpha_1) \ldots (x - \alpha_n),$$

дзе α_i — карані $P_n(x)$, $i = \overline{1, n}$. В.т. сцвярджае, што праўдзяцца роўнасці (формулы Віета):

$$b_0 = (-1)^n \alpha_1 \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n;$$

$$b_1 = (-1)^{n-1} (\alpha_1 \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_{n-1} + \ldots + \alpha_2 \alpha_3 \cdot \ldots \cdot \alpha_n);$$

. . . .

$$b_{n-2} = \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1} \alpha_n;$$

$$b_{n-1} = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n).$$

Для квадратовага раўнання $x^2 + px + q = 0$ формулы Віета маюць выгляд

$$q = \alpha_1 \alpha_2, \; p = -(\alpha_1 + \alpha_2).$$

ВІЕ́ТА ФО́РМУЛЫ — гл. *Віета тэарэма.*

ВІНАГРА́ДАВА МЕ́ТАД — метад ацэньвання трыганаметрычных сумаў, які дазваляе атрымаць дакладныя іх ацэнкі. В.м. дазволіў атрымаць істотныя паляпшэнні ў шэрагу класічных праблем аналітычнай тэорыі лікаў (размеркаванне простых лікаў, адытыўныя праблемы, у прыватнасці *Гольдбаха праблема* і *Варынга праблема).*

ВІ́НЭРАЎ ПРАЦЭ́С — імавернасны працэс $W(t)$, вызначаны пры $t \ge 0$, яго канцамерныя размеркаванні вызначаюцца суполнымі шчыльнасцямі размеркавання велічыняў $w(t_1), \ldots, w(t_n)$ пры $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, якія маюць выгляд

$$f_{t_1, \ldots, t_n}(x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} [2\pi(t_i - t_{i-1})]^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{t_i - t_{i-1}}\right\}.$$

Існуюць іншыя азначэнні В.п.

ВІХО́Р (ротар) вектарнага поля a — адна з характарыстык поля a. Калі поле a мае каардынаты a_x, a_y, a_z у базісе $\{i, j, k\}$, то

$$\text{rot}\, a = \left\{\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}, \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}, \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right\}.$$

В. мае ўласцівасці:

$$\text{rotgrad}\, \varphi = 0;$$

$$\text{rot}\, (\varphi, a) = \varphi \text{rot}\, a + [\text{grad} \varphi, a];$$

$$\text{rotrot}\, a = \text{graddiv}\, a - \Delta a,$$

дзе Δ — аператар Лапляса. Гл. таксама *Вектарны аналіз.*

ВО́БЛАСЦЬ — тое, што *абсяг.*

ВО́БРАЗ ЭЛЕМЕ́НТА $a \in A$ **пры адлюстраванні** φ **мноства** A **ў мноства** B — элемент $b \in B$, на які адлюстроўваецца эле-

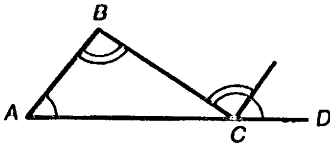
мент a. Элемент a называецца **правобразам** элемента b.

ВОНКАВАЯ КРЫВІНЯ **мнагастайнасці** — здабытак $K_{\text{вонк}}$ яго *галоўных крывіняў* або здабытак вызначнікаў першай і другой квадратовых формаў. У адрозненне ад *нутраной крывіні* $K_{\text{нутр}}$ В.к. залежыць ад крывіні прасторы, дзе размешчана мнагастайнасць і выражаецца праз іх; напрыклад, калі X — рыманава прастора сталай крывіні $K_{\text{праст}}$, то $K_{\text{вонк}} = K_{\text{нутр}} - K_{\text{праст}}$. В.к. паверхні ў трохмернай эўклідавай прасторы супадае з яе нутраной крывінёй.

ВОНКАВАЯ МЕРА — мера, якая ў класічнай тэорыі *Лебэга меры* мноства вызначаецца як ніжняя мяжа мераў разнастайных адкрытых мностваў, што змяшчаюць дадзенае мноства.

ВОНКАВЫ АЎТАМАРФІЗМ — *аўтамарфізм* групы, які не з'яўляецца нутраным.

ВОНКАВЫ ВУГАЛ — вугал, сумежны з якім-небудзь вуглом трохвугольніка (або многавугольніка), напрыклад $\angle BCD$ на рыс. В.в. трохвугольніка роўны суме яго нутраных вуглоў, не сумежных з ім: $\angle BCD = \angle CAB + \angle ABC$.



ВОНКАВЫХ ФОРМАЎ І РУХОМАГА РЭПЕРА МЕТАД — метад, які створаны і сістэматычна выкарыстоўваўся ў *дыферэнцыяльнай геаметрыі* французскім матэматыкам Э.Картанам. Дае магчымасць хуткага вываду асноўных формул тэорыі крывых, паверхняў і іншых падмнагастайнасцяў. Шырока выкарыстоўваецца ў сучаснай геаметрыі.

ВОСЕВАЯ СІМЕТРЫЯ, **сіметрыя ў дачыненні да простай n-га парадку** — сіметрыя, пры якой фігура накладаецца на сябе пасля авароту вакол нейкай простай (**восі сіметрыі**) на вугал $360/n$. Напрыклад, простая, якая праходзіць праз дзве найбольш аддаленыя вяршыні куба, задае В.с. трэцяга парадку.

ВОСЕВЫ ВЕКТАР, **аксіяльны вектар** — вектар у арыентаванай прасторы, які пры змене арыентацыі прасторы на процілеглую пераўтвараецца ў процілеглы вектар. Прыклады В.в. — *вектарны здабытак*.

ВОСТРАВУГОЛЬНЫ ТРОХВУГОЛЬНІК — трохвугольнік, у якога ўсе вуглы вострыя.

ВОСТРЫ ВУГАЛ — вугал, меншы за *прамы вугал*.

ВОСЬ — простая лінія з пазначаным на ёй кірункам. 1) **В. каардынат** — В. з пачаткам адліку і выбранай маштабнай адзінкай, што дазваляе кожнаму рэчаіснаму ліку паставіць у адпаведнасць пэўны пункт. Дзве ўзаемна перпендыкулярныя В. на плоскасці — **В. абцые** і **В. ардынат** — утвараюць прамавугольную *дэкартаву сістэму каардынат*. У трохмернай прасторы для вызначэння становішча пункта ўводзіцца яшчэ **В. аплікат**, перпендыкулярная да названых дзвюх В.; 2) **В. сіметрыі** — гл. *Сіметрыя*.

ВРАНЬСКІЯН ФУНКЦЫЙ — для функцый $\varphi_1(x),\dots,\varphi_n(x), x \in (a,b)$, з вытворнымі $\varphi_i',\dots,\varphi_i^{(n-1)}$ В.ф. ёсць вызначнік

$$W(x) \equiv \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_n \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \dots & \varphi_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & \dots & \varphi_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Калі разгляданыя функцыі лінейна залежныя на (a, b), то іх В.ф. тоесна роўны 0 на (a, b). Калі В.ф. тоесна роўны 0 на (a, b), то самі функцыі могуць не быць лінейна залежнымі на ўсім (a, b), аднак інтэрвал (a, b) можна падзяліць на паўінтэрвалы такім чынам, што на кожным паўінтэрвале функцыі φ_i будуць лінейна залежныя. Для аналітычных функцый з таго, што іх В.ф. роўны 0 на (a, b), вынікае, што яны лінейна залежныя на ўсім (a, b). Калі функцыі $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ ёсць развязкі лінейнага дыферэнцыяльнага раўнання

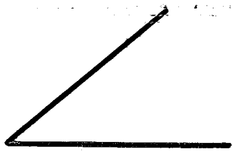
$$y^{(n)} + P_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + P_1(x)y' + P_0(x)y = 0$$

з непарыўнымі каэфіцыентамі, то праўдзіцца **формула Ліўвіля—Астраградскага**:

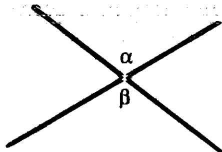
$$W(x) \equiv W(x_0)\exp\left\{-\int_{x_0}^{x} P_{n-1}(\tau)d\tau\right\}, \ (x_0, x) \in (a,b).$$

ВУГАЛ — геаметрычная фігура, утвораная двума промнямі (старанамі В.), якія выходзяць з аднаго пункта (вяршыні В.) (рыс. 1). Кожны В. з вяршыняй у цэнтры нейкай акружыны (**цэнтральны В.**) вызначае на акружыне дугу, абмежаваную пунктамі перасячэння акружыны са ста-

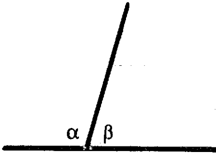
ранамі В., што дае магчымасць вымяраць В. адпаведнымі іх дугамі (гл. таксама *Цэнтральны вугал* і *Умежаны вугал*). Адзінкі вымярэння В. — градус ці радыян. Калі стораны аднаго В. з'яўляюцца дадатковымі прамянямі да старон другога, то такія В. называюцца ***вертыкальнымі вугламі*** (α і β на рыс. 2); В., утвораны адной са старон дадзенага В. і працягам другой, называецца с у м е ж н ы м з ім (α і β на рыс. 3; гл. таксама *Сумежныя вуглы*).



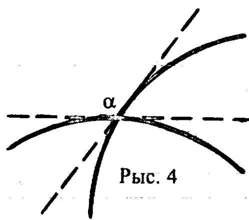
Рыс. 1



Рыс. 2



Рыс. 3

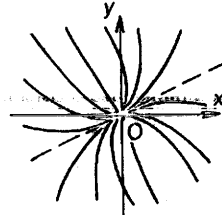


Рыс. 4

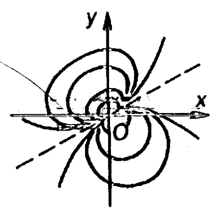
В. можна разглядаць і як фігуру, атрыманую паваротам фіксаванага проміня вакол пункта, з якога прамень выходзіць, да зададзенага стану. Такое азначэнне дае магчымасць абагульніць паняцце В.: у залежнасці ад кірунку павароту адрозніваюць дадатныя і адмоўныя В. Пад в у г л о м п а м і ж д з в ю м а к р ы в ы м і, якія перасякаюцца ў адным пункце, разумеюць В. паміж датычнымі да крывых у гэтым пункце (рыс. 4). Гл. таксама *Цялесны вугал*. В у г л о м п а м і ж в е к т а р а м і называецца найменшы вугал, на які трэба павярнуць адзін вектар, каб яго кірунак супаў з кірункам другога вектара.

ВУГЛАВЫ́ КАЭФІЦЫЕ́НТ п р о с т а й — лік k у раўнанні $y = kx + b$ простай на плоскасці. Геаметрычны сэнс k — тангенс вугла нахілу простай да восі абцыс. Ведаючы вуглавыя каэфіцыенты k_1 і k_2 дзвюх простых, можна знайсці вугал φ паміж гэтымі простымі паводле формулы $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}$.

ВУ́ЗЕЛ — 1) В. у т э о р ы і д ы ф е р э н ц ы я л ь н ы х р а ў н а н н я ў — тып асаблівага пункта P стацыянарнай сістэмы звычайных дыферэнцыяльных раўнанняў. Кожная траекторыя, якая праходзіць праз малое наваколле S пункта P, прымыкае да яго (уваходзіць у яго або выходзіць з яго) з пэўнай датычнай. У першым выпадку В. называецца ў с т о й л і в ы м, у другім — н я ў с т о й л і в ы м. На плоскасці вылучаюць тры тыпы В.: а) з в ы ч а й н ы (б і к р ы т ы ч н ы) В. —

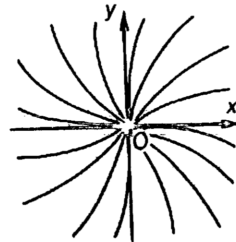


Рыс. 1



Рыс. 2

усе траекторыі ў S, з выняткам дзвюх, прымыкаюць да P з агульнай датычнай (рыс. 1); б) з в ы р о д н ы (м о н а к р ы т ы ч н ы) В. — усе траекторыі ў S прымыкаюць да P з агульнай датычнай (рыс. 2); в) а с а б л і в ы (д ы к р ы т ы ч н ы) — кожная траекторыя ў S прымыкае да P са сваёй датычнай (рыс. 3). В. называецца таксама тып раз-



Рыс. 3

мяшчэння траекторый у наваколлі асаблівага пункта. Тэрмін В. увёў А.Пуанкарэ; 2) В. у т э о р ы і в у з л о ў — несамаперасякальная замкнёная ў трохмернай эўклідавай прасторы крывая. Разглядаюцца таксама мнагамерныя В.

ВУ́ЗЕЛ ІНТЭРПАЛЯ́ЦЫІ — пункт, у якім пры інтэрпаляцыі задаецца значэнне шуканай функцыі. Гл. *Інтэрпаляцыйная формула, Квадратурная формула.*

ВУЗЛАВЫ́ ПУНКТ п л о с к а й к р ы в о й — тое, што *самаперасячэння пункт.*

ВЫ́БАРКА — вынікі абмежаванага мноства назіранняў $x_1, x_2, \ldots, x_n$ выпадковай велічыні ξ. В. можна разглядаць як нейкі эмпірычны аналаг генеральнай сукупнасці, паколькі даследаванне ўсёй генеральнай сукупнасці бывае або вельмі працаёмістым, або прынцыпова немагчымым (у выпадку бясконцых сукупнасцяў). Колькасць на-

зіранняў n, якія ўтвараюць В., называюць аб'ёмам В. Рознасць паміж найбольшым і найменшым элементамі В. называецца размахам, або шырынёй В.

ВЫБАРКАВАЕ РАЗМЕРКАВАННЕ — *размеркаванне імавернасцяў*, якое вызначаецца на падставе выбаркі для ацэньвання сапраўднага размеркавання. Няхай вынікі назіранняў $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — узаемна незалежныя і аднолькава размеркаваныя выпадковыя велічыні з функцыяй размеркавання $F(x)$ і няхай $x_{(1)} < x_{(2)} < \ldots < x_{(n)}$ — адпаведная варыяцыйная паслядоўнасць. В.р., якое адпавядае вынікам назіранняў $x_1, x_2, \ldots, x_n$, называецца дыскрэтным размеркаваннем, што прыпісвае кожнаму значэнню x_k імавернасць $1/n$. Функцыя В.р. $\hat{F}(x)$, якая называецца эмпірычнай функцыяй размеркавання, ёсць кавалкава-сталая функцыя са скачкамі, кратнымі $1/n$, у пунктах, што вызначаюцца велічынямі $x_{(1)}, \ldots, x_{(n)}$.

ВЫБАРКАВАЕ СЯРЭДНЯЕ — матэматычнае спадзяванне *выбаркавага размеркавання*, якое знаходзіцца па формуле

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k.$$

В.с. $\bar{x}$ ёсць слушная і нязрушаная ацэнка для $m = M\xi$. Калі існуе σ^2 дысперсія генеральнай сукупнасці, то $\bar{x}$ мае асімптатычна нармальнае размеркаванне з параметрамі $(m, \sigma^2/n)$.

ВЫБАРКАВАЕ СЯРЭДНЯЕ КВАДРАТОВАЕ АДХІЛЕННЕ — сярэдняе квадратовае адхіленне *выбаркавага размеркавання*, роўнае дадатнаму значэнню квадратовага кораня з *выбаркавай дысперсіі*:

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}.$$

Адпаведная ацэнка В.с.к.а. статыстыкі t называецца стандартнай памылкай t.

ВЫБАРКАВАЯ ДЫСПЕРСІЯ — дысперсія *выбаркавага размеркавання*, якая знаходзіцца па формуле

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}).$$

В.д. S^2 — слушная, але зрушаная ацэнка дысперсіі, таму часцей карыстаюцца В.д. $\frac{n}{n-1}S^2$, якая з'яўляецца нязрушанай ацэнкай.

ВЫБАРКАВАЯ МЕДЫЯНА — лік μ, які вызначаецца па выбарцы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ наступным чынам:

$$\mu = \begin{cases} x_m, & \text{калі } n = 2m + 1, \\ \frac{1}{2}(x_{m-1} + x_m), & \text{калі } n = 2m. \end{cases}$$

ВЫБАРКАВАЯ ПРАСТОРА — мноства ўсіх *элементарных падзей*, звязаных з нейкім эксперыментам, прычым усякі нераскладальны вынік эксперыменту падаецца адным і толькі адным пунктам В.п. (выбаркавым пунктам). В.п. — гэта абстрактнае мноства, на σ-алгебры падмностваў якога задаецца імавернасная мера. У простым выпадковым выбары статыстычныя звесткі ёсць вынікі назіранняў значэнняў выпадковай велічыні ξ у паслядоўнасці незалежных выпрабаванняў. У гэтым выпадку В.п. — n-мерная *эўклідава прастора*.

ВЫБАРКАВАЯ ФУНКЦЫЯ — функцыя $X_t = X_t(\omega)$ аргумента t, якая адназначна адпавядае кожнаму назіранню *выпадковага працэсу* $X_t \in E$, $t \in T$; тут $\{\omega\} = \Omega$ — мноства элементарных падзей. Выпадковы працэс X_t характарызуецца імавернаснай мерай у прасторы В.ф. Пры вывучэнні лакальных уласцівасцяў В.ф. мяркуюць, што X_t з'яўляецца сепарабельным, або знаходзіцца эквівалентны выпадковы працэс з зададзенымі лакальнымі ўласцівасцямі В.ф.

ВЫБАРКАВЫ МЕТАД — статыстычны метад даследавання агульных уласцівасцяў сукупнасці якіх-небудзь аб'ектаў на аснове вывучэння ўласцівасцяў толькі часткі гэтых аб'ектаў (*выбаркі*). Матэматычная тэорыя В.м. абапіраецца на два раздзелы матэматычнай статыстыкі — тэорыю выбару з канцай сукупнасці і тэорыю выбару з бясконцай сукупнасці. Асноўнае адрозненне В.м. для канцай і бясконцай сукупнасцяў палягае ў тым, што ў першым выпадку В.м. ужываюцца для аб'ектаў невыпадковай, дэтэрмінаванай прыроды, а ў другім — для вывучэння ўласцівасцяў выпадковых аб'ектаў.

ВЫБАРКАВЫ МОМАНТ — момант *выбаркавага размеркавання*. Пачатковы В.м. $\bar{x}^2$ і цэнтральныя В.м. m_r вызначаюцца формуламі:

$$\bar{x}^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2; \; m_2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2,$$

дзе $\bar{x}^2$ — нязрушаная ацэнка для адпаведнага тэарэтычнага пачатковага моманту $a_2 = M\xi^2$ генеральнай сукупнасці, а m_2 — зрушаная ацэнка для

адпаведнага тэарэтычнага цэнтральнага моманту $\mu_2 = M(\xi - m)^2$.

ВЫ́БАРУ АКСІЁМА, Цэрмела аксіёма — адна з аксіём аксіяматычнай тэорыі мностваў. Няхай зададзенае мноства M, элементы M_α якога парамі не перасякаюцца; тады існуе мноства K, кожны элемент якога K_α належыць M_α і $M_\alpha \cap K = K_\alpha$. Іншымі словамі, В.а. гарантуе існаванне мноства K з элементамі K_α, якія выбралі "па адным" з кожнага мноства M_α. В.а. дала штуршок для шматлікіх даследаванняў. З яе вынікае шэраг фактаў, якія супярэчаць інтуіцыі. Напрыклад, шар можна разбіць на канцую колькасць частак, з якіх рухамі ў прасторы можна скласці два такія шары.

ВЫВЯДЗЕ́ННЯ ПРА́ВІЛА, дэдукцыйныя правіла — элемент задання фармальных тэорый (злічэнняў). В.п. — аперацыя, якая мноства формул фармальнай тэорыі, што называюцца ўмовамі, пераводзіць у формулу, якая называецца непасрэднай высновай гэтага мноства формул. Прыкладам можа быць правіла modus ponens (MP): B — непасрэдная выснова формулаў A і $A \Rightarrow B$ (паводле правіла MP). У фармальных тэорыях В.п. — аналаг элементарных лагічных крокаў, з дапамогай якіх пераходзяць ад адных сцверджанняў да іншых і якія пераводзяць праўдзівыя сцверджанні ў праўдзівыя.

ВЫГІНА́ННЕ — дэфармацыя паверхні, пры якой даўжыня кожнай дугі адвольнай лініі, праведзенай на гэтай паверхні, застаецца нязменнай. Напрыклад, згортванне аркуша паперы ў цыліндр або конус (даўжыня кожнай дугі адвольнай лініі, праведзенай на паперы, застаецца нязменнай; аднак раздзіманне паветранага шарыка — прыклад дэфармацыі, якая не з'яўляецца В.). Пры В. паверхні вонкавая крывізна ў кожным яе пункце застаецца нязменнай.

ВЫЗНАЧА́ЛЬНЫЯ СТАСУ́НКІ універсальнай алгебры G у дачыненні да сістэмы яе ўтваральных элементаў — стасункі $u_j = v_j$, $j \in J$ (дзе u_j і v_j — выразы ад утваральных элементаў, якія маюць сэнс у *сігнатуры* разгляданай алгебры), такія, што ўсе астатнія стасункі ў гэтай алгебры ёсць вынікі дадзеных і тоеснасцяў мнагастайнасці, у якой разглядаецца алгебра G.

ВЫ́ЗНАЧАНЫ ІНТЭГРА́Л — адно з найважнейшых паняццяў матэматычнага аналізу. В.і. азначаецца як ліміт інтэгральных сумаў (гл. *Рымана інтэграл*, *Кашы інтэграл*, *Лебэга інтэграл*).

В.і. ад функцыі $f(x)$ па адрэзку $[a, b]$ абазначаецца сімвалам $\int_a^b f(x)dx$. Упершыню В.і. як ліміт інтэгральных сумаў увёў А.Кашы ў 1823 г. для непарыўных функцый. Выпадак адвольных функцый разгледзеў Б.Рыман у 1853 г. Важкі ўклад у тэорыю В.і. зрабіў Г.Дарбу (гл. *Дарбу сума*). А.Лебэг у 1901 г. даў у завершаным выглядзе неабходныя і дастатковыя ўмовы існавання В.і. ад разрыўных функцый. Ён жа разгледзеў паняцце В.і. ад вымернай функцыі значна больш агульна, што вычэрпвае амаль усе патрабаванні матэматычнага аналізу. Паміж В.і. ад непарыўнай на адрэзку $[a, b]$ функцыі $f(x)$ і нявызначаным інтэгралам (або першаіснай гэтай функцыі) існуе наступная сувязь: 1) кожная непарыўная на адрэзку $[a, b]$ функцыя $f(x)$: $[a, b] \to \mathbf{R}$ мае на гэтым адрэзку першаісную $F(x)$, якой з'яўляецца В.і. з зменнай верхняй мяжою, г.зн.

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + C,$$

і тады нявызначаны інтэграл вызначаецца формулай

$$\int f(x)dx = \int_a^x f(t)dt + C,$$

дзе C — адвольная канстанта; 2) калі $F(x)$ — адвольная першаісная функцыі $f(x)$, то праўдзіцца Ньютана — Лейбніца формула:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Геаметрычна В.і. ад непарыўнай функцыі вызначае плошчу крывалінейнай трапецыі, абмежаванай адрэзкам $[a, b]$, воссю Ox, графікам функцыі $y = f(x)$ і адрэзкамі простых $x=a$ і $x=b$.

Азначэнне В.і. паводле Лебэга. Няхай $f(x)$ — вымерная і абмежаваная на адрэзку $[a, b]$ функцыя, прычым $A \le f(x) \le B$. Падзелім адрэзак $[A, B]$ на n частак пунктамі $A = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = B$ і абазначым праз M_i мноства ўсіх значэнняў x з $[a, b]$, для якіх $y_{i-1} \le f(x) \le y_i$, а праз $\mu(M_i)$ — меру Лебэга мноства M_i. Тады інтэгральная сума Лебэга функцыі $f(x)$ на адрэзку $[a, b]$ вызначаецца роўнасцю $\sigma = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \mu(M_i)$, дзе η_i — адвольны лік з адрэзка $y_{i-1} \le \eta_i \le y_i$. Функцыю $f(x)$ называюць інтэгравальнай паводле Лебэга на адрэзку $[a, b]$, калі існуе

ліміт яе інтэгральных сумаў пры імкненні да нуля максімальнай з рознасцяў $y_i - y_{i-1}$. Больш дакладна гэта азначае: існуе такі лік I, што для адвольнага $\varepsilon > 0$ можна знайсці такое $\delta > 0$, што для ўсіх інтэгральных сумаў σ, падпарадкаваных умове $\max_i(y_i - y_{i-1}) < \delta$, праўдзіцца няроўнасць $|I - \sigma| < \varepsilon$. Тады лік I называецца В.і. Лебэга функцыі $f(x)$ на адрэзку $[a, b]$. Азначэнне інтэграла Лебэга дае магчымасць разглядаць замест адрэзка $[a, b]$ адвольнае мноства, вымернае ў дачыненні да нейкай неадмоўнай злічальнай адытыўнай меры. Здзяйсняецца таксама пераход да інтэграла па адвольным мностве адвольнага ліку вымярэнняў. У гэтым выпадку інтэграл разглядаюць як функцыю мноства M, на якім выконваецца інтэграванне, і ён мае выгляд $I(M) = \int_M f(x)dU(x)$, дзе U — нейкая функцыя мноства M. Прыватны выпадак гэтага інтэграла — *кратны інтэграл* і *паверхневы інтэграл*. Т.Стыльт'ес у 1894 г. увёў абагульненне інтэграла Рымана, у якім разглядаецца інтэгравальнасць адной функцыі, зададзенай на адрэзку $[a, b]$, у дачыненні да іншай функцыі, вызначанай на тым жа адрэзку. *Крывалінейны інтэграл* ёсць прыватны выпадак *Стыльт'еса інтэграла*. Абагульненнем В.і. з'яўляецца *неўласцівы інтэграл*.

ВЫЗНА́ЧНІК (дэтэрмінант) квадратнай матрыцы — для матрыцы $A = [a_{ij}]$ парадку n над асацыятыўна-камутатыўным колцам K сума ўсіх здабыткаў выгляду $(-1)^t a_{1i_1} \cdot \ldots \cdot a_{ni_n}$, дзе $i_1, \ldots, i_n$ — перастанова лікаў $1, \ldots, n$, а t — сума інверсій гэтай перастановы. Абазначаецца $|A|$, $\det A$, або

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

В. ёсць сума $n!$ складнікаў. Калі $n = 1$, то $\det A = a_{11}$, а пры $n = 2$ $\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$. Некаторыя ўласцівасці В.: 1) В. не змяняецца пры транспанаванні (г.зн. $|A| = |A^T|$); 2) В. роўны нулю, калі два радкі (слупкі) матрыцы прапарцыйныя; 3) агульны множнік усіх элементаў радка (слупка) можна вынесці за знак В.; 4) В. не змяняецца, калі да элементаў аднаго радка (слупка) дадаць элементы другога, памножаныя на элемент колца K, які не роўны нулю; 5) $|AB| = |A| \cdot |B|$.

Пералічаныя ўласцівасці значна спрашчаюць вылічэнне В. Яго можна таксама азначыць аксіяматычна як лінейную функцыю ад слупкоў (радкоў) матрыцы, якая адпавядае ўмовам 1—3. Пры вылічэнні В. звычайна карыстаюцца яго раскладам па радку (слупку):

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{ik} \left(|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}A_{ki} \right),$$

A_{ik} — алгебраічны дадатак да элемента a_{ik} (гл. *Мінор*). Тэорыя В. узнікла ў сувязі з развязаннем сістэм лінейных раўнанняў з квадратнай матрыцы A. Калі $\det A \neq 0$, то сістэма мае толькі адзін развязак, які знаходзіцца паводле *Крамэра правіла*. Тэорыя В. пабудаваная і для матрыц над целам (В.Д'ёданэ). Яна ў многім аналагічная тэорыі В. над полем. Паняцце В. увёў Г.Ляйбніц (1678); тэрмін В. упершыню трапляецца ў К.Гаўса (1801); першы артыкул належыць Г.Крамэру (1750).

ВЫКА́ЗВАННЕ — апавядальны сказ, пра змест якога магчыма сцвярджаць, праўдзівы ён ці не і які не можа быць аднначасова праўдзівы і непраўдзівы (г.зн. выказванні падпарадкоўваюцца *скасаванага трэцяга закону* і *супярэчнасці закону*). Праўдзівасць або непраўдзівасць выказванняў пазначаюць літарамі П, Н (або лічбамі 1 і 0). Калі a — праўдзівае (непраўдзівае) выказванне, то пішуць a = П (a = Н) і кажуць, што a мае значэнне П (Н). З наяўных выказванняў магчыма будаваць новыя (складаныя) выказванні з дапамогай злучнікаў "і", "ці", "калі..., то...", "калі і толькі калі..." і часціцы "не". *Логікавыя аперацыі* з выказваннямі адлюстроўваюць змястоўны сэнс адзначаных злучнікаў і надаюць дакладны матэматычны сэнс гэтым канструкцыям.

ВЫКА́ЗВАННЯЎ ЗЛІЧЭ́ННЕ — злічэнне, якое будуецца, як кожная фармальная сістэма, і прызначанае дзеля фармалізацыі логікі выказванняў, г.зн. тых логікавых разважанняў, у якіх абстрагуюцца ад змястоўнага сэнсу таго, пра што гаворыцца ў выказваннях, цікавяцца толькі іх праўдзівасцю і ўлічваюць толькі логікавую структуру выказванняў — як адны выказванні атрымаць з іншых з дапамогай логікавых аперацый. Магчымы розныя варыянты будавання В.з., якія адрозніваюцца выбарам асноўных логікавых аперацый, выбарам аксіём і правілаў вывядзення.

У якасці прыкладу пададзім наступнае будаванне В.з.: 1) алфавіт В.з. (сукупнасць сімвалаў, з якіх будуюцца формулы) складаецца з трох наступных відаў сімвалаў: сімвалы зменных $a_1, a_2, \ldots$; логікавыя сімвалы $\neg$, $\Rightarrow$ і дапаможныя сімвалы — дужкі (,); 2) паняцце формулы В.з. задаецца наступным чынам: кожная зменная ёсць формула; калі A, B — формулы, то $(\neg A)$, $(A \Rightarrow B)$ — таксама

формулы; 3) схемы аксіём В.з. такія: калі A, B, C — формулы, то наступныя формулы — аксіёмы: $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$, $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$, $((\neg B) \Rightarrow (\neg A)) \Rightarrow (((\neg B) \Rightarrow A) \Rightarrow B)$; 4) адзіным правілам вывядзення з'яўляецца правіла modus ponens, або правіла вывядзення: B — непасрэдны вынік формул A і $A \Rightarrow B$. Скарочана яго абазначаюць MP. Адзначым, што бясконцае мноства аксіём задаецца з дапамогай усяго трох схемаў аксіём, кожная з якіх задае безліч аксіём. Часам замест схемаў аксіём разглядаюць тры аксіёмы, але тады патрэбна да правілаў вывядзення далучыць правіла падстановы, якое дазваляе ад формулы $A(a_1,...,a_n)$ са зменнымі $a_1,...,a_n$ перайсці да формулы $A(B_1,...B_n)$, атрыманай з A падстановай якіх-небудзь формул $B_1,...B_n$ замест зменных $a_1,...a_n$; 5) доказам называецца канцая паслядоўнасць формул такая, што кожная формула гэтай паслядоўнасці з'яўляецца або аксіёмай, або атрыманая з дзвюх папярэдніх формул з дапамогай правіла MP; 6) формула A называецца доказнай (выводнай, тэарэмай) у В.з., калі ёсць доказ, апошняй формулай якога з'яўляецца формула A. Адна з асноўных тэарэм В.з. — тэарэма пра поўнасць В.з. (Э.Пост, 1921), якая сцвярджае, што сукупнасць тоесна праўдзівых формул логікі выказванняў супадае з сукупнасцю доказных (выводных) формул В.з. З яе лёгка выводзіцца тэарэма пра несупярэчлівасць В.з.

ВЫЛІЧА́ЛЬНАЯ ГЕАМЕ́ТРЫЯ — дастасоўная матэматычная дысцыпліна, якая распрацоўвае метады развязання з дапамогай кампутара геаметрычных задач, што ўзнікаюць у аўтаматызаваным праектаванні, апрацоўцы адлюстраванняў, робататэхніцы і іншых галінах. В.г. мае кірункі: геаметрычнае мадэляванне і камбінаторная В.г. Прадмет даследавання камбінаторнай В.г. — спецыяльныя структуры звестак, на аснове якіх распрацоўваюцца эфектыўныя алгарытмы пераважна для мнагагранневых аб'ектаў. Галоўныя задачы камбінаторнай В.г. — рэгіянальны пошук (вызначэнне падмностваў пунктаў з ліку звестак, змешчаных у тых ці іншых рэгіёнах), лакалізацыя пунктаў (вызначэнне рэгіёна з набору дадзеных рэгіёнаў, у які трапляе дадзены пункт), пошук "найбліжэйшых суседзяў", мінімальных каркасаў і выпуклых абалонак на канцым мностве пунктаў эўклідавай прасторы, будаванне аб'яднанняў і перасячэнняў сукупнасцяў мнагагранневых аб'ектаў.

ВЫЛІЧА́ЛЬНАЯ МАДЭ́ЛЬ — задача або шэраг задач, якія адпавядаюць праблеме лікавага развязання матэматычных ці дастасоўных праблем. Звычайна пры развязанні адной і той жа праблемы ствараюць некалькі вылічальных мадэляў рознай складанасці і глыбіні пранікнення ў сутнасць праблемы.

ВЫЛІЧА́ЛЬНАЯ МАТЭМА́ТЫКА — раздзел матэматыкі, у якім распрацоўваюцца і даследуюцца метады лікавага развязання матэматычных задач. Метады В.м. набліжаныя, падзяляюцца на аналітычныя і лікавыя. Першыя даюць набліжаныя развязкі ў выглядзе аналітычнага выразу, другія — у выглядзе табліцы.

Узнікненне В.м. звязанае з неабходнасцю развязання асобных задач (вымярэнне адлегласцяў, плошчаў, аб'ёмаў і інш.). Развіццё навукі, асабліва астраноміі і механікі, спрыяла развіццю матэматыкі ўвогуле і В.м. у прыватнасці. Складаліся табліцы эмпірычна знойдзеных залежнасцяў, што стала асновай узнікнення паняцця функцыі і задачы інтэрпаляцыі. Поспехі В.м. звязаныя з імёнамі А.Ньютана, Л.Ойлера, К.Гаўса, П.Чабышова, А.Маркава, У.Сцяклова, А.Крылова, С.Чаплыгіна, С.Бернштэйна, А.Ціханава, С.Собалева, У.Крылова, Л.Кантаровіча, А.Самарскага і інш.

Задачы В.м. і метады іх развязання вельмі разнастайныя. Аднак сярод іх існуюць найбольш характэрныя. Многія задачы матэматыкі можна запісаць у выглядзе $y = Ax$, дзе x і y належаць зададзеным мноствам X і Y, A — нейкі аператар. Для развязання задачы трэба знайсці y па зададзеным x ці наадварот. У В.м. гэта задача развязваецца заменай мностваў X і Y і аператара A (ці толькі якіх-небудзь з іх) іншымі, зручнымі для вылічэнняў. Замена робіцца так, каб развязак новай задачы $y = Bx$ быў у нейкім сэнсе блізкім да развязку першапачатковай задачы. Напрыклад, калі ў якасці Ax узяць інтэграл $\int_a^b x(t)\,dt$, то набліжанае значэнне яго ў многіх выпадках можна вылічыць паводле квадратурнай формулы

$$\int_a^b x(t)\,dt \approx \sum_{k=1}^{n} A_k x(t_k), \qquad (1)$$

дзе A_k і t_k — нейкія фіксаваныя лікі. Гэта адна з класічных задач В.м. Пры развязанні яе, асабліва ў выпадку кратнага інтэгравання, карыстаюцца, напрыклад, *Монтэ-Карла метадам* ці яго мадыфікацыямі. Прынцыповае значэнне ў В.м. належыць *апраксімацыі тэорыі*. Адна з характэрных задач набліжання функцый — задача інтэрпаляцыі, г.зн. будавання па зададзенай функцыі $f(t)$ набліжанай функцыі, якая супадае з $f(t)$ у фіксава-

ных вузлах $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Напрыклад, *Лягранжа інтэрпаляцыйная формула* для функцыі $f(t)$ мае выгляд

$$L_n(f,t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\omega_n(t)}{(t-t_k)\omega_n'(t_k)}f(t_k),$$

дзе $\omega_n(t)=(t-t_1)(t-t_2)...(t-t_n)$. У тэорыі набліжання функцый рэчаіснай (а пазней і камплекснай) зменнай распрацоўваліся метады набліжання функцый аднаго класа функцыямі іншых класаў, а таксама вывучаліся пытанні збежнасці і ацэнак набліжанняў. Найбольш значныя задачы В.м. у алгебры — развязанне сістэм лінейных алгебраічных раўнанняў, вылічэнне вызначнікаў і адваротных матрыц, вызначэнне каранёў мнагаскладаў. У задачы набліжанага развязання сістэмы лінейных раўнанняў

$$AX=B, \qquad (2)$$

дзе A — квадратная матрыца, X і B — вектары-слупкі, часта выкарыстоўваюцца ітэрацыйныя метады. Многія ітэрацыйныя метады развязання сістэмы (2) маюць выгляд

$$X=X^{k-1}+B_k(B-AX^{k-1}),$$

дзе B_k $(k=1, 2, \ldots)$ — пэўная паслядоўнасць матрыц, X^0 — пачатковае набліжанне, часам адвольнае. Розны выбар матрыц B_k дае розныя ітэрацыйныя працэсы.

Значную частку В.м. складаюць набліжаныя і лікавыя метады развязання звычайных дыферэнцыяльных раўнанняў і дыферэнцыяльных раўнанняў у частковых вытворных. Асноўная задача гэтага раздзела В.м. — будаванне аналітычных і канца-рознасцевых метадаў, атрыманне ацэнак развязання, ацэнак і асімптотыкі хібнасцяў, даследаванне ўмоў устойлівасці рознасцевых апраксімацый і інш. Рознасцевыя метады развязання дыферэнцыяльных раўнанняў заснаваныя на замене вытворных, якія ўваходзяць у дыферэнцыяльныя раўнанні, лінейнай камбінацыяй значэнняў функцыі ў вузлах так, каб гэтыя лінейныя камбінацыі імкнуліся (пры неабмежаваным памяншэнні адлегласцяў паміж пунктамі) да адпаведных вытворных. Напрыклад, раўнанне $y'=(x,y)$ з пачатковай умовай $y(x_0)=y_0$ развязваецца рознасцевым метадам у выглядзе

$$y(x_{n+1})=y(x_n)+hy'(x_n),$$

дзе $x_n=x_0+nh$, h — крок. Пры развязанні дыферэнцыяльных раўнанняў у частковых вытворных карыстаюцца метадам сетак. Напрыклад, развязанне раўнання Пуасона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y)$$

метадам сетак зводзіцца да развязання сістэмы алгебраічных лінейных раўнанняў

$$u(x_{i+1},y_j)+u(x_{i-1},y_j)+u(x_i,y_{j+1})+$$
$$+u(x_i,y_{j-1})-u(x_i,y_j)=h^2f(x_i,y_j),$$

якое звязвае значэнні невядомай функцыі $u(x,y)$ у вузлах сеткі (x_i,y_j). У В.м. выкарыстоўваюцца метады, якія дазваляюць зводзіць мнагамерныя задачы да задач меншай памернасці. Значнае месца займаюць набліжаныя метады развязання інтэгральных раўнанняў, інтэгра-дыферэнцыяльных раўнанняў, вылічальныя метады варыяцыйнага злічэння, аптымальнага кіравання і інш. З'яўленне вылічальных машын значна пашырыла кола задач і стымулявала далейшую распрацоўку метадаў В.м. з улікам магчымасцяў вылічальных машын.

У Беларусі даследаванні па В.м. і падрыхтоўка навуковых кадраў пачаліся ў 1956 г. пад кіраўніцтвам акад. У.Крылова. Здзейсненыя значныя даследаванні па набліжаных метадах кантынуальнага інтэгравання (П.Сабалеўскі, А.Ягораў, Л.Яновіч), па лікавых метадах і матэматычным мадэляванні задач матэматычнай фізікі (В.Абрашын, В.Дрыц, П.Матус, В.Волкаў), па лікавых метадах задачы Кашы і краявых задачах для звычайных дыферэнцыяльных раўнанняў (У.Бабкоў, П.Манастырны і інш.), па распрацоўцы метадаў развязання функцыянальных раўнанняў і некарэктных задач (П.Забрэйка, А.Ліскавец), у галіне набліжанняў функцый і квадратурных формул (А.Турэцкі, В.Русак, А.Пякарскі, М.Шэшка), па паралельных вылічальных працэсарах (М.Ліхадзед). У Інстытуце матэматыкі НАН Беларусі і ў вылічальных цэнтрах рэспублікі распрацаваныя праграмныя сродкі для розных тыпаў кампутараў і развязаныя шматлікія навуковыя і інжынерна-тэхнічныя задачы.

ВЫЛІЧА́ЛЬНЫ АЛГАРЫ́ТМ — дакладна вызначаны пералік дзеянняў для пераўтварэння пэўнага масіву пачатковых звестак у масіў вынікаў, які ажыццяўляецца за концую колькасць аперацый пры дапамозе аднапрацэсарнага (паслядоўны В.а.) або шматпрацэсарнага (паралельны В.а.) кампутараў. Рэалізацыя В.а. ажыццяўляецца ў выглядзе дыскрэтна размеркаванай у часе концай паслядоўнасці станаў рэальнага кампутара.

Рэалізацыя В.а. на шматпрацэсарным кампутары грунтуецца на выкарыстанні паралельных вылічэнняў, г.зн. на выкарыстанні магчымасці адначасовага выканання многіх дзеянняў на інфармацыйна звязаных працэсарах, якія працуюць незалежна.

ВЫЛІЧÁЛЬНЫ ЭКСПЕРЫМÉНТ — спосаб тэарэтычнага даследавання складаных праблем, заснаваны на будаванні і аналізе з дапамогай кампутараў матэматычных мадэляў аб'ектаў, з'явы, працэсу, якія вывучаюцца. Схему В.э. разгледзім на прыкладзе даследавання якога-небудзь фізічнага працэсу. На першым этапе ажыццяўляецца выбар фізічнага набліжэння, г.зн. фармулююцца асноўныя законы, якія кіруюць дадзеным працэсам. Тут патрабуецца вызначыць, якія фактары трэба ўлічыць, а на якія можна не звяртаць увагі. На другім этапе будуецца адпаведная матэматычная мадэль, звычайна запіс фізічных законаў у выглядзе сістэмы алгебраічных, дыферэнцыяльных, інтэгральных або іншых раўнанняў. Пры выбары матэматычнай мадэлі таксама не зважаюць на фактары, якія істотна не ўплываюць на ход доследнага працэсу. Атрыманую матэматычную мадэль даследуюць метадамі агульнай тэорыі дыферэнцыяльных і інтэгральных раўнанняў. На трэцім этапе В.э. будуецца лікавы метад развязання задачы, на чацвёртым — праграмуецца на кампутары вылічальны алгарытм, на пятым — вядуцца вылічэнні, аналіз атрыманых лікавых вынікаў і пры неабходнасці ўдакладненне фізічнай і матэматычнай мадэляў. Апошняе азначае, што матэматычная мадэль можа быць занадта грубай, г.зн. вынік вылічэнняў не ўзгадняецца з фізічным эксперыментам, ці занадта складанай, г.зн. здавальняльны вынік можна атрымаць пры больш простай мадэлі. Такім чынам паўтараюцца першы і астатнія этапы В.э. неабходную колькасць разоў.

ВЫМÉРНАЕ БАРЭ́ЛЯ МНÓСТВА — тое, што *барэлева множства*.

ВЫМÉРНАЕ МНÓСТВА — мноства, якое ўваходзіць у абсяг вызначэння дадзенай меры μ (гл. *Мера*). Калі μ — імавернасная мера, то В.м. называюць выпадковай з'явай. У вузейшым сэнсе В.м. — мноства, да якога прыдатнае азначэнне меры паводле Лебэга. Прыклады В.м. простай — замкнёныя і адкрытыя мноствы.

ВЫМÉРНАЯ ФУ́НКЦЫЯ — функцыя $f(x)$, для якой пры кожным t мноства $\{x: f(x) < t\}$ — вымернае паводле Лебэга. Асноўныя аперацыі алгебры і аналізу: сума, здабытак, рознасць, дзель, ліміт паслядоўнасці В.ф. пакідаюць В.ф. у класе В.ф. Існуе і больш абстрактнае разуменне В.ф., калі меру Лебэга замяняюць на адвольную меру μ. Напрыклад, у выпадку імавернаснай меры P В.ф. называюць в ы п а д к о в ы м і в е л і ч ы н я м і.

ВЫПАДКÓВАЕ БЛУКÁННЕ — спецыяльнага выгляду *выпадковы працэс.* Яго можна разглядаць як мадэль, якая апісвае перамяшчэнне часцінкі ў нейкай фазавай прасторы пад уплывам якога-небудзь выпадковага механізма. Найбольш часта ў якасці фазавай прасторы выступае эўклідава прастора R^d. Выпадковыя механізмы могуць быць розныя; найчасцей разглядаюць В.б., якія ўтвараюцца падсумаваннем незалежных выпадковых велічыняў або ланцугамі Маркава.

Траекторыі прасцейшых В.б. у выпадку $d = 1$ апісваюцца пачатковым станам $S_0 = 0$ і паслядоўнасцю сумаў $S_n = X_1 + ... + X_n$, $n = 1, 2, ...$, дзе X_i незалежныя і маюць размеркаванне Бэрнулі $P(X_i = 1) = p$; $P(X_i = -1) = q = 1-p, p \in (0, 1)$. Значэнне S_n можна разглядаць як выйгрыш аднаго з двух гульцоў пасля n партый гульні, у якой гэты гулец у кожнай партыі выйграе адзін талер з імавернасцю p і прайграе яго з імавернасцю $1-p$.

ВЫПАДКÓВАЯ ВЕЛІЧЫНЯ́ — адназначная рэчаісная функцыя $\xi = \xi(\omega)$, вызначаная на Ω, для якой выконваецца $\{\omega: \xi(\omega) < x\} \in F$, дзе (Ω, F, P) — імавернасная прастора. Калі ξ — В.в., то клас F_ξ тых мностваў $C \subset R$, для якіх $\{\omega: \xi(\omega) < c\} \in F$, будзе σ-алгебрай, якая змяшчае ў сабе ўсе барэлевы падмноствы R^1. Меру P_ξ, вызначаную для кожнага барэлевага мноства $B \subset R^1$ роўнасцю $P_\xi(B) = P(\omega: \xi(\omega) \in B)$, называюць р а з м е р к а в а н н е м і м а в е р н а с ц я ў В.в. ξ. Гэтая мера адназначна вызначаецца па функцыі размеркавання В.в. ξ: $F_\xi(x) = P_\xi(-\infty, x) = P(\omega: \xi(\omega) < x)$.

ВЫПАДКÓВАЯ ПАДЗÉЯ — адвольнае падмноства вынікаў выпадковага эксперыменту. Калі (Ω, F, P) — імавернасная прастора, то адвольнае падмноства Ω будзе В.п. Часта В.п. называюць толькі элементы σ-алгебры F. У прыкладзе з кіданнем двух гульнёвых кубікаў кожны з 36 вынікаў эксперыменту пададзены ў выглядзе пары (i, j), дзе i — колькасць ачкоў на верхняй грані першага кубіка, а j — на верхняй грані другога. Падзея "сума выпадковых ачкоў роўная 11" ёсць не што іншае, як аб'яднанне падмностваў (5, 6) і (6, 5).

Пры кіданні наўздагад двух пунктаў на адрэзак (0, 1) сукупнасць усіх вынікаў эксперыменту

можна падаць у выглядзе пунктаў (x, y) (x — каардыната першага пункта, y — другога) квадрата $\{(x, y): 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$. Падзея "першы пункт знаходзіцца лявей за другі" ёсць мноства пунктаў квадрата, якія знаходзяцца вышэй дыяганалі.

ВЫПАДКÓВАЯ ПАСЛЯДÓЎНАСЦЬ, в ы п а д к о в ы п р а ц э с з д ы с к р э т н ы м ч а с а м — *выпадковая функцыя*, зададзеная на мностве ўсіх цэлых лікаў $t = 0, \pm1, \pm2, ...$, або цэлых лікаў $t = 1, 2, ...$.

ВЫПАДКÓВАЯ ПЛЫНЬ БЕЗ ВЫ́НІКУ — плынь падзей (патрабаванняў), колькасць якіх за адвольны прамежак часу не залежыць ад таго, колькі і як адбываліся падзеі ў іншыя прамежкі часу. Тэрмін выкарыстоўваецца ў тэорыі масавага абслугоўвання. Калі $\eta(t)$ — колькасць падзей, якія ствараюць В.п.б.в., што адбыліся за час t, то $\eta(t)$ — выпадковы працэс з незалежнымі прыростамі.

ВЫПАДКÓВАЯ ФУ́НКЦЫЯ — функцыя адвольнага аргумента t, якая зададзена на мностве T яго значэнняў і прымае лікавыя значэнні або значэнні з нейкай вектарнай прасторы, і такая, што яе значэнні вызначаюцца ў залежнасці ад выніку некаторага выпрабавання, прычым для іх існуе размеркаванне імавернасцяў. Калі мноства T канцае, то В.ф. $X(t)$ на T — канцы набор выпадковых велічынь, якія можна лічыць адной мнагамернай выпадковай велічынёй, што характарызуецца мнагамернай функцыяй размеркавання. Калі T — інтэрвал рэчаіснай восі, то В.ф. называецца в ы п а д к о в ы м п р а ц э с а м. Калі ж T — бясконцае падмноства цэлых лікаў, то В.ф. называецца в ы п а д к о в а й п а с л я д о ў н а с ц ю.

ВЫПАДКÓВЫ ВÉКТАР — сукупнасць выпадковых велічынь, вызначаных на адной і той жа імавернаснай прасторы. Кожнай элементарнай падзеі, напрыклад вырабу на станку трубкі, можна паставіць у адпаведнасць выпадковыя велічыні (параметры трубкі): ξ_1 — вага, ξ_2 — дыяметр, ξ_3 — таўшчыня, ξ_4 — даўжыня і г.д. Асноўнай характарыстыкай n-мернай выпадковай велічыні $\xi(\xi_1, ..., \xi_n)$ з'яўляецца яе функцыя размеркавання $F_\xi(x_1, ..., x_n) = P(\xi_1 < x_1, ..., \xi_n < x_n)$. Па гэтай функцыі размеркавання можна адназначна вызначыць імавернасці падзей $(\xi \in B)$, дзе B — барэлева мноства ў R^n.

ВЫПАДКÓВЫ ГРАФ — імавернасная мадэль, якая выкарыстоўваецца для вывучэння частасных характарыстык розных параметраў графаў. Пад В.г. звычайна разумеюць некаторы клас графаў $\{G\}$, на якім зададзенае размеркаванне імавернасцяў. Адвольны канкрэтны граф G называецца р э а л і з а ц ы я й В.г. Усякая лікавая характарыстыка графа можа разглядацца як выпадковая велічыня. Паняцце В.г. ужываецца: пры мадэляванні сетак сувязі, на якія ўздзейнічаюць нейкія выпадковыя змены, або логікавых сетак, элементы якіх могуць знаходзіцца ў няспраўным стане; пры вывучэнні розных біялагічных працэсаў; пры развязанні задач мінімізацыі булевых функцый і інш.

ВЫПАДКÓВЫ ПРАЦЭ́С — тое, што *імавернасны працэс.*

ВЫПАДКÓВЫ ПРАЦЭ́С З ДЫСКРЭ́ТНЫМ ЧА́САМ — тое, што *выпадковая паслядоўнасць.*

ВЫПАДКÓВЫ ПРАЦЭ́С З НЕЗАЛЁЖНЫМІ ПРЫРÓСТАМІ — працэс $\xi(t)$, які мае наступную ўласцівасць: пры кожным n і кожных рэчаісных ліках $t_0 < t_1 < ... < t_n$ выпадковыя велічыні $\xi(t_k) - \xi(t_{k-1})$, $k = \overline{1,n}$, незалежныя. В.п. з н.п. называецца а д н а р о д н ы м, калі пры кожным t і τ размеркаванне выпадковай велічыні $\xi(t+\tau) - \xi(t)$ не залежыць ад τ. Прыклады В.п. з н.п. — *вінэраў працэс* і *пуасонаў працэс.*

ВЫПАДКÓВЫ ЭЛЕМÉНТ — вымернае адлюстраванне X: $(\Omega, F) \to E$, дзе Ω — прастора элементарных падзей, F — алгебра падзей. Калі $E = R$, то X называецца в ы п а д к о в а й в е л і ч ы н ё й; калі $E = R^n$, то X — в ы п а д к о в ы в е к т а р; калі E — мноства функцый, то X — в ы п а д к о в ы п р а ц э с.

ВЫПАДКÓВЫЯ ЛІ́КІ — лікі ξ_n, для паслядоўнасці з'яўлення якіх характэрныя тыя або іншыя статыстычныя заканамернасці. Адрозніваюць В.л., якія ўтвараюцца якой-небудзь стахастычнай канструкцыяй, і псеўдавыпадковыя лікі, што атрымліваюцца пры дапамозе арыфметычных алгарытмаў. Пры гэтым звычайна лічаць, што атрыманая паслядоўнасць валодае комплексам частасных уласцівасцяў, "тыповых" для паслядоўнасці незалежных рэалізацый якой-небудзь выпадковай велічыні η з функцыяй размеркавання $F(x)$, і кажуць пра незалежныя В.л., размеркаваныя паводле закону $F(x)$.

Найбольш часта ўжываюцца раўнамерна размеркаваныя на адрэзку $[0, 1]$ В.л. ξ_n, $P(\xi_n \le x) = F(x)$, а таксама роўнаімаверныя двайковыя знакі α_n, $P(\alpha_n=0) = P(\alpha_n=1) = 1/2$. В.л. з адвольнай функцыяй размеркавання $F(x)$ могуць быць пабу-

даваныя па паслядоўнасці раўнамерна размеркаваных В.л. ξ_n як $\eta_n = F^{-1}(\xi_n)$, г.зн. іх можна знайсці з дапамогай раўнання $\xi_n = F(\eta_n)$.

ВЫПРАБАВА́ННЕ — адзін з асноўных тэрмінаў класічнай *імавернасцяў тэорыі*, што азначае комплекс папярэдніх умоваў, пасля якіх ажыццяўляецца выпадковая падзея. Пры аксіяматычным падыходзе В. азначаецца як адвольны падзел верагоднай падзеі на парамі несупольныя выпадковыя падзеі. Тэрмін В. ужываецца пераважна ў спалучэнні з іншымі: "паўторныя В.", "незалежныя В." і г.д.

ВЫПРАСТА́ЛЬНАЯ КРЫВА́Я — крывая, якая мае канцую даўжыню. Пры гэтым даўжынёй крывой лініі называецца ліміт паслядоўнасці даўжыняў ламаных, умежаных у гэтую лінію, пры ўмове, што даўжыня найбольшага адрэзка ламанай імкнецца да нуля.

ВЫПРАСТО́ЎНАЯ ПЛО́СКАСЦЬ — плоскасць, якая праходзіць праз датычную і бінармаль у дадзеным пункце крывой L. *Агінальная* сям'я В.п. дадзенай крывой L называецца выпрастоўнай паверхняй крывой. Лінія L на гэтай паверхні — геадэзічная, выпрастоўная паверхня — разгортвальная: пры разгортванні яе на плоскасць лінія L пераўтвараецца ў простую, г.зн. "выпростоўваецца" (адсюль назоў).

ВЫ́ПУКЛАЕ МНО́СТВА рэчаіснай вектарнай прасторы X — мноства, якому разам з адвольнымі двума пунктамі належыць і ўвесь адрэзак, што іх злучае. Мноства $M \subset X$ называецца выпуклым, калі для адвольных двух пунктаў $x, y \in M$ і адвольнага рэчаіснага ліку α, $0 \le \alpha \le 1$, праўдзіцца ўлучэнне $\alpha x + (1-\alpha) y \in M$. Рэлятыўнае нутро (нутро ў дачыненні да афіннай абалонкі) і замыканне В.м. таксама выпуклыя мноствы, пры гэтым самому В.м., яго рэлятыўнаму нутру і замыканню адпавядае адна і тая ж афінная абалонка. У канцамернай выпуклай прасторы адвольнае непустое В.м. мае непустое рэлятыўнае нутро. У той жа час у адвольнай бясконцамернай вектарнай прасторы існуюць непустыя В.м. з пустым рэлятыўным нутром. Паводле тэарэмы Крэйна — Мільмана кожнае кампактнае В.м. супадае з замыканнем выпуклай абалонкі яго краявых пунктаў (краявымі называюцца такія пункты мноства, якія не з'яўляюцца нутранымі ні для якога адрэзка, што цалкам належыць гэтаму мноству). Усе тапалагічныя ўласцівасці, прыведзеныя ніжэй, далучаюцца да В.м. аддзяляльнай лакальна выпуклай прасторы.

Гіперплоскасць H называецца апорнай да В.м. M у пункце $\alpha \in cM$ (cM — замыканне M), калі M належыць да адной з замкнёных паўпрастораў, утворанай гіперплоскасцю H, а пункт $\alpha \in H \cap cM$. Праз кожны межавы пункт В.м. з непустым нутром можна правесці апорную гіперплоскасць. Замкнёнае В.м. ёсць перасячэнне ўсіх замкнёных паўпрастораў, якія змяшчаюць гэтае мноства і адпавядаюць апорным гіперплоскасцям.

ВЫ́ПУКЛАЕ ПРАГРАМАВА́ННЕ — раздзел *матэматычнага праграмавання,* у якім даследуецца задача мінімізацыі выпуклай мэтавай функцыі $f(x)$ вектарнага аргумента $x = (x_1, ..., x_n)$, што задавальняе абмежаванні $g_i(x) \le 0$, $i = 1, ..., m$, $x \in X$, дзе $g_i(x)$ — выпуклыя функцыі, X — выпуклае мноства. Цэнтральны факт тэорыі В.п. — тэарэма пра седлавы пункт: для таго каб дапушчальны пункт x^* задачы В.п. быў аптымальны, неабходна (пры досыць шырокіх умовах) і дастаткова, каб існаваў такі вектар $\lambda^* = (\lambda_1^*, ..., \lambda_m^*)$ з неадмоўнымі кампанентамі λ_i^*, што пункт (x^*, λ^*) будзе седлавым для функцыі Лягранжа $L(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$ задачы В.п., г.зн. для адвольных $x \in X$ і λ з неадмоўнымі кампанентамі праўдзяцца няроўнасці $L(x^*, \lambda) \le L(x^*, \lambda^*) \le$ $\le L(x, \lambda^*)$.

Шэраг метадаў В.п. абапіраецца на тэарэму пра седлавы пункт: у іх або мінімізуецца функцыя $\varphi(\lambda_1, ..., \lambda_m) = \max_{x \in X} L(x, \lambda)$ пры $x_i \ge 0$, $i = \overline{1, m}$, або непасрэдна адшукваецца седлавы пункт, прычым замест функцыі Лягранжа іншым разам выкарыстоўваюцца пэўныя яе мадыфікацыі. Другі падыход да развязання задачы В.п. звязаны з пошукам магчымых кірункаў, якія не выводзяць з мноства дапушчальных пунктаў і разам з тым уздоўж якіх мэтавая функцыя спадае. На кожнай ітэрацыі такога метаду вылічаецца магчымы кірунак, які выходзіць з чарговага пункта, пасля чаго выконваецца пераход у гэтым кірунку да наступнага пункта. Існуюць метады развязання задач В.п., спецыяльна дастасаваных да таго выпадку, калі мэтавая функцыя нелінейная, а абмежаванні лінейныя. Як правіла, метады В.п. патрабуюць дакладнага вызначэння аптымальнага пункта бясконцай колькасці ітэрацый. Вынятак складаюць задачы *квадратовага праграмавання* (мэтавая функцыя — сума выпуклай квадратовай і лінейнай функцыі, абмежаванні — лінейныя) і *лінейнага праграмавання*

(мэтавая функцыя і абмежаванні — лінейныя), для якіх у асноўным выкарыстоўваюцца конечныя метады. Многія вылічальныя метады В.п. рэалізаваныя ў выглядзе праграм для камп'ютараў.

ВЫ́ПУКЛАЕ ЦЕ́ЛА — замкнёнае выпуклае мноства ў тапалагічнай вектарнай прасторы (часцей за ўсё ў эўклідавай) з непустым нутром. Прасцейшыя В.ц. — *выпуклыя мнагаграннікі.* Метады і вынікі тэорыі В.ц. выкарыстоўваюцца ў розных раздзелах матэматыкі: у геаметрыі, тэорыі лікаў, алгебры, матэматычным аналізе.

ВЫ́ПУКЛАЯ АБАЛО́НКА мноства M у прасторы X — перасячэнне ўсіх выпуклых мностваў з X, якому належыць M, ці найменшае выпуклае мноства ў X, якому належыць M. В.а. мноства M абазначаецца conv$M$. Магчыма таксама і нутраная характарыстыка В.а.: пункт $x \in \text{conv}M$, калі і толькі калі існуюць пункты $x_i \in M$, $i = \overline{1,m}$, і рэчаісныя лікі $\alpha_i \geq 0$ $(i = 1, m)$, $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$ такія, што $x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i, x_i$. Інакш кажучы, conv$M$ супадае з мноствам усіх выпуклых камбінацый розных пунктаў з M. Паводле тэарэмы Каратэадоры, у выпадку, калі вектарная прастора X мае канечную памернасць dim$X = n$, для таго каб атрымаць адвольны пункт з conv$M$, дастаткова разгледзець усе выпуклыя камбінацыі не больш чым з $(n+1)$-га пункта з M. У эўклідавай прасторы В.а. абмежаванага замкнёнага мноства M супадае з В.а. яго краявых пунктаў (такіх пунктаў мноства M, якія не з'яўляюцца нутранымі ні для якога адрэзка, што цалкам належыць M).

ВЫ́ПУКЛАЯ ПАВЕ́РХНЯ — мяжа *выпуклага цела* ў трохмернай эўклідавай прасторы E^3. В.п. падзяляюць на замкнёныя і бясконцыя ў залежнасці ад таго, абмежаванае выпуклае цела, мяжой якога з'яўляецца разгляданая В.п., ці не абмежаванае. Замкнёныя В.п. гамеаморфныя сферам, а бясконцыя — плоскасцям або кругавым цыліндрам. Найбольш грунтоўныя вынікі тэорыі В.п. належаць акад. А.Аляксандраву.

ВЫ́ПУКЛАЯ ФУ́НКЦЫЯ — функцыя f: $X \to \overline{R}$, вызначаная на рэчаіснай вектарнай прасторы X і са значэннямі ў пашыраным мностве рэчаісных лікаў $\overline{R} = R \cup \{+\infty, -\infty\}$, надграфік якой epi f: $= \{(x, \alpha) \in X \times R | f(x) \leq \alpha\}$ ёсць выпуклае мноства ў $X \times R$. Эфектыўным мноствам функцыі $f: X \to \overline{R}$ называецца мноства dom $f := \{x \in X | f(x) < +\infty\}$. Кажуць, што функцыя f: $X \to \overline{R}$ уласная, калі яна не прымае значэння $-\infty$ і не роўная тоесна $+\infty$. Уласная функцыя f: $X \to \overline{R}$ ёсць выпуклая, калі і толькі калі яе эфектыўнае мноства dom f выпуклае і $f(\alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha) f(x_2)$ для адвольных x_1, $x_2 \in \text{dom} f$ і адвольнага рэчаіснага ліку α, $0 \leq \alpha \leq 1$. Калі X — аддзяляльная лакальна выпуклая прастора, тады адвольная ўласная В.ф. f: $X \to \overline{R}$, якая абмежаваная зверху ў наваколлі нейкага пункта X, непарыўная ў гэтым пункце. В.ф мае ў кожным пункце, у якім яна прымае канечнае значэнне, вытворную (канечную ці бясконцую) у адвольным кірунку, пры гэтым сама вытворная як функцыя кірунку ёсць В.ф.

ВЫ́ПУКЛЫ АНА́ЛІЗ — раздзел матэматыкі, які спалучае ў сабе рысы, уласцівыя як геаметрыі, так і аналізу. Галоўныя аб'екты даследаванняў В.а.: *выпуклыя мноствы* і *выпуклыя функцыі.* Галоўныя паняцці ў В.а.: выпуклая абалонка, краявыя і выступныя пункты мностваў, аддзяляльнасць выпуклых мностваў гіперплоскасцямі, апорныя гіперплоскасці і паляры выпуклых мностваў, спалучаныя функцыі і субдыферэнцыял выпуклай функцыі. Асновы В.а. закладзеныя на пачатку 20 ст. Г.Мінкоўскім у працах па геаметрыі выпуклых мностваў канцамернай эўклідавай прасторы. Пазней у функцыянальным аналізе, у прыватнасці ў тэорыі лакальна выпуклых тапалагічных прастораў, большыня паняццяў выпуклай геаметрыі Мінкоўскага была пашыраная на бясконцамерныя прасторы. Другі этап развіцця В.а. звязаны з вывучэннем уласцівасцяў выпуклых функцый, менавіта тады (у 60—70-х гг.) В.а. вылучыўся ў самастойны раздзел матэматыкі. Даследаваліся выпуклыя адлюстраванні са значэннямі ва ўпарадкаваных вектарных прасторах, выпуклыя мнагазначныя адлюстраванні.

ВЫ́ПУКЛЫ МНАГАГРА́ННІК — мноства канцамернай прасторы E^n, атрыманае ў выніку перасячэння канцай колькасці замкнёных паўпрастораў. В.м. мае канечную колькасць граняў (перасячэнняў з апорнымі гіперплоскасцямі). Грані граняў з'яўляюцца гранямі пачатковага В.м. Аднамерныя грані называюцца кантамі, нульмерныя — вяршынямі. Абмежаваны В.м. супадае з выпуклай абалонкай яго вяршыняў. З іншага боку, палітоп (выпуклая абалонка канцай колькасці пунктаў з E^n) — абмежаваны В.м., вяршыні якога знаходзяцца сярод пунктаў, што яго ўтварылі. Аналітычна В.м. можна задаць як мноства развязкаў канцай сістэмы лінейных няроўнасцяў, што дазваляе вывучаць В.м. алгеб-

раічнымі сродкамі. Метады мінімізацыі лінейных функцый В.м. — прадмет даследаванняў *лінейнага праграмавання.*

ВЫ́ПУКЛЫ МНОГАВУГО́ЛЬНІК — частка геаметрычнай плоскасці, абмежаваная ламанай лініяй, якая ўтвораная з адрэзкаў простай і мае ўласцівасць: калі адвольны з гэтых адрэзкаў прадоўжыць да простай, то ўся ламаная лінія будзе цалкам належаць да адной з замкнёных паўплоскасцяў, на якія гэтая простая падзяляе плоскасць. Часам В.м. называюць толькі яго мяжу. З больш агульнага пункту гледжання В.м. ёсць *выпуклы мнагаграннік* у двухмернай эўклідавай прасторы.

ВЫТВО́РНАЕ МНО́СТВА — сукупнасць усіх лімітавых пунктаў дадзенага мноства. В.м. атрымліваюцца ў выніку вылучэння з замыкання мноства ўсіх яго ізаляваных пунктаў. Мноства, якое супадае са сваім В.м., называецца дасканалым.

ВЫТВО́РНАЯ — асноўнае паняцце *дыферэнцыяльнага злічэння,* якое характарызуе хуткасць змянення функцыі $y = f(x)$ пры змяненні аргумента x. В. ёсць функцыя $f'(x)$, якая вызначаецца для кожнага x як ліміт

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

калі ён існуе і конца. Функцыя, якая мае вытворную ў пункце, называецца д ы ф е р э н ц а в а л ь н а й у гэтым пункце. Г е а м е т р ы ч н ы с э н с В. у пункце x_0: $f'(x_0)$ ёсць тангенс вугла нахілу да восі Ox датычнай, што праведзена да крывой $y = f(x)$ у пункце $(x_0, f(x_0))$ (гл. рыс. на с. 119). В. абазначаецца

$$y'(x), \frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}, f'_x.$$

Функцыя, якая мае В., н е п а р ы ў н а я. Існуюць непарыўныя функцыі, якія не маюць В. у пункце або на прамежку, у прыватнасці, $y = |x|$ у пункце $x = 0$. Калі існуе В. функцыі $f'(x)$, то яна называецца другой в ы т в о р н а й функцыі $f(x)$ і абазначаецца

$$f''(x), y''(x), \frac{d^2 y}{dx^2}, \frac{d^2 f}{dx^2}, f''_{x^2}.$$

Аналагічна азначаецца В. адвольнага цэлага парадку n $(n > 1)$ як $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$ і абазначаецца таксама

$$y^{(n)}(x), \frac{d^n y}{dx^n}, \frac{d^n f}{dx^n}, f^{(n)}_{x^n}.$$

Для функцый рэчаіснай зменнай сама В. можа быць недыферэнцавальнай і нават разрыўнай. У камплексным абсягу з існавання першай В. вынікае існаванне В. усіх парадкаў. Для функцый многіх зменных вызначаюцца ч а с т к о в ы я в ы т в о р н ы я (вытворныя па адным з аргументаў), якія вылічаны пры ўмове, што астатнія аргументы сталыя. Тэрміны "В." і "другая В." прапанаваў Ж. Лягранж (1797), абазначэнні y', $f'(x)$, $f''(x)$ — ён жа (1770, 1779), а $\frac{dy}{dx}$ — Г. Ляйбніц (1675). Функцыйныя ўласцівасці В., розныя абагульненні паняцця В. вывучаюцца ў тэорыі функцый рэчаіснай зменнай. З абагульненняў паняцця В. найбольш важныя *асімптатычная вытворная,* В. вектар-функцыі, *вытворная адлюстравання, вытворныя лікі.*

ВЫТВО́РНАЯ АДЛЮСТРАВА́ННЯ — абагульненне паняцця *вытворнай* лікавай функцыі. Няхай f: $X \to Y$ — адлюстраванне (увогуле нелінейнае) тапалагічных вектарных прастораў X, Y. В.а. f у пункце $x_0 \in X$ называецца л і н е й н а е а д л ю с т р а в а н н е $f'(x_0): X \to Y$, якое апраксімуе ў пэўным сэнсе рознасць $f(x_0 + h) - f(x_0)$ у дачыненні да прыросту h. Значэнне апраксімоўнага адлюстравання на элеменце h абазначаецца $f'(x_0)$ ці $d_h f(x_0)$ і называецца д ы ф е р э н ц ы я л а м а д л ю с т р а в а н н я f у пункце x_0 для прыросту h. У залежнасці ад таго, што разумеюць у якасці апраксімацыі (лінейным па h выразе) прыросту $f(x_0 + h) - f(x_0)$, прыходзяць да розных паняццяў вытворнай і дыферэнцавальнасці. Калі выбіраецца ў $F(X, Y)$ (дзе $F(X, Y)$ — сукупнасць усіх адлюстраванняў з X у Y) тапалогія пунктавай збежнасці, атрымліваецца дыферэнцаванне паводле Гато, для якога *Гато вытворная* (ці *слабая вытворная*) ёсць

$$\delta(x_0, h) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t}$$

пры ўмове, што ліміт лінейны (калі нелінейны, то $\delta(x_0, h)$ называецца в а р ы я ц ы я й Г а т о). У выпадку ўнармаваных прастораў X, Y і тапалогіі раўнамернай збежнасці ў $F(X, Y)$ атрымліваецца дыферэнцаванне паводле Фрэшэ з *Фрэшэ вытворнай* (*моцная вытворная*), якая азначаецца як адлюстраванне $\Lambda: X \to Y$ такое, што $f(x_0 + h) = f(x_0) + \Lambda h + \varepsilon(h)$ і $\|\varepsilon(h)\| / \|h\| \to 0$ пры $\|h\| \to 0$.

ВЫТВÓРНАЯ ПРАПÓРЦЫЯ — прапорцыя, якая з'яўляецца вынікам дадзенай прапорцыі $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Такія, напрыклад, прапорцыі

$$\frac{b}{d}=\frac{a}{c},\ \frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d},\ \frac{a}{a\pm b}=\frac{c}{c\pm d},$$

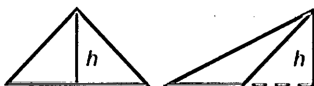
$$\frac{a}{a\pm c}=\frac{b}{b\pm a},\ \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}\ \text{і г.д.}$$

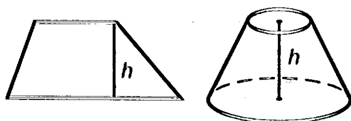
ВЫТВÓРНЫЯ ЛІ́КІ — абагульненне паняцця *вытворнай*. Верхнім правым В.л. Λ_d у пункце x_0 называюць верхні ліміт тасунку $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ пры $x \to x_0$, дзе $x > x_0$. Аналагічна азначаюцца ніжні правы λ_d, верхні левы Λ_g і ніжні левы λ_g В.л. Калі $\Lambda_d = \lambda_d$ ($\Lambda_g = \lambda_g$), то $f(x)$ мае ў пункце x_0 аднабаковую правую (левую) вытворную. Звычайная вытворная існуе, калі ўсе чатыры В.л. концыя і супадаюць. Калі ўсе чатыры вытворныя лікі концыя на нейкім мностве, то функцыя мае вытворную ўсюды на гэтым мностве, акрамя пунктаў мноства меры нуль.

ВЫХÓДНЫ АЛФАВІ́Т — мноства выходных сігналаў абстрактнага аўтамата. Гл. *Аўтамат, Абстрактная машына.*

ВЫЧЭ́РПВАННЯ МÉТАД — метад доказу, які дастасоўваўся ў старажытныя часы пры вызначэнні плошчаў і аб'ёмаў.

ВЫШЫНЯ́ — адрэзак перпендыкуляра (h) з вяршыні геаметрычнай фігуры — трохвугольніка, конуса (гл. рыс.) і інш. — на яе аснову ці працяг





асновы, а таксама даўжыня гэтага адрэзка. В. цыліндра, шаравога пласта, таксама ссечаных паралельна аснове целаў — адлегласць паміж верхняй і ніжняй асновамі.

ВЫШЭ́ЙШАЯ МАТЭМА́ТЫКА — сукупнасць матэматычных дысцыплін, якія ўваходзяць у навучальны план тэхнічных і некаторых іншых навучальных устаноў. Звычайна агульны курс В.м. складаецца з элементаў аналітычнай геаметрыі, лінейнай алгебры, матэматычнага аналізу, дыферэнцыяльных раўнанняў, асноў вылічальнай матэматыкі, тэорыі імавернасцяў і матэматычнай статыстыкі.

ВЫЯ́ВА АРЫГІНА́ЛА — функцыя $F(p)$, якая ставіцца ў адпаведнасць функцыі-арыгіналу $f(t)$ з дапамогай пераўтварэння Лапласа

$$F(p)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt.$$

Гл. *Аперацыйнае злічэнне.*

ВЫЯЎЛЕ́ННЕ ГРУ́ПЫ G, рэпрэзентацыя групы G — гомамарфізм групы G у групу $GL(V)$ лінейных пераўтварэнняў вектарнай прасторы V. Вывучэнне мноства ўсіх В.г. G дае, як правіла, значную інфармацыю пра групу G. Гэта абумоўлена тым, што структура групы $GL(V)$ вывучана даволі дакладна, асабліва ў выпадку, калі памернасць прасторы V концая. Найбольш распрацаваныя тэорыі выяўленняў концых групаў, групаў Лі (разглядаюцца дыферэнцавальныя гомамарфізмы). Інтэнсіўна развіваюцца тэорыі выяўленняў алгебраічных групаў, некаторых тыпаў концых групаў (Шэвале, сіметрычных, алгебраў Лі і асацыятыўных алгебраў).

ВЫЯЎЛЕ́ННЯЎ ТЭÓРЫЯ, рэпрэзентацый тэорыя — галіна алгебры, якая вывучае выяўленні (рэпрэзентацыі) алгебраічных сістэм. Найбольш распрацаваная В.т. у выпадку групаў, алгебраў Лі і асацыятыўных алгебраў. Гл. таксама *Выяўленне групы.*

ВЯЛІ́КІ КРУГ — круг, які атрымліваецца пры перасячэнні шара плоскасцю, што праходзіць праз яго цэнтр. Акружыну гэтага круга часта таксама называюць В.к.

ВЯЛІ́КІХ ЛІ́КАЎ ЗАКÓН, агульны прынцып, паводле якога супольнае ўздзеянне выпадковых фактараў прыводзіць пры нейкіх вельмі агульных умовах да выніку, што амаль не залежыць ад выпадку. Набліжанне частасці з'яўлення выпадковай падзеі да яе імавернасці пры нарастанні колькасці выпрабаванняў можа служыць першым прыкладам уздзеяння гэтага прынцыпу.

На мяжы 17 і 18 стст. Я.Бэрнулі даказаў тэарэму, якая сцвярджае, што ў паслядоўнасці незалежных выпрабаванняў, у кожным з якіх імавер-

насць з'яўлення некаторай падзеі A мае адно і тое ж значэнне p, $0 < p < 1$, мае месца

$$p\left\{\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| > \xi\right\} \to 0$$

для адвольнага $\varepsilon > 0$ і $n \to \infty$, дзе μ_n — колькасць з'яўленняў падзеі ў першых n выпрабаваннях, $\frac{\mu_n}{n}$ — частасць з'яўленняў. *Бэрнулі тэарэма* была пашыраная С.Пуасонам на выпадак паслядоўнасці незалежных выпрабаванняў, дзе імавернасць з'яўлення падзеі A можа залежаць ад нумара выпрабавання. Далейшае развіццё розных варыянтаў В.л.з. звязанае з імёнамі П.Чабышова, А.Маркава, А.Хінчына, А.Калмагорава, С.Бернштэйна і інш.

На практыцы найбольш часта выкарыстоўваюцца тэарэмы Маркава і Бернштэйна. Тэарэма Маркава: няхай $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ — паслядоўнасць выпадковых велічыняў з канцымі дысперсіямі. Калі

$$\frac{D(\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n)}{n^2} \to 0$$

пры $n \to \infty$, то для паслядоўнасці $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n ...$ мае месца В.л.з. у форме

$$[\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n - M(\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n)]/n \xrightarrow{p} 0$$

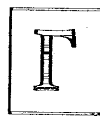
пры $n \to \infty$. Тэарэма Бернштэйна: калі

$$D\xi_j < L, R(\xi_i, \xi_j) \leq \varphi(i - j),$$

дзе L — нейкая канстанта, R — каэфіцыент карэляцыі, $\varphi(n)$ — функцыя, якая імкнецца да 0 пры $n \to \infty$, то да паслядоўнасці $\{\xi_k\}$ дастасаваны В.л.з.

ВЯЛІ́КІХ ЛІ́КАЎ УЗМО́ЦНЕНЫ ЗАКО́Н — адна з формаў *вялікіх лікаў закону* (у яго агульным разуменні), якая сцвярджае, што пры вызначаных умовах з імавернасцю 1 адбываецца неабмежаванае набліжэнне сярэдніх арыфметычных паслядоўнасці выпадковых велічыняў да некаторых сталых велічыняў. Больш дакладна, няхай $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ — паслядоўнасць выпадковых велічыняў $S_n = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n$. Кажуць, што паслядоўнасць праўдзіць В.л.у.з., калі існуе такая паслядоўнасць канстантаў A_n, што імавернасць судачыненняў $\frac{S_n}{n} - A_n \to 0$ (пры $n \to \infty$) роўная 1.

На практыцы звычайна карыстаюцца тэарэмамі А.Калмагорава. Т э а р э м а 1: калі $\{\xi_k\}$ — паслядоўнасць незалежных выпадковых велічыняў і $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{D\xi_k}{k^2} < \infty$, то для паслядоўнасці $\{\xi_k\}$ выконваецца В.л.у.з. з $A_n = M\left(\frac{S_n}{n}\right)$. Т э а р э м а 2: для незалежных аднолькава размеркаваных выпадковых велічыняў неабходная і дастатковая ўмова дастасавання В.л.у.з. — канцасць матэматычнага спадзявання, пры гэтым $A_n = M\xi_1$.



ГА́ЙНЭ—БАРЭ́ЛЯ ЛЕ́МА — лема пра накрыццё адрэзка. Калі замкнёны прамежак $[a, b]$ накрываецца бясконцай сістэмай адкрытых прамежкаў, то з яе заўсёды можна вылучыць канцую падсістэму, якая таксама накрывае ўвесь прамежак $[a, b]$. А б а г у л ь н е н н е Г.—Б.л. на шматмерны выпадак: калі абмежаванае замкнёнае мноства пунктаў плоскасці накрываецца бясконцай сістэмай адкрытых абсягаў, то з яе заўсёды можна вылучыць канцую падсістэму, якая таксама накрывае ўсё мноства M. На Г.—Б.л. заснаваныя азначэнні абстрактных паняццяў — *бікампактнасці* (*кампактнасці*) і *бікампактных прастораў* (*кампактных прастораў*). Г.—Б.л. даказалі Г.Гайнэ (1870-я) і Э.Барэль (1898).

ГАЛАМО́РФНАЯ ФУ́НКЦЫЯ — тое, што *аналітычная функцыя*.

ГАЛЁРКІНА МЕ́ТАД, м е т а д м о м а н т а ў — метад вызначэння набліжанага развязку аператарнага раўнання $F(x) = 0$ у выглядзе лінейнай камбінацыі $x_n = \sum_{i=0}^{n} c_i\varphi_i(x)$ лінейна незалежных каардынатных функцый $\varphi_i(x)$ з банахавай прасторы X, якая ўлучае абсяг вызначэння $F(x)$.

ГАЛІ́НА АНАЛІТЫ́ЧНАЙ ФУ́НКЦЫІ — адназначная ў нейкім абсягу $D \subset \mathbf{C}$ аналітычная функцыя $f: D \to \mathbf{C}$, якую можна атрымаць у выніку аналітычнага працягу некаторага элемента дадзенай поўнай аналітычнай функцыі. Напрыклад, у абсягу $D = \{z = re^{i\varphi}|_{0<r<\infty}, |\varphi| < n\}$ інтэграл $\ln z = \int_{i}^{z} \frac{dt}{t}$ ёсць Г.а.ф. поўнай аналітычнай функцыі $\mathrm{Ln}\, z$.

ГАЛІНАВА́ЛЬНЫ ПРАЦЭ́С — імавернасны працэс, які апісвае многія з'явы, звязаныя з размнажэннем і пераўтварэннем нейкіх аб'ектаў (напрыклад, часцінак у фізіцы, малекул у хіміі, асоб якой-небудзь папуляцыі ў біялогіі і г.д.). Асноўнае матэматычнае дапушчэнне, якое выдзяляе клас Г.п., — гэта дапушчэнне незалежнасці размнажэння часцінак адной ад адной. Найбольш вывучальныя Г.п.: аднародныя ў часе, з дыфузіяй, з залежнасцю ад узросту, з іміграцыяй, з концай колькасцю тыпаў часцінак, з выпадковым асяроддзем.

ГАЛІНАВА́ННЯ ПУНКТ — ізаляваны пункт $a \in \hat{\mathbf{C}}$ поўнай аналітычнай функцыі, які адпавядае наступным умовам. Існуе элемент дадзенай функцыі, які дапускае аналітычны працяг у некаторым працятым наваколлі $U(a)$ пункта a уздоўж кожнага шляху, але ў выніку гэтага працягу не можа атрымацца аналітычная ў $U(a)$ функцыя. Г.п. называецца алгебраічным або лагарыфмічным у залежнасці ад таго, якой будзе атрыманая мнагазначная функцыя: канцазначнай ці бясконцазначнай. Напрыклад, пункт $z = 0$ — алгебраічны Г.п. функцыі $\sqrt{z}$; пункт $z = 0$ — лагарыфмічны Г.п. функцыі $\operatorname{Ln} z$.

ГАЛІ́НАЎ І МЕ́ЖАЎ МЕ́ТАД — метад падзелу мноства развязкаў задач *праграмавання дыскрэтнага* на тыя або іншыя падмноствы, ацэньвання значэнняў мэтавай функцыі на кожным з гэтых падмностваў і выкідвання падмностваў, якія заведама не ўлучаюць аптымальных развязкаў.

ГАЛО́ЎНАЕ ЗНАЧЭ́ННЕ — 1) Г.з. мнагазначнай функцыі — пэўная яе галіна, праз якую можна выразіць іншыя галіны. Напрыклад, функцыі arcsin, arccos, arctg, arcctg — Г.з. адпаведных мнагазначных адваротных трыганаметрычных функцый, прычым для $\forall n \in Z$: $\operatorname{Arcsin} x = (-1)^n \arcsin x + n\pi$, $\operatorname{Arccos} x = \pm \arccos x + 2n\pi$, $\operatorname{Arctg} x = \operatorname{arctg} x + n\pi$, $\operatorname{Arcctg} x = \operatorname{arcctg} x + n\pi$. Далей пры $z \in \mathbf{C} \setminus 0$ вызначана мнагазначная функцыя $\operatorname{Arg} z$. Яе Г.з. абазначаецца праз $\arg z$ і вызначаецца з дапамогай няроўнасцяў $0 \le \arg z \le 2\pi$ (а часам таксама няроўнасцяў $-\pi < \arg z < \pi$), прычым $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi n$, дзе $n \in Z$. Г.з. $\ln z$ лагарыфмічнай функцыі $\operatorname{Ln} z$ можна задаць з дапамогай роўнасці $\ln z = \ln|z| + i \arg z$, тады $\operatorname{Ln} z = \ln z + 2n\pi i$, дзе $n \in Z$; 2) Г.з. неўласцівага інтэграла — пэўнае значэнне разбежнага неўласцівага інтэграла. У прыватнасці, калі інтэграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ разбягаецца, але існуе $\lim_{n\to\infty} \int_{-N}^{N} f(x)dx = A$, то A называецца Г.з. неўласцівага інтэграла і абазначаецца v.p. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$. Так, v.p. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{1+x^2} = 0$. Аналагічна ўводзіцца Г.з. неўласцівага інтэграла ад неабмежаванай функцыі.

ГАЛО́ЎНАЯ ДЫЯГАНА́ЛЬ квадратнай матрыцы — дыяганаль матрыцы $\| a_{ij} \|$ ($i = 1, ..., n; j = 1, ..., n$), на якой знаходзяцца элементы a_{ii}. Гл. *Матрыца*.

ГАЛО́ЎНАЯ КРЫВІНЯ́ паверхні — *нармальная крывіня* паверхні ў галоўным кірунку, г.зн. кірунку, для якога яна дасягае экстрэмальнага значэння. У кожным пункце паверхні існуюць або два значэнні Г.к. — k_1 і k_2, або ўсе нармальныя крывіні роўныя паміж сабой. Г.к. k_1 і k_2 — гэта развязкі квадратовага раўнання

$$\begin{vmatrix} L-kE & M-kF \\ M-kF & N-kG \end{vmatrix} = 0,$$

дзе E, F, G — каэфіцыенты першай квадратовай формы, L, M, N — другой квадратовай формы паверхні. Нармальная крывіня ў кірунку, які стварае вугал φ з галоўным кірункам для крывіні k_1, вылічаецца па формуле Ойлера $k = k_1 \cos^2\varphi + k_2 \sin^2\varphi$.

ГАЛО́ЎНАЯ НАРМА́ЛЬ — простая, перпендыкулярная да прасторавай крывой і размешчаная ў яе судатычнай плоскасці. Калі $r = r(s)$ — натуральная параметрызацыя крывой (даўжынёй дугі), то кірунак Г.н. у пункце s вызначаецца вектарам $\boldsymbol{r}''(s)$. Г.н. — другая каардынатная вось да суправаджальнага трохгранніка крывой. Для адвольнай параметрызацыі крывой $r = r(t)$ кірунак Г.н. задаецца вектарам $[[\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}''], \boldsymbol{r}'']$.

ГАЛО́ЎНЫ ІДЭА́Л — *ідэал* (колца, алгебры, паўгрупы або структуры), спароджаны адным элементам a, найменшы ідэал, які мае ў сабе элемент a. Левы Г.і. $L(a)$ асацыятыўнага колца K супадае з мноствам усіх элементаў выгляду $ta + na$, правы Г.і. $R(a)$ — з мноствам усіх элементаў $at + na$, двухбаковы Г.і. $I(a)$ — з мноствам усіх элементаў $na + ta + as + \sum_i k_i a l_i$, дзе $t, s, k_i, l_i \in K$, $n \in Z$.

У выпадку, калі K — колца з адзінкай (у прыватнасці, алгебра над полем), складнік na можна апусціць. У прыватнасці, для алгебры A над полем маем $La = aA$, $R(a) = Aa$, $I(a) = Aa$.

ГАЛО́ЎНЫ МІНО́Р — *вызначнік*, створаны элементамі матрыцы з такімі ж нумарамі слупкоў, як і радкоў. Гл. таксама *Мінор.*

ГАЛО́ЎНЫХ ІДЭА́ЛАЎ КО́ЛЦА — асацыятыўнае колца R з адзінкай, у якім усе левыя і правыя ідэалы галоўныя, г.зн. маюць выгляд Ra і aR адпаведна, дзе $a \in R$. Прыклады Г.і.к.: колца цэлых лікаў, колца паліномаў $K[x]$ над полем K. Г.і.к. без дзельнікаў нуля называецца абсягам галоўных ідэалаў.

ГАЛО́ЎНЫЯ ГАЛІ́НЫ — галіны адваротных трыганаметрычных функцый рэчаіснай зменнай, якія абазначаюцца arcsin x, arccos x, arctg x, arcctg x і вызначаюцца як адваротныя да функцый sin x, cos x, tg x, ctg x, зададзеных адпаведна на прамежках $[-\pi/2, \pi/2]$, $[0; \pi]$, $(-\pi/2; \pi/2)$, $(0, \pi)$.

ГАЛУА́ ГРУ́ПА — група аўтамарфізмаў поля L, якія пакідаюць элементы з K нерухомымі. Г.г. абазначаецца Gal (L/K) ці $G(L/K)$. Поле інварыянтаў L Г.г. $G(L/K)$ супадае з K. Г.г. палінома t над полем K — $G(L/K)$, дзе L — поле раскладу f над K. Г.г. называецца таксама групай аўтамарфізмаў Галуа пашырэння L/K. Гэтыя групы маюць значэнне ў *Галуа тэорыі* алгебраічных раўнанняў. Вылічэнне Г.г. для пашырэнняў палёў алгебраічных лікаў — асноўная задача алгебраічнай тэорыі лікаў.

ГАЛУА́ ПАШЫРЭ́ННЕ поля — нармальнае і сепарабельнае пашырэнне поля K. Кожнае сепарабельнае пашырэнне L поля K знаходзіцца ў некаторым найменшым сепарабельным і адначасова нармальным пашырэнні поля K; апошняе называецца замыканнем Галуа L над K. Група $G(L/K)$ усіх аўтамарфізмаў пашырэння K, якія пакідаюць нерухомымі элементы з K, называецца групай Галуа (гл. *Галуа група*) гэтага пашырэння. Яе парадак роўны ступені пашырэння L над K.

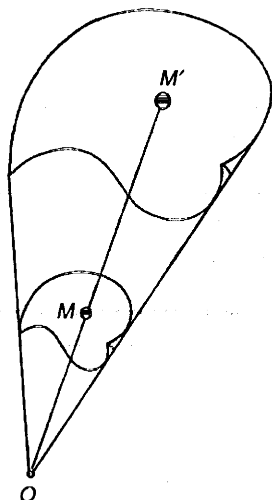
ГАЛУА́ ПО́ЛЕ, канцае поле — поле, у якім канцая колькасць элементаў. Гэтая колькасць ёсць абавязкова ступень p^n нейкага простага ліку p, які з'яўляецца характарыстыкай поля. Для адвольных натуральнага n і простага p існуе адно (з дакладнасцю да ізамарфізму) поле з p^n элементаў. Яно пазначаецца F_{p^n} ці $GF(p^n)$, прычым $F_{p^n} \subset F_{p^m}$, калі і толькі калі n дзеліцца на m.

ГАЛУА́ ТЭО́РЫЯ — створаная Э.Галуа тэорыя, якая вывучае тыя або іншыя матэматычныя аб'екты праз іх групы аўтамарфізмаў. Напрыклад, існуюць Г.т. палёў, колцаў, тапалагічных прастораў і г.д. У больш вузкім сэнсе пад Г.т. разумеюць тэорыю *Галуа палёў*. Аб'ект яе вывучэння — алгебраічныя пашырэнні, іх замыканні Галуа (гл. *Галуа пашырэнні*), групы Галуа і г.д. Калі K/k — пашырэнне Галуа з групай $G(K/k)$, то кожнай падгрупе $H \subset G(K/k)$ адпавядае падполе поля K, створанае ўсімі элементамі, нерухомымі ў дачыненні да аўтамарфізмаў з H. Наадварот, кожнаму падполю $L \subset K$ (якое змяшчае k) адпавядае падгрупа $H \subset G(K/k)$, створаная ўсімі аўтамарфізмамі, што пакідаюць нерухомымі элементы поля L: пры гэтым K — пашырэнне Галуа поля P і $G(K/p) = H$. Асноўная тэарэма Г.т. сцвярджае, што гэтыя адпаведнасці ўзаемна адваротныя і таму з'яўляюцца біекцыямі паміж усімі падгрупамі групы $G(K/k)$ і ўсімі падпалямі поля K, якія змяшчаюць K. Г.т. дазваляе выявіць магчымасць развязання алгебраічных раўнанняў $x^m = a$, г.зн. выявіць магчымасць развязання дадзенага алгебраічнага раўнання ў радыкалах. У прыватнасці, дадзенае алгебраічнае раўнанне развязваецца ў квадратовых радыкалах, калі і толькі калі яго карані могуць быць пабудаваны з дапамогай цыркуля і лінейкі.

ГАМАЛО́ГІЯ (ад грэц. homologos — адпаведны, падобны) — узаемна адназначнае праектыўнае пераўтварэнне праектыўнай плоскасці ў сябе, якая пераводзіць усе пункты некаторай простай (восі) у сябе і мае дакладна адзін нерухомы пункт (цэнтр). Можа быць гаматэцыяй, расцяжэннем, паралельным пераносам ці зрухам. Кожнае праектыўнае пераўтварэнне ёсць вынік паслядоўнага здзяйснення Г. і руху.

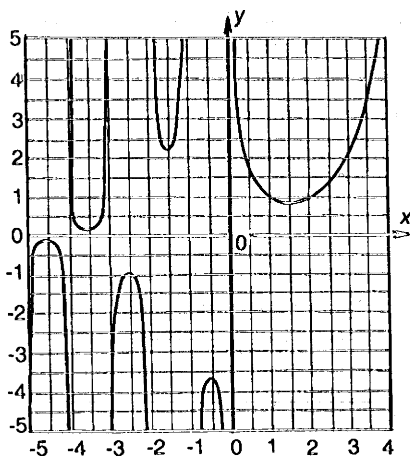
ГАМАТО́ПІЯ (ад грэц. homos — роўны, аднолькавы + topos — месца) — фармалізацыя інтуіцыйнага ўяўлення пра дэфармавальнасць аднаго адлюстравання ў іншае. Дакладней, адлюстраванні f і g прасторы X у прастору Y называюцца гаматопнымі (абазначаюцца $f \sim g$), калі існуе такая сям'я непарыўных адлюстраванняў $f_t: X \to Y$, непарыўна залежных ад параметра $t \in [0, 1]$, што $f_0 = f$, $f_1 = g$. Гэтая сям'я, якая звязвае f з g, называецца Г.

ГАМАТЭ́ЦЫЯ (ад грэц. homos — роўны, аднолькавы + thetos — устаноўлены, размешчаны) — пераўтварэнне эўклідавай прасторы, якое ставіць у адпаведнасць (гл. рыс.) кожнаму пункту M пункт M', што ляжыць на простай OM, паводле правіла $OM' = kOM$, дзе k — сталы лік, адрозны ад нуля (каэфіцыент Г.), O — фіксаваны пункт (цэнтр Г.).



Пры $k<0$ Г. называецца адваротнай, пункты M і M' ляжаць з розных бакоў ад цэнтра O; пры $k>0$ — на адным промні. Пры $k=1$ Г. ёсць тоеснае пераўтварэнне, пры $k=-1$ — сіметрыя ў дачыненні да цэнтра. Пры Г. простая пераходзіць у простую, захоўваецца паралельнасць простых і плоскасцяў. Г. — прыватны выпадак надобнасці.

ГА́МА-ФУ́НКЦЫЯ (Г, γ — літара грэц. алфавіта) — адна з найважнейшых трансцэндэнтных функцый матэматычнага аналізу, якая пашырае



Графік функцый $y=\Gamma(x)$

паняцце фактарыяла $z!=1\cdot2\cdot\ldots\cdot z$ на выпадак камплексных значэнняў z. Г.ф. называецца яшчэ Г-функцыяй Ойлера. Упершыню ўведзена Л.Ойлерам (1729). Вызначаецца формулай

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot2\cdot\ldots\cdot n}{z(z+1)\ldots(z+n)}n^z.$$

Калі рэчаісная частка ліку z дадатная, то можна таксама карыстацца формулай

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty x^{z-1}e^{-x}dx$$

(Ойлераў інтэграл 2-га роду). Калі n — цэлы дадатны лік, то $\Gamma(n)=(n-1)!$ Інтэграл

$$P(\omega,z)=\int_0^\infty x^{z-1}e^{-x}dx$$

называецца няпоўнай Г.-ф. Асноўныя суадносіны для Г.-ф.:

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$$

(функцыйнае раўнанне);

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

(формула дапаўнення), адкуль

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi};$$

$$\ln\Gamma(z)=z\ln z-z-\frac{1}{2}\ln z+\frac{1}{2}\ln 2\pi+\varepsilon(z)$$

пры $\varepsilon(z)\to0$, $z\to\infty$, $|\arg z|\le\pi-\delta$ (формула Стэрлінга). У рэчаісным абсягу $\Gamma(x)>0$ для $x>0$ і прымае знак $(-1)^{k+1}$ на ўчастках $-k-1<x<-k$, $k=0,1,2,\ldots$ (гл. рыс.). Праз Г.-ф. выражаецца вялікая колькасць вызначаных інтэгралаў, бясконцых здабыткаў і сумаў шэрагаў. Яны выкарыстоўваюцца ў тэорыі *спецыяльных функцый*, у аналітычнай тэорыі лікаў. Назоў Г.-ф. і знак $\Gamma(z)$ прапанаваў А.Лежандр (1814).

ГА́МІЛЬТАНА АПЕРА́ТАР, набла-аператар, гамільтаніян — сімвалічны дыферэнцыяльны аператар выгляду

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k},$$

дзе $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ — каардынатныя орты. Пры дапамозе Г.а. зручна запісваюцца тры аперацыі вектарнага аналізу: знаходжанне *градыента* скалярнага поля, *дывергенцыі* і *ротара* вектарнага поля. Дзеянні з Г.а. ажыццяўляюцца паводле звычайных правілаў дзеянняў вектарнай алгебры, а затым множанне $\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}$ на скалярную функцыю замяняецца вытворнымі гэтай функцыі адпаведна па x, y, z.

Калі знайсці здабытак Г.а. на скаляр u, то атрымліваецца г р а д ы е н т функцыі u:

$$\mathrm{grad}u = \nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

Скалярны здабытак Г.а. і вектар-функцыі

$$\boldsymbol{a}(x, y, z) = P(x, y, z)\boldsymbol{i} + Q(x, y, z)\boldsymbol{j} + R(x, y, z)\boldsymbol{k}$$

ёсць д ы в е р г е н ц ы я вектара $\boldsymbol{a}$:

$$\mathrm{div}\boldsymbol{a} = (\nabla, \boldsymbol{a}) = \nabla\boldsymbol{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Вектарны здабытак Г.а. на вектар $\boldsymbol{a}$ — р о т а р вектара $\boldsymbol{a}$:

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a} = [\nabla, \boldsymbol{a}] = \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{pmatrix}.$$

Скалярны здабытак Г.а. самога на сябе дае а п е р а т а р Л я п л я с а:

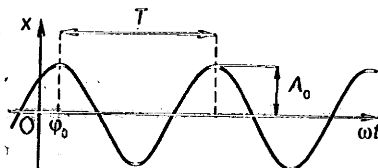
$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Аператар і яго абазначэнне ∇ увёў У.Гамільтан (1853). Тэрмін Г.а. і найменне “набла” для сімвала ∇ даў О.Хэвісайд (1892).

ГА́МІЛЬТАНА ФУ́НКЦЫЯ, г а м і л ь т а н і я н — функцыя, якая выкарыстоўваецца ў класічным варыяцыйным злічэнні для таго, каб падаць раўнанне Ойлера ў кананічным выглядзе праз абагульненыя каардынаты і абагульненыя імпульсы. Раўнанні Гамільтана—Якобі для функцыі дзеяння запісваюцца праз Г.ф. Функцыю ўвёў У.Гамільтан (1835) для апісання рухаў механічных сістэм.

ГАМІЛЬТАНІЯ́Н — 1) тое, што *Гамільтана аператар*; 2) тое, што *Гамільтана функцыя*; 3) Г. у к в а н т а в а й м е х а н і ц ы — аператар энергіі.

ГАРМАНІ́ЧНАЕ ВАГА́ННЕ — перыядычнае змяненне ў часе фізічнай велічыні, якое адбываецца паводле закону сінуса ці косінуса. Аналітычна Г.в. падаецца ў выглядзе $x = x(t) = A_0\cos(\omega t - \varphi_0)$, дзе A_0 — яе максімальная велічыня (а м п л і т у д а), ω — к р у г а в а я ч а с т а с ц ь, г.зн. колькаць ваганняў за 2π адзінак часу, $\omega t - \varphi_0$ — ф а з а Г.в., канстанта φ_0 — п а ч а т к о в а я ф а з а. Працяг аднаго поўнага вагання называецца яго п е р ы я д а м $T = 2\pi/\omega$, адваротная велічыня, што адпавядае колькасці поўных ваганняў за адзінку часу,



называецца ч а с т а с ц ю $\nu = 1/T = \omega/2\pi$. Графік Г.в. — с і н у с о і д а (гл. рыс.). Велічыні, якія змяняюцца неперыядычна або амаль неперыядычна, могуць быць з пэўнай ступенню дакладнасці пададзеныя ў выглядзе сумы розных Г.в., што з'яўляецца задачай *гарманічнага аналізу.*

ГАРМАНІ́ЧНАЕ СЯРЭ́ДНЯЕ n д а д а т н ы х в е л і ч ы н я ў a_k, $k = 1, ..., n$, — велічыня, роўная $n\Big/\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)$. Г.с. двух дадатных лікаў a і b ($a \le b$) звязаныя з сярэдняй геаметрычнай і сярэдняй арыфметычнай іх велічынямі адпаведна няроўнасцямі

$$a \le \frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le b,$$

дзе роўнасць дасягаецца толькі пры $a = b$.

ГАРМАНІ́ЧНАЯ ПРАПО́РЦЫЯ — прапорцыя, якая мае выгляд

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}.$$

Расклад ліку a на два складнікі a і $a-b$, якія ўтвараюць Г.п., называецца г а р м а н і ч н ы м р а с к л а д а м або з а л а т ы м с е ч ы в а м.

ГАРМАНІ́ЧНАЯ ФУ́НКЦЫЯ — рэчаісная функцыя $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ n рэчаісных зменных, вызначаная ў нейкім абсягу D, непарыўная ў D разам з частковымі вытворнымі 1-га і 2-га парадкаў і якая праўдзіць у D раўнанне Ляпляса

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}.$$

Уласцівасці Г.ф. фармулююцца для функцыі трох зменных, але з пэўнымі ўдакладненнямі яны застаюцца і ў выпадку $n \ge 2$ зменных.

Асноўныя ўласцівасці Г.ф.: 1) калі замкнёная гладкая паверхня S разам са сваім нутраным абсягам размешчаная ў D, то

$$\int \frac{\partial u(y)}{\partial n} dS(y) = 0,$$

дзе $\frac{\partial}{\partial n}$ — вытворная па нармалі; 2) тэарэма пра сярэдняе значэнне: калі шар $B(x_0, R)$ радыуса R з цэнтрам у пункце $x_0 \in D$ размешчаны разам са сваёй сферай $S(x_0, R)$ у D, то сярэдняе арыфметычнае значэнне Г.ф. па аб'ёме шара роўнае значэнню Г.ф. у цэнтры шара, г.зн.

$$u(x_0) = \frac{3}{4\pi R^3} \int\limits_{B(x,R)} u(y)dB(y).$$

Сярэдняе па плошчы сферы $S(x_0, R)$ таксама роўнае значэнню Г.ф. у цэнтры; 3) прынцып экстрэмуму: ні ў якім пункце $x_0 \in D$ концага абсягу D Г.ф. не можа дасягаць лакальнага экстрэмуму, такім чынам, калі Г.ф. $u(x)$ непарыўная ў D і на яго мяжы, то найбольшае і найменшае значэнні дасягаюцца толькі ў пунктах мяжы S; 4) калі вядома, што Г.ф. $u(x)$ абмежаваная зверху або знізу на ўсёй прасторы, то $u(x)$ — канстанта; 5) Г.ф. $u(x)$ ёсць аналітычная функцыя зменных x_1, x_2, x_3 у наваколлі адвольнага пункта $x_0 \in D$. У прыватнасці, Г.ф. мае частковыя вытворныя ўсіх парадкаў, якія самі будуць Г.ф. Г.ф. выкарыстоўваюцца ў фізіцы і тэхніцы ў задачах, дзе разглядаецца стан часткі прасторы, які залежыць ад месцазнаходжання пункта і не залежыць ад часу.

ГАРМАНІЧНЫ АНАЛІЗ — раздзел матэматыкі, які аб'ядноўвае метады тэорыі *Фур'е шэрагаў* і *Фур'е інтэгралаў*. Сутнасць Г.а. у тым, што функцыя падаецца ў выглядзе сумы гарманічных ваганняў, г.зн. перыядычная функцыя раскладаецца ў збежны шэраг Фур'е. Рэалізацыя Г.а. пэўнай функцыі звязаная з вызначэннем яе каэфіцыентаў Фур'е. У залежнасці ад спосабу задання функцыі яна здзяйсняецца або па формулах Ойлера—Фур'е, або набліжана вылічальнымі метадамі па квадратурных формулах, або з дапамогай спецыяльных прылад (гарманічных аналізатараў) і г.д. Неперыядычныя функцыі, пры даволі агульных дадатковых умовах, могуць быць пададзены ў выглядзе інтэграла Фур'е, які апісвае функцыю як суму бясконца малых гарманічных кампанентаў, параметры якіх вызначаюцца *Фур'е пераўтварэннем*. Класічны Г.а. узнік у 18—19 стст. пад уплывам фізічных задач і стаў самастойнай матэматычнай дысцыплінай у канцы 19 — пачатку 20 ст. Метады Г.а. выкарыстоўваюцца ў тэорыях імавернасцяў, дыферэнцыяльных і інтэгральных раўнанняў і інш.

ГАРМАНІЧНЫ ШЭРАГ — разбежны лікавы шэраг

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots,$$

у якога кожны элемент, пачынаючы з другога, ёсць *гарманічнае сярэдняе* суседніх з ім элементаў. Для частковых сумаў Г.ш. мае месца стасунак

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = \gamma,$$

дзе $\gamma = 0{,}577215\dots$ — *Ойлера канстанта.*

ГАРМОНІКА (ад грэц. harmonikos — суразмерны, зладжаны) — найпрасцейшая перыядычная функцыя выгляду

$$y = f(x) = a \sin(\omega x + \varphi_0) = a \cos(\omega x - \varphi_0), \quad (1)$$

дзе a — амплітуда, ω — кругавая частасць, φ_0 — пачатковая фаза. Калі зменная x ёсць час t, велічыня $y = f(x)$ робіць гарманічныя ваганні з перыядам $T = 2\pi / \omega$ і частасцю $\nu = 1 / T = \omega / 2\pi$. Функцыя выгляду (1) называецца асноўнай Г., функцыі $a_2 \sin(2\omega x + \varphi_0)$, $a_3 \sin(3\omega x + \varphi_0)$, ..., $a_k \sin(k\omega x + \varphi_0)$, ... называюцца адпаведна другой, трэцяй і г.д. вышэйшымі Г. у дачыненні да асноўнай. Частасці вышэйшых Г. кратныя ніжэйшай (асноўнай) частасці, якую мае асноўная Г. Перыядычная функцыя можа раскладацца ў шэраг па Г., што з'яўляецца задачай *гарманічнага аналізу.*

ГАТО ВЫТВОРНАЯ, слабая вытворная — вытворная функцыянала або адлюстравання. Г.в. — часта ўжывальнае паняцце (разам з *Фрэшэ вытворнай*) у бясконцамерным аналізе. Г.в. у пункце x_0 адлюстравання f лінейнай тапалагічнай прасторы X у лінейную прастору Y называецца непарыўнае лінейнае адлюстраванне $f'_Г(x_0): X \to Y$, якое задавальняе ўмову

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'_Г(x_0)h + \varepsilon(h),$$

дзе $\frac{\varepsilon(th)}{t} \to 0$ пры $t \to 0$ у тапалогіі прасторы Y. Для Г.в. тэарэма пра дыферэнцаванне складанай функцыі, увогуле кажучы, не праўдзіцца. Калі адлюстраванне f мае ў пункце x_0 Г.в., то яно называецца дыферэнцавальным паводле Гато. Паняцце ўведзенае Р.Гато (1913—14) як абагульненне вытворнай Фрэшэ.

ГАЎСА ЗАКОН — тое, што *нармальнае размеркаванне.*

ГА́ЎСА ІНТЭГРА́Л ІМАВЕ́РНАСЦІ — функцыя размеркавання стандартнай гаўсавай выпадковай велічыні. Гл. *Інтэграл імавернасці.*

ГА́ЎСА ІНТЭРПАЛЯЦЫ́ЙНАЯ ФО́РМУЛА — формула, якая выкарыстоўвае ў якасці вузлоў інтэрпаляцыі бліжэйшыя да пункта інтэрпалявання вузлы. Калі $x = x_0 + th$, тады формула

$$G_{2n+1}(x_0 + th) = f_0 + f^1_{1/2}t + f^2_0 \frac{t(t-1)}{2!} + \ldots$$
$$\ldots + f^{2n}_0 \frac{t(t^2-1)\ldots[t^2-(n-1)^2](t-n)}{2n!},$$

напісаная з выкарыстаннем вузлоў x_0, $x_0 + h$, $x_0 - h$, ..., $x_0 + nh$, $x_0 - nh$, называецца формулай Гаўса для інтэрпаляцыі наперад, а формула

$$G_{2n+1}(x_0 + th) = f_0 + f^1_{-1/2}t + f^2_0 \frac{t(t+1)}{2!} + \ldots$$
$$\ldots + f^{2n}_0 \frac{t(t^2-1)\ldots[t^2-(n-1)^2](t+n)}{2n!},$$

напісаная з выкарыстаннем вузлоў x_0, $x_0 - h$, $x_0 + h$, ..., $x_0 - nh$, $x_0 + nh$, называецца формулай Гаўса для інтэрпаляцыі назад. У гэтых формулах скарыстоўваюцца концыя рознасці, якія вызначаюцца наступным чынам:

$$f^1_{i+1/2} = f_{i+1} - f_i, f^m_i = f^{m-1}_{i+1/2} - f^{m-1}_{i+1/2}.$$

Перавага Г.і.ф. у тым, што выбар вузлоў інтэрпаляцыі забяспечвае найлепшую ацэнку рэшткавага складніка ў параўнанні з іншым выбарам, а ўпарадкаванасць вузлоў па блізкасці іх да пункта інтэрпаляцыі памяншае вылічальную хібнасць інтэрпаляцыі.

ГА́ЎСА КВАДРАТУ́РНАЯ ФО́РМУЛА — формула для вылічэння вызначаных інтэгралаў выгляду

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n c_i f(x_i),$$

дзе вузлы x_i і каэфіцыенты c_i выбіраюцца такім чынам, каб формула была дакладнай для ўсіх алгебраічных мнагаскладаў, ступень якіх не перавышае $2n - 1$. Для таго каб параметры $\{x_k\}^n_{k=1}$ былі вузламі Г.к.ф., неабходна і дастаткова, каб яны былі нулямі мнагаскладу $\omega_n(x)$, які мае ступень n і артаганальны з вагою $p(x)$ да ўсіх мнагаскладаў больш нізкіх ступеняў. Каэфіцыенты c_i — дадатныя лікі, якія вызначаюцца формуламі

$$c_i = \int_a^b p(x) \left[\frac{\omega_n(x)}{\omega'_n(x_i)(x - x_i)} \right]^2 dx.$$

Хібнасць Г.к.ф. імкнецца да нуля, калі n імкнецца да бясконцасці, для ўсякай непарыўнай на адрэзку $[a, b]$ функцыі.

ГА́ЎСА МЕ́ТАД — метад паслядоўнага вылучэння невядомых для знаходжання развязкаў сістэмы лінейных алгебраічных раўнанняў; упершыню апісаны К.Гаўсам (1849). Няхай дадзена сістэма

$$a_{j1} x_1 + \ldots + a_{jn} x_n - a_j = 0, \ j = 1, \ldots, m, \qquad (S^0)$$

дзе a_{ji}, a_i — элементы пэўнага поля. Без абмежавання агульнасці можна лічыць, што $a_{11} \neq 0$. Пры выкарыстанні Г.м. ад другога раўнання сістэмы S^0 адымаюць першае яе раўнанне, памножанае на a_{21}/a_{11}, ад трэцяга — першае, памножанае на a_{23}/a_{11}, і г.д. Няхай S^1 — сістэма атрыманых раўнанняў-рознасцяў. Калі ў сістэме S^1 ёсць ненулявы каэфіцыент (пасля магчымых зменаў парадку раўнанняў і невядомых), з ёю робяць гэтак жа, як і з сістэмай $S^r (r \le m)$ і г.д. Працэс заканчваецца сістэмай $S^r (r \le m)$ з нулявымі каэфіцыентамі пры ўсіх невядомых, калі $r < m$; пры $r = m$ сістэма S^r лічыцца пустой. Сістэма S^0 — супольная, калі і толькі калі сістэма S^r супольная (г.зн. не мае адрозных ад нуля вольных складнікаў), або пустая. Няхай сістэма S^0 супольная і $(x^0_r, \ldots, x^0_n)$ — які-небудзь развязак сістэмы S^{r-1}. Падстаўляючы яго каардынаты замест адпаведных невядомых у якое-небудзь раўнанне сістэмы S^{r-2} з ненулявым каэфіцыентам пры x_{r-1} (напрыклад, у яе першае раўнанне), знаходзяць з яго $x_{r-1} = x^0_{r-1}$ і атрымліваюць яе развязак $(x^0_{r-1}, x^0_r, \ldots, x^0_n)$. Затым аналагічна пераходзяць да сістэмы S^{r-3} і г.д. У выніку атрымліваецца развязак $(x^0_1, \ldots, x^0_{r-1}, x^0_r, \ldots, x^0_n)$ сістэмы S^0.

ГА́ЎСАВА КРЫВІНЯ́, поўная крывіня паверхні ў пункце — здабытак галоўных крывіняў k_1 і k_2 паверхні ў гэтым пункце: $k = k_1 k_2$. Г.к. вылічваецца паводле формулы $k = \dfrac{LN - M^2}{EG - F^2}$, дзе E, F, G — каэфіцыенты першай квадратовай формы паверхні, L, M, N — другой квадратовай формы. Вядомая тэарэма Гаўса сцвярджае, што Г.к. залежыць толькі ад каэфіцыентаў першай квадратовай формы і іх вытворных. Адсюль вынікае, што Г.к. застаецца нязменнай пры ізаметрычных адлюстраваннях паверхні. Знак Г.к.

вызначае тып пункта на паверхні і размяшчэнне паверхні ў дачыненні да датычнай плоскасці. Напрыклад, калі Г.к. у дадзеным пункце дадатная (адмоўная), то з дакладнасцю да малых другога парадку паверхня ў наваколлі пункта супадае з эліптычным (гіпербалічным) парабалоідам.

ГА́ЎСАЎ ЛІК — камплексны лік $a + bi$, дзе a і b — цэлыя рацыянальныя лікі. Усе Г.л. утвараюць колца. У гэтым колцы дзельнікамі адзінкі будуць $1, -1, i, -i$; простымі (нераскладальнымі ў здабытак) лікамі з'яўляюцца лікі выгляду $\alpha = a + bi$, у якіх модулі $N(\alpha) = a^2 + b^2$ — простыя лікі выгляду $4n + 1$. Кожны Г.л. адназначна раскладаецца ў здабытак простых Г.л. Колцы, якім уласцівая такая якасць, ёсць гаўсавы (фактарыяльныя) колцы.

ГА́ЎСАЎ ПРАЦЭ́С — рэчаісны выпадковы працэс $X = X(t)$, $t \in T$, для якога адвольныя канцамерныя размеркаванні — гаўсавы, г.зн. характарыстычныя функцыі велічыняў $X(t_1), ..., X(t_n)$ пры адвольных $t_1, t_2, ..., t_n \in T$ маюць выгляд

$$\varphi_{t_1,...,t_n}(u_1,...,u_n) = \exp\left\{ i\sum_{k=1}^{n} A(t_k)u_k - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} B(t_k,t_j)u_k u_j \right\},$$

дзе $A(t) = MX_1(t)$ — матэматычнае спадзяванне і $B(t, S) = M(X(t) - A(t))(X(S) - A(S))$ — карэляцыйная функцыя. Матэматычнае спадзяванне $A(t)$ і карэляцыйная функцыя $B(t, S)$, $S, t \in T$, цалкам задаюць размеркаванне імавернасцяў Г.п. $X = X(t)$. Для адвольнай $X_1(t)$ і адвольнай дадатна вызначанай функцыі $B(t, S)$ існуе Г.п. $X_1(t)$, для якога сярэдняе значэнне і карэляцыйная функцыя ёсць менавіта $A(t)$ і $B(t, S)$.

ГЕАДЭЗІ́ЧНАЯ КРЫВІНЯ́ ў пункце рэгулярнай крывой — велічыня, якая характарызуе адхіленне лініі на паверхні ад геадэзічнай лініі.

ГЕАДЭЗІ́ЧНАЯ ЛІ́НІЯ — крывая, якая абагульняе паняцце простай (або адрэзка простай) у эўклідавай геаметрыі на выпадак прастораў больш агульнага віду. Напрыклад, на плоскасці Г.л. — адрэзкі простых, на сферы — вялікія акружыны, на цыліндры — *шрубавыя лініі*. Г.л. характарызуюцца тым, што ў кожным пункце судатычная плоскасць праходзіць праз нармаль да паверхні; вектар паскарэння (г.зн. вектар другой вытворнай па натуральным параметры) перпендыкулярны датычнай плоскасці паверхні. Раўнанні Г.л. вызначаюцца каэфіцыентамі першай квадратовай формы і іх вытворнымі. Таму пры ізаметрычных адлюстраваннях Г.л. пераходзяць у Г.л. Праз кожны пункт паверхні ў кожным кірунку праходзіць адзіная Г.л. Лакальна Г.л. найкарацейшая сярод крывых, якія злучаюць два зададзеныя пункты.

ГЕАМЕТРЫ́ЧНАЕ МЕ́СЦА — тэрмін, які выкарыстоўваўся ў падручніках для абазначэння мноства пунктаў, простых і г.д., якія маюць пэўную ўласцівасць. Так, Г.м. пунктаў, роўнааддаленых ад дадзенага пункта, ёсць акружына; Г.м. пунктаў прасторы, роўнааддаленых ад двух дадзеных пунктаў A і B, ёсць плоскасць, перпендыкулярная да адрэзка AB, якая праходзіць праз яго сярэдзіну.

ГЕАМЕТРЫ́ЧНАЕ РАЗМЕРКАВА́ННЕ — *размеркаванне імавернасцяў* дыскрэтнай выпадковай велічыні, якая прымае цэлыя неадмоўныя значэнні $m = 0, 1, 2, ...$ з імавернасцямі $p_m = pq^m$, дзе $p = 1 - q$ — параметр з інтэрвала $(0, 1)$. Характарыстычная функцыя Г.р. — $F(x) = p / (1 - qe^{it})$, матэматычнае спадзяванне Г.р. роўнае p / q; дысперсія Г.р. роўная p / q^2, стваральная функцыя Г.р. — $p / (1 - qt)$. Звычайна Г.р. узнікае ў схеме *Бэрнулі выпрабаванняў*. Г.р. мае выпадковая велічыня, роўная колькасці незалежных выпрабаванняў да першага поспеху, калі імавернасць поспеху роўная p, а няўдачы — q. Назоў Г.р. атрымала ад геаметрычнай прагрэсіі, якая яго ўтварае.

ГЕАМЕТРЫ́ЧНАЕ СЯРЭ́ДНЯЕ велічыняў — для n велічыняў $x_1, x_2, ..., x_n$ лік q, роўны кораню n-й ступені з іх здабытку: $q = \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n}$. Г.с. двух лікаў a і b, роўнае $\sqrt{ab}$, называецца таксама сярэднім прапарцыйным паміж a і b.

ГЕАМЕТРЫ́ЧНАЯ ПРАГРЭ́СІЯ — паслядоўнасць лікаў, кожны з якіх, пачынаючы з другога, роўны папярэдняму, памножанаму на які-небудзь нязменны для гэтай прагрэсіі лік $q \neq 0$ (назоўнік прагрэсіі). Г.п. нарастальная, калі $q > 1$; спадальная, калі $0 < q < 1$; калі $q < 0$, то Г.п. — знакачаргавальная. Кожны элемент Г.п. можна вылічыць праз яе першы элемент a_1 і назоўнік q па формуле

$$a_n = a_1 q^{n-1},$$

а суму S_n першых n элементаў, калі $q \neq 1$, — па формуле

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}.$$

Калі $|q| < 1$, то пры неабмежаваным нарастанні n сума S_n імкнецца да ліміту $S = a_1 / (1-q)$. У Г.п. з дадатнымі элементамі адвольны элемент ёсць сярэдняе геаметрычнае паміж папярэднім і наступным яе элементамі.

ГЕАМЕТРЫ́ЧНЫЯ БУДАВА́ННІ — развязанне пэўных геаметрычных задач пры дапамозе розных інструментаў (лінеек, цыркуляў і інш.), якія лічацца абсалютна дакладнымі. Задача на будаванне ёсць развязальная з дапамогай цыркуля і лінейкі, калі каардынаты пункта, які адшукваецца, могуць быць запісаныя ў выглядзе выразаў, што змяшчаюць канцую колькасць аперацый складання, множання, дзялення і здабывання квадратовага кораня. Прыклады неразвязальных задач: *падваенне куба, трысекцыя вугла, квадратура круга.*

ГЕАМЕ́ТРЫЯ (ад грэц. geometria — меранне зямлі) — частка матэматыкі, якая вывучае памеры, форму і прасторавыя дачыненні рэальных целаў, абстрагуючыся пры гэтым ад іншых іх уласцівасцяў (маса, колер і г.д.), а таксама іншыя дачыненні і формы, падобныя да прасторавых паводле сваёй структуры. Напрыклад, разглядаюцца адлегласці паміж функцыямі без уліку таго, якія рэальныя працэсы гэтыя функцыі апісваюць.

Г. узнікла ў глыбокай старажытнасці ў сувязі з практычнымі патрэбамі вымярэння зямельных участкаў і аб'ёмаў целаў. Геаметрычныя звесткі фармуляваліся ў выглядзе правілаў без іх доказу. Першы збор вядомых фактаў Г., што дайшоў да нас, і іх лагічную сістэматызацыю ўяўляюць сабою "Пачаткі Эўкліда" (3 ст. да н.э.), дзе былі сфармуляваныя асноўныя сцверджанні Г. (азначэнні, аксіёмы і пастулаты), з якіх шляхам лагічных разважанняў доказваліся розныя ўласцівасці найбольш простых фігур на плоскасці і ў прасторы. Развіццё астраноміі і геадэзіі (1—2 стст. да н.э.) прывяло да стварэння плоскай і сферычнай *трыганаметрыі.* Пасля працяглага перапынку інтэнсіўнае развіццё Г. пачалося ў 17 ст. Р.Дэкарт і П.Фэрма адкрылі *аналітычную геаметрыю,* якая вывучае геаметрычныя вобразы метадамі алгебры. У 18 і 19 стст. была пабудавана *дыферэнцыяльная геаметрыя,* якая вывучае лініі і паверхні метадамі матэматычнага аналізу (Л.Ойлер, Г.Монж, К.Гаўс). У той час працамі Г.Монжа створана *нарысная геаметрыя,* якая вывучае спосабы адлюстравання целаў на плоскасці. У 17 ст. Ж.Дэзарг і Б.Паскаль заклалі асновы *праектыўнай геаметрыі.* Яна вывучае ўласцівасці фігур, якія захоўваюцца пры праектыўных пераўтварэннях. Развіццё праектыўнай Г. у самастойную дысцыпліну звязанае з імем Ж.Пансэле (1822). У 1826 г. П.Лабачэўскі пабудаваў Г. (гл. *Лабачэўскага геаметрыя*), у аснову якой пакладзена сістэма аксіём, адрозная ад сістэмы аксіём Эўкліда толькі аксіёмай пра паралельныя простыя. У выніку стала зразумела, што ў матэматыцы магчымае будаванне разнастайных прастораў з рознымі Г. У сярэдзіне 19 ст. узнікла паняцце мнагамернай прасторы. Сістэматызацыя ў мностве разнастайных Г. стала магчымай з дапамогай *групаў* тэорыі. У 1872 г. К.Кляйн вызначыў змест Г. наступным чынам. Дадзена мнагастайнасць M і некаторая група G яе пераўтварэнняў, г.зн. узаемна адназначных адлюстраванняў M на сябе. Патрабуецца даследаваць тыя ўласцівасці геаметрычных вобразаў, што належаць мнагастайнасці M, якія не змяняюцца пры дзеянні пераўтварэнняў групы G. Важным прыватным выпадкам такіх мнагастайнасцяў ёсць аднародныя прасторы, якія характарызуюцца тым, што для ўсякіх двух пунктаў a і b з M існуе пераўтварэнне групы G, якое пераводзіць пункт a у пункт b. Да аднародных належаць прасторы эўклідава, Лабачэўскага, афінная, праектыўная і інш. Ідэя пра выкарыстанне тэорыі групаў, дастасоўная да Г., атрымала сваё далейшае развіццё ў працах С.Лі (гл. *Лі група*). Тэорыя групаў Лі — адзін з фундаментальных раздзелаў сучаснай Г. Паралельна развіваўся лагічны аналіз асноў элементарнай Г., высвятляліся пытанні несупярэчлівасці, мінімальнасці і поўнасці сістэм аксіём. Вынікі гэтай работы падсумаваў Д.Гільбэрт у кнізе "Асновы геаметрыі" (1899).

Сучаснае разуменне Г. склалася ў 20 ст. разам з поглядамі на ўсю матэматыку. З гэтага пункту гледжання матэматыка вывучае мноствы, забяспечаныя пэўнымі матэматычнымі структурамі — алгебраічнымі, тапалагічнымі, геаметрычнымі і інш., г.зн. нейкімі дачыненнямі паміж элементамі або падмноствамі гэтых мностваў. Важная для ўсёй матэматыкі структура — гэта тапалагічная структура, якая дазваляе ў найбольш агульным выглядзе сфармуляваць і абгрунтаваць паняцце непарыўнасці. Шмат якія паняцці тапалогіі зарадзіліся ў нетрах Г., у выніку *тапалогія* вылучылася ў вялікую самастойную частку матэматыкі. Аналагічны шлях прайшла і *алгебраічная геаметрыя,* якая цяпер лічыцца раздзелам алгебры.

Адзін з асноўных раздзелаў Г. — дыферэнцыяльная Г., што вывучае дыферэнцавальныя мнагастайнасці з зададзенымі на іх дадатковымі структурамі (рыманава, псеўдарыманава, фінслярава метрыкі, афінныя і іншыя злучнасці, групы пераўтварэнняў, амаль камплексныя і іншыя структуры). *Інтэгральная геаметрыя* даследуе меры на мноствах, якія складаюцца з мнагастайнасцяў дадзенай прасторы (простых, плоскасцяў, геадэзічных і г.д.). *Камбінаторная геаметрыя* вывучае размяшчэнне геаметрычных фігур у эўклідавай і неэўклідавай прасторах, выкарыстоўваючы метады тапалогіі, функцыянальнага аналізу, тэорыі графаў і інш.

Станаўленне Г. у Беларусі пачалося ў 1930-х гг. Акад. Ц.Бурстын атрымаў важныя вынікі ў праблеме ўкладання рыманавых прастораў у эўклідавы і рыманавы прасторы. Тады ж ён выдаў на беларускай мове падручнікі: "Курс дыферэнцыяльнай геаметрыі" і "Увядзенне ў тэорыю рыманавых прастораў". У пасляваенны час даследаванні па геаметрыі працягваліся ў асноўным у БДУ (Л.Тутаеў). Атрыманы значныя вынікі па тэорыі сіметрычных прастораў і іх абагульненняў (А.Фядэнка), тэорыі аднародных прастораў (В.Вядзернікаў, В.Баланчанка), падалгебраў Лі (Б.Камракоў), дастасаванні прасторы Мінкоўскага ў фізіцы (А.Рабушка), геаметрычнай тапалогіі (С.Агееў), дыферэнцыяльнай геаметрыі слаенняў (І.Бялько).

ГЕАМЕ́ТРЫЯ ЛІ́КАЎ — раздзел *лікаў тэорыі*, які вывучае тэарэтычна-лікавыя праблемы з дапамогай геаметрычных метадаў. Асноўная, тыповая задача Г.л. — задача пра мінімум $m(F)$ пэўнай рэчаіснай функцыі $F(x) = F(x_1, ..., x_n)$. Мінімум $m(F)$ — дакладная ніжняя мяжа значэнняў $F(x)$, калі x належыць нейкаму абсягу і мае цэлыя каардынаты. Адзін з галоўных вынікаў Г.л. — тэарэма Мінкоўскага (заснавальніка Г.л.): калі $F(x) < 1$ ёсць выпуклы абсяг аб'ёму V_F і $F(x) = F(-x)$, то $m(F) \leq 2V_F^{-1/n}$. Г.л. знаходзіць дастасаванні ў тэорыі лікаў, цэлалікавым праграмаванні.

ГЕАМЕ́ТРЫЯ Ў МАЛЫ́М — геаметрычныя тэорыі, у якіх будова крывых, паверхняў, прастораў і г.д. вывучаецца ў даволі малой акрузе іх пунктаў.

ГЕАМЕ́ТРЫЯ Ў ЦЭ́ЛЫМ — геаметрычныя тэорыі, якія вывучаюць поўны аб'ект: цэлую крывую, цалкам усю прастору і г.д., а таксама адлюстраванні гэтых аб'ектаў. Паняцце Г.ц. звычайна ўжываецца як супрацьпастаўленне паняццю *геаметрыя ў малым*.

ГЕКСА́ЭДР (ад грэч. hex — шэсць + hedra — база, аснова, грань) — мнагаграннік з шасцю гранямі (напрыклад, пяцівугольная піраміда). Правільны Г. — куб. Тэрмін Г. прыпісваюць Папу Александрыйскаму (3 ст.).

ГЕНЕРА́ЛЬНАЯ СУКУ́ПНАСЦЬ — сукупнасць усіх магчымых назіранняў, якія маглі б быць выкананыя пры дадзеным рэальным комплексе ўмоў; паняцце тэорыі статыстычнага выбаркавага метаду. Паняцце Г.с. умоўна-матэматычнае, абстрактнае, і яго не трэба блытаць з рэальнымі сукупнасцямі, якія патрэбна статыстычна даследаваць. Г.с. бывае канцая або бясконцая ў залежнасці ад таго, канцая ці бясконцая сукупнасць усіх магчымых назіранняў.

ГЕРО́НА ФО́РМУЛА — формула плошчы трохвугольніка

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

дзе p — паўперыметр трохвугольніка, a, b, c — даўжыні яго старон. Г.ф. змешчана ў "Метрыцы" Герона Александрыйскага (1 ст.); была вядомая Архімеду (3 ст. да н. э.).

ГЁДЭЛЯ ТЭАРЭ́МА ПРА ПЯПО́ЎНАСЦЬ арыфметыкі — агульны назоў дзвюх тэарэм, даказаных К.Гёдэлем (1931). Першая тэарэма Гёдэля сцвярджае, што калі фармальная арыфметыка несупярэчлівая, то ў ёй існуе такое сцверджанне Ф, што ні Ф, ні $\bar{Ф}$ не з'яўляюцца тэарэмамі арыфметыкі. Другая тэарэма Гёдэля сцвярджае, што ў якасці Ф магчыма ўзяць формулу, якая паказвае несупярэчлівасць фармальнай арыфметыкі. Тэарэмы Гёдэля выявілі нязбытнасць увогуле праграмы Гільбэрта, якая прадугледжвала фармалізацыю матэматыкі, а пасля і доказ яе несупярэчлівасці фінітнымі метадамі (гл. *Фінітызм*).

ГЁДЭЛЯ ТЭАРЭ́МА ПРА ПО́ЎНАСЦЬ — сцверджанне пра поўнасць *прэдыкатаў злічэння*: калі формула злічэння прэдыкатаў тоесна праўдзівая, то яна выводзіцца (ёсць тэарэма) у злічэнні прэдыкатаў. Тэарэма паказвае, што злічэнне прэдыкатаў мае ўсе лагічныя законы, якія магчыма адлюстраваць з дапамогай формул логікі прэдыкатаў.

ГЁЛЬДЭРА НЯРОЎНАСЦЬ — 1) Г.н. для сумаў. Няхай

$$x_k \in l_p,\ y_k \in l_q,\ \text{і}\ p > 1,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Няроўнасць выгляду

$$\left|\sum_k x_k y_k\right| \le \left(\sum_k |x_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_k |y_k|^q\right)^{1/q} \qquad (1)$$

называецца Г.н. Роўнасць дасягаецца толькі пры $|x_k|^p = A|y_k|^q$, а $\arg(x_k, y_k)$ і A не залежаць ад k. Пры $p < 1$ знак у няроўнасці (1) мяняецца на процілеглы. У прыватным выпадку $p = q = 2$ Г.н. называецца таксама *Кашы—Бунякоўскага няроўнасцю*; 2) Г. н. для інтэгралаў. Няхай

$$x(t) \in L_p(a, b),\ y(t) \in L_q(a, b),$$

дзе $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тады няроўнасць

$$\left|\int_a^b x(t) y(t) dt\right| \le \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |y(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

называецца Г.н. Калі $p < 1$, то знак Г.н. мяняецца на процілеглы. Пры $p = q = 2$ Г.н. ёсць *Бунякоўскага няроўнасць*. Г.н. шырока выкарыстоўваецца ў функцыянальным аналізе.

ГЁЛЬДЭРА ЎМОВА — няроўнасць, у якой прырост функцыі ацэньваецца праз прырост яе аргумента. Няхай функцыя $f(x)$ вызначана ў абсягу E n-мернай эўклідавай прасторы. Кажуць, што $f(x)$ задавальняе ў пункце $y \in E$ Г.ў. з паказнікам α, дзе $0 \le \alpha \le 1$, і каэфіцыентам $A(y)$, калі для ўсіх $x \in E$, даволі блізкіх да y, мае месца няроўнасць $|f(x) - f(y)| \le A(y)|x - y|^\alpha$. Калі Г.ў. выкананы для ўсіх $y \in E$, то кажуць, што $f(x)$ задавальняе Г.ў. на E. У выпадку $n = 1$ Г.ў. называюцца таксама ўмовамі Ліпшыца парадку α.

ІЕРАРХІЯ (грэц. hierarchia, ад hieros — святы + arche — улада) — класіфікацыя тых ці іншых матэматычных аб'ектаў адпаведна з іх складанасцю. Першыя Г. былі пабудаваныя ў дэскрыптыўнай тэорыі мностваў. У гэтых Г. пераход да больш складанага класа мностваў ажыццяўляецца шляхам выкарыстання тэарэтычна-мноствавых і тапалагічных аперацый у дачыненні да элементаў найбольш простых класаў. У матэматычнай логіцы разглядаецца Г. мностваў і дачыненняў, якія задаюцца формуламі логікавых моваў. Розныя Г. могуць разглядацца аднолькава (аднастайна) з пункту гледжання вызначальнасці (у логікавых мовах). У прыватнасці, пачатковыя класы барэлевай Г. можна задаць аналагічна класам Г. Клінi-Мастоўскага, аналітычнай Г. — аналагічна праектыўнай. Пры гэтым шэраг сцверджанняў, што датычаць будовы класаў Г., атрымліваюць агульную фармулёўку, а часта і падобны доказ. Будаванне Г. рэкурсіўных функцый ажыццяўляецца ў тэорыі алгарытмаў.

ГІЛЬБЭРТА ПРАБЛЕМЫ — 23 праблемы матэматыкі, сфармуляваныя Д.Гільбэртам у дакладзе "Матэматычныя праблемы" на II Міжнародным кангрэсе матэматыкаў (Парыж, 1900). Паводле характару Г.п. розныя: канкрэтныя пытанні (напрыклад, 7-я праблема пра трансцэндэнтныя лікі), цэлыя кірункі (напрыклад, 15-я праблема пра абгрунтаванне тэорыі алгебраічных мнагастайнасцяў). Пэўныя Г.п. ужо развязаныя. Развіццё ідэй, звязаных з Г.п., — значная частка матэматыкі 20 ст.

ГІЛЬБЭРТА СІСТЭМА АКСІЁМ — сістэма аксіём *эўклідавай геаметрыі*, якую прапанаваў Д.Гільбэрт (1899). Складаецца з 20 аксіём, падзеленых на 5 групаў: аксіёмы сувязі, парадку, кангруэнтнасці, непарыўнасці, паралельнасці.

1-я група. 8 аксіём сувязі, якія апісваюць уласцівасці дачынення "ляжаць". У іх сцвярджаецца: для двух адвольных розных пунктаў існуе адна і толькі адна простая, на якой яны ляжаць; на кожнай простай ляжыць не менш за два пункты; ёсць тры пункты, якія не ляжаць на адной простай і інш.

2-я група. 4 аксіёмы парадку, што апісваюць дачыненні "паміж". У іх сцвярджаецца: калі пункт B ляжыць паміж A і C, то A, B, C — тры розныя пункты простай і B ляжыць паміж C і A; для двух розных пунктаў A і B існуе пункт C такі, што B ляжыць паміж A і C і інш.; для двух розных пунктаў A і B мноства пунктаў, якія ляжаць паміж A і B, а таксама пункты A і B утвараюць адрэзак AB.

3-я група. 5 аксіём кангруэнтнасці. У аксіёмах сцвярджаецца: калі AB кангруэнтны адрэзку CD і AB кангруэнтны EF, то CD кангруэнтны EF; ад дадзенага пункта простай у дадзеным кірунку адназначна можна адкласці адрэзак, кангруэнтны дадзенаму; адрэзкі, складзеныя з двух парамі кангруэнтных адрэзкаў, кангруэнтныя паміж сабою і інш.

4-я група. 2 аксіёмы непарыўнасці, якія дазваляюць вымяраць даўжыню адрэзка ў рэчаісных ліках.

5-я група. Адна аксіёма паралельнасці, якая сцвярджае, што ў плоскасці праз дадзены пункт, які не ляжыць на дадзенай простай, можна правесці толькі адну простую, якая не перасякае дадзеную.

Гільбэрт даследаваў незалежнасць групаў аксіём, даказаў поўнасць Г.с.а., а таксама высветліў іх несупярэчлівасць. Паводле тэарэмы Гільбэрта, Г.с.а. неабходная і дастатковая для будавання эўклідавай геаметрыі.

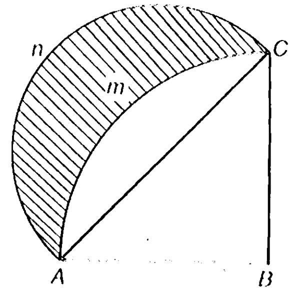
ГІЛЬБЭРТА ТЭАРЭМА — 1) Г.т. пра базіс — тэарэма пра конечнасць базіса кольца мнагаскладаў над нётэрыным кольцам (1890); 2) Г.т. пра нулі — тэарэма пра нулі мнагаскладаў (1893), гл. *Алгебраічная геаметрыя*; 3) Г.т. пра паверхні адмоўнай крывіні — тэарэма, паводле якой у трохмернай эўклідавай прасторы не існуе поўнай рэгулярнай паверхні нязменнай крывіні.

ГІЛЬБЭРТАВА ПРАСТОРА — вектарная прастора H над полем камплексных лікаў з зададзеным у ёй скалярным здабыткам (x, y) для $x, y \in H$, прычым патрабуецца, каб яна была *банахавай прасторай* у сэнсе натуральнай нормы $\|x\| = (x,x)^{1/2}$. Г.п. ёсць некаардынатнае абагульненне звычайнай трохмернай прасторы эўклідавай геаметрыі. Два вектары $x, y \in H$ называюцца артаганальнымі, калі $(x, y) = 0$. Дзве вектарныя падпрасторы M і N называюцца артаганальнымі, калі $(m, n) = 0$, $m \in M$, $n \in N$. Паняцце артаганальнасці цэнтральнае ў тэорыі Г.п. Адной з асноўных тэарэм тэорыі Г.п. ёсць той факт, што кожная замкнёная падпрастора M — Г.п. H мае адзінае артаганальнае дапаўненне: $H = M \oplus M^{\perp}$ (тэарэма пра праекцыі). З дапамогай артаганальнасці азначаецца паняцце ортаўнармаванага базісу Г.п. H. Кожны элемент Г.п. можна адназначна раскласці па базісе. Усе ортаўнармаваныя базісы Г.п. маюць аднолькавую магутнасць. Гэты факт дазваляе азначыць паняцце памернасці Г.п. Як і ва ўсякай банахавай прасторы, апісанне мноства лінейных функцыяналаў на Г.п. і даследаванне іх асаблівасцяў мае вялікае значэнне. Лінейны функцыянал f на Г.п. H мае асабліва просты аналітычны выраз: ён адназначна запісваецца ў выглядзе $f(x) = (x, a)$, дзе $a \in H$, акрамя таго, $\|f\| = \|g\|$ (тэарэма Рыса).

Асноўным зместам тэорыі Г.п. ёсць тэорыя *лінейных аператараў* у Г.п., якая дазваляе разглядзець многія задачы матэматычнай фізікі з адзінага агульнага пункту гледжання; перш за ўсё пытанні, якія датычаць уласных значэнняў і ўласных функцый. Акрамя таго, тэорыя самаспалучаных аператараў у Г.п. служыць матэматычным апаратам квантавай механікі. З другога боку, тэорыя несамаспалучаных аператараў — адна з важнейшых мадэляў тэорыі лінейных аператараў у больш агульных прасторах. Цэнтральным момантам тэорыі аператараў у Г.п. з'яўляецца спектральная тэарэма. Для абмежаваных самаспалучаных аператараў у Г.п. l_2 спектральны расклад знайшоў Д.Гільбэрт. Спектральны расклад для неабмежаваных самаспалучаных аператараў даў Дж.Нойман.

ГІЛЬБЭРТАВА ЦАГЛІНА — падмноства гільбэртавай прасторы l_2, што складаецца з усіх пунктаў $x = (x_1, x_2, ...)$, для якіх $0 \leq x^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $n = 1, 2, ...$. Г.ц. з'яўляецца кампактам; яна гамеаморфная (тапалагічна эквівалентная) здабытку злічальнай сістэмы адрэзкаў.

ГІПАКРАТАВЫ СЯРПОЧКІ — тры фігуры, абмежаваныя дугамі і хордамі акружын, для якіх пры дапамозе цыркуля і лінейкі можна набудаваць роўнавялікія ім прасталінейныя фігуры. Знайшоў Гіпакрат Хіёскі пры спробах развязаць задачу пра *квадратуру круга*.

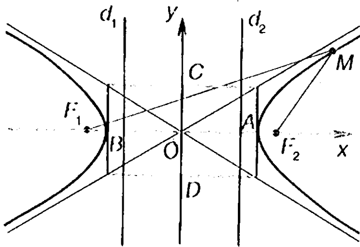


Плошчы Г.с. выражаюцца ў выглядзе квадратовых ірацыянальнасцяў ад даўжыняў хордаў, якія ўваходзяць у будаванне сярпочкаў. У прыватнасці, першы Г.с., абмежаваны чвэрцю акружыны AmC радыуса r і паўакружынай AnC, будуецца на хордзе AC (гл. рыс.), дзе $AB = r$, $AC = r\sqrt{2}$. Плошча гэтага сярпочка роўная плошчы трохвугольніка ABC. Два іншыя сярпочкі будуюцца больш складана.

ГІПАТЭНУЗА (ад грэц. hypoteinusa) — старана прамавугольнага трохвугольніка, якая

знаходзіцца супраць прамога вугла. Даўжыня Г. $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, дзе a і b — катэты (*Піфагора тэарэма*).

ГІПЕ́РБАЛА (ад грэч. hyperballo — праходжу праз што-небудзь) — адно з *канічных сечываў*, мноства пунктаў (рыс. 1) плоскасці, розпасць адлегласцяў $r_1 = F_1M$ і $r_2 = F_2M$ якіх да двух пэўных



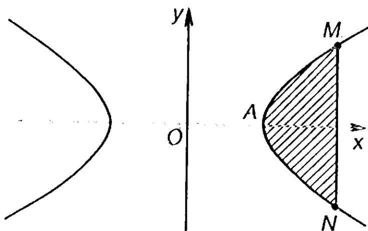
Рыс. 1

пунктаў $F_1(-c, O)$ і $F_2(c, O)$ гэтай плоскасці (ф о к у с а ў Г.) ёсць сталая: $|r_1 - r_2| = 2a < 2c$. Сярэдзіна O адрэзка F_1F_2 (ф о к у с н а й а д л е г л а с ц і) называецца ц э н т р а м Г. У прамавугольнай сістэме каардынат Oxy з пачаткам у цэнтры Г., на восі Ox якой ляжаць фокусы Г., раўнанне Г. мае кананічны выгляд:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = c^2 - a^2,$$

дзе $a = OA = OB$ і $b = OC = OD$ — даўжыні паўвосяў Г.

Г. — цэнтральная лінія другога парадку. Яна складаецца з дзвюх бясконцых галінаў, сіметрычных у дачыненні да галоўных восяў Ox і Oy (р э ч а і с н а й і ў я ў н а й). Пункты A і B перасячэн-



Рыс. 2

ня Г. з рэчаіснай воссю называюцца в я р ш ы н я м і Г. Простыя, да якіх галіны Г. неабмежавана набліжаюцца пры аддаленні ў бясконцасць, называюцца а с і м п т о т а м і Г., іх раўнанні $y = \pm \frac{b}{a} x$. Вугал α паміж асімптотамі залежыць ад значэння э к с ц э н т р ы с і т э т у Г. $e = c / a > 1$. Пры $a = b$ Г. называецца р о ў н а б а к о в а й, яе асімптоты ўзаемна перпендыкулярныя, раўнанне Г. мае выгляд $x^2 - y^2 = a^2$. Калі прыняць асімптоты за восі каардынат, то раўнанне Г. набывае выгляд $xy = a^2/2$, г.зн. роўнабаковая Г. з'яўляецца графікам адваротнай прапарцыйнасці. Простыя d_1 і d_2, перпендыкулярныя да рэчаіснай восі Г. і адцаленыя ад яе цэнтра на адлегласць $d = \pm a / e$, называюцца д ы р э к т р ы с а м і Г. Плошча сегмента (рыс. 2) вызначаецца паводле формулы ($M = M(x, y)$)

$$S_{AMN} = xy - ab \ln\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{b}\right) = xy - ab \operatorname{arch} \frac{x}{a}.$$

ГІПЕРБАЛІ́ЧНАГА ТЫ́ПУ РАЎНА́ННЕ — дыферэнцыяльнае раўнанне з частковымі вытворнымі, для якога адназначна развязана задача Кашы пры пачатковых умовах, зададзеных у наваколлі нейкага пункта M на адвольнай нехарактарыстычнай паверхні. У прыватнасці, дыферэнцыяльнае раўнанне з частковымі вытворнымі, для якога конус нармаляў не мае ўяўных поласцяў, будзе Г.т.р. Дыферэнцыяльнае раўнанне

$$L(u) = H(D_1, ..., D_n)u + F(D_1, ..., D_n) + G(x) = 0, \quad (1)$$

дзе $D = \partial / \partial x_i$, $i = 1, ..., n$, $H(D_1, ..., D_n)$ — аднародны мнагасклад ступені m, а мнагасклад F мае ступень, меншую за m, называецца Г.т.р., калі яго характарыстычнае раўнанне $Q(\xi_1, ..., \xi_n) = H(\xi_1, ..., \xi_n) = 0$ мае n розных рэчаісных развязкаў у дачыненні да адной са зменных $\xi_1, ..., \xi_n$ пры зададзеных астатніх. Кожнае раўнанне (1) першага парадку з рэчаіснымі каэфіцыентамі ёсць Г.т.р. Раўнанне другога парадку

$$L(u) = u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_i D_j u + Fu + G = 0$$

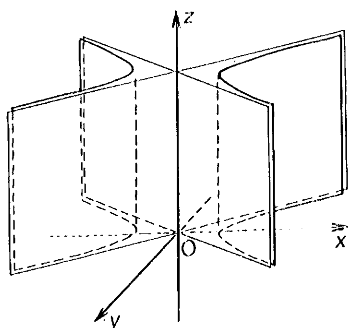
ёсць Г.т.р., калі дадатна вызначана квадратовая форма $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \xi_i \xi_j$.

ГІПЕРБАЛІ́ЧНЫ ПАРАБАЛО́ІД — незамкнёная нецэнтральная паверхня другога парадку. Задаецца раўнаннем

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \, (p > 0, q > 0).$$

Гл. *Парабалоід*.

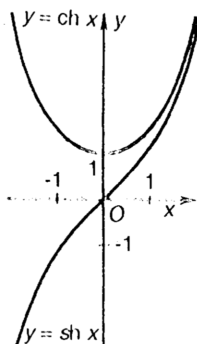
ГІПЕРБАЛІ́ЧНЫ ЦЫЛІ́НДР — незамкнёная *цыліндрычная паверхня* (цэнтральная) другога па-

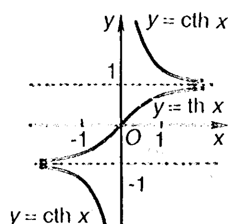


радку, кіроўная лінія якой — *гіпербала* (гл. рыс.). Кананічнае раўнанне Г.ц.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

ГІПЕРБАЛІЧНЫЯ ФУНКЦЫІ — функцыі, вызначаныя формуламі: $\operatorname{sh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ — гіпербалічны сінус і $\operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ — гіпербалічны косі-





Рыс. 1—2. Графікі гіпербалічных функцый

нус (рыс. 1). Азначаюць таксама гіпербалічныя тангенс і катангенс $\operatorname{th} x=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$, $\operatorname{cth} x=\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$ (рыс. 2.). Г.ф. звязаны стасункамі:

$$\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1;\ \operatorname{ch}(x\pm y)=\operatorname{ch} x\operatorname{ch} y\pm\operatorname{sh} x\operatorname{sh} y;$$

$$\operatorname{sh}(x\pm y)=\operatorname{sh} x\operatorname{ch} y\pm\operatorname{ch} x\operatorname{sh} y;$$

$$\operatorname{sh} 2xy=2\operatorname{sh} x\operatorname{ch} y;\ \operatorname{ch} 2xy=\operatorname{ch}^2 x+\operatorname{sh}^2 y;$$

$$\operatorname{th}(x\pm y)=\frac{\operatorname{th} x\pm\operatorname{th} y}{1\pm\operatorname{th} x\operatorname{th} y}.$$

Адваротныя Г.ф. вызначаюцца формуламі:

$$\operatorname{Arsh} x=\ln(x+\sqrt{x^2+1}),\ -\infty<x<\infty;$$

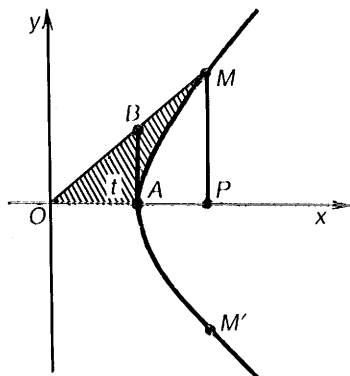
$$\operatorname{Arch} x=\ln(x+\sqrt{x^2-1}), x\ge 1;$$

$$\operatorname{Arth} x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},\ |x|<1.$$

Вытворныя і інтэгралы ад Г.ф.:

$$(\operatorname{sh} x)'=\operatorname{ch} x,\ (\operatorname{ch} x)'=\operatorname{sh} x,\ (\operatorname{th} x)'=1/\operatorname{ch}^2 x;$$

$$\int\operatorname{ch} x\,dx=\operatorname{sh} x+c,\ \int\operatorname{th} x\,dx=\ln\operatorname{ch} x+c.$$



Рыс. 3. Геаметрычная інтэрпрэтацыя гіпербалічных функцый

У камплекснай плоскасці Г.ф. можна азначыць з дапамогай ступеневых шэрагаў:

$$\operatorname{sh} z=z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\ldots+\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots,$$

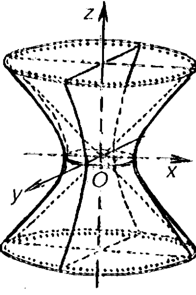
$$\operatorname{ch} z=1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\ldots+\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots,$$

адкуль $\operatorname{ch} z=\cos(iz)$, $i\operatorname{sh} z=\sin(iz)$. Назоў Г.ф. звязаны з тым, што гіпербала $x^2-y^2=1$ пры $x>0$ можа быць зададзеная параметрычнымі раўнаннямі $x=\operatorname{ch} t$, $y=\operatorname{sh} t$. У якасці параметра t бярэцца падвоеная плошча сектара OAM (рыс. 3). Тады $OP=\operatorname{ch} t$, $PM=\operatorname{sh} t$; $AB=\operatorname{th} t$. Пры $y<0$ (пункт M') параметр t адмоўны.

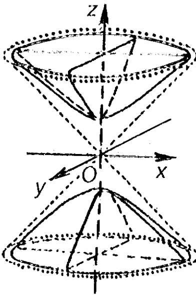
ГІПЕРБАЛО́ІД (ад гіпербала, грэц. eidos — форма, выгляд) — незамкнёная цэнтральная паверхня другога парадку. Існуюць два віды Г. — аднаполасцевы (рыс. 1) і двухполасцевы (рыс. 2). У прамавугольнай сістэме каардынат Oxy з пачаткам у цэнтры сіметрыі Г. раўнанне Г. мае гэтак званы кананічны выгляд:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ (аднапаласцевы Г.)},$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \text{ (двухпаласцевы Г.)},$$



Рыс. 1



Рыс. 2

дзе a, b, c (і адрэзкі такой даўжыні) называюцца паўвосямі Г. Калі $a=b$, то Г. называецца Г. авароту. Праз кожны пункт аднапаласцевага Г. праходзяць дзве простыя, цалкам размешчаныя на яго паверхні, — прасталінейныя ўтваральныя; такім чынам, аднапаласцевы Г. — *лінеістая паверхня*, утвораная дзвюма сем'ямі крывых.

ГІПЕРГЕАМЕТРЫЧНАЯ ФУНКЦЫЯ — *аналітычная функцыя*, вызначаная пры $\gamma \neq 0, 1, 2,...$ шэрагам Гаўса

$$F(\alpha,\beta;\gamma,z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)}\frac{z^n}{n!}.$$

Гэты шэраг збягаецца абсалютна пры $|z|<1$. Г.ф. з'яўляецца развязкам гіпергеаметрычнага раўнання

$$z(1-z)u''+[\gamma-(\alpha+\beta+1)z]\,u'+\alpha\beta u=0.$$

Пры $\mathrm{Re}\gamma > \mathrm{Re}\alpha > 0$ і $|\arg(1-z)|<\pi$ мае месца інтэгральнае выяўленне

$$F(\alpha,\beta;\gamma;z)=$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-zt)^{-\beta}dt,$$

з дапамогай якога Г.ф. можа быць аналітычна працягнутая ў камплексную плоскасць з разрэзам $(1,\infty)$. Формула дыферэнцавання:

$$\frac{d}{dz}F(\alpha,\beta;\gamma;z)=\frac{\alpha\beta}{\gamma}F(\alpha+1,\beta+1;\gamma+1;z).$$

Функцыйныя стасункі

$$F(\alpha,\beta;\gamma;z)=F(\beta;\alpha;\gamma;z)=$$

$$=(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta;\gamma;z)=$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}F(\alpha,\beta;\alpha+\beta-\gamma+1;1-z)+$$

$$+\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-$$

$$-\alpha,\gamma-\beta;\gamma-\alpha-\beta+1;1-z).$$

Прыватныя выпадкі Г.ф. — асноўныя элементарныя і шматлікія спецыяльныя функцыі.

ГІПЕРГРАФ — упарадкаваная пара (V,ε), дзе V — канцае мноства, ε — пэўны набор падмностваў мноства V (не абавязкова розных). Элемент мноства V — вяршыня Г., элемент мноства ε — кант Г. Паняцце Г. — абагульненне паняцця *граф*.

ГІПЕРГРАФА РЭАЛІЗАЦЫЯ — кожны граф, які адпавядае ўмовам: 1) мноствы вяршыняў гіперграфа і графа супадаюць; 2) кожны кант графа ўваходзіць у нейкі кант гіперграфа; 3) для кожнага канта гіперграфа падграф графа, вымушаны гэтым кантам, ёсць злучны (гл. *Граф*). Кожны злучны граф, мноства вяршыняў якога супадае з кантам гіперграфа, называецца рэалізацыяй канта. Праблема будавання Г.р. з вызначанымі ўласцівасцямі ўзнікае ў мікраэлектроніцы. Задачы праверкі існавання Г.р. планарнымі або мінімальнымі (па колькасці кантаў) графамі ёсць NP-поўныя.

ГІПЕРГРАФА РЭАЛІЗАЦЫЯ СТРОГАЯ — кожны граф G, які адпавядае ўмовам: 1) мноствы вяршыняў гіперграфа супадаюць; 2) існуе такі падзел мноства кантаў графа G на падмноствы $E_1, E_2, ..., E_m$, што падграф, вымушаны мноствам кантаў E_i (гл. *Граф*), ёсць рэалізацыя канта e_i гіперграфа (гл. *Гіперграфа рэалізацыя*). Пытанні існавання Г.р.с. развязаныя і маюць дачыненне да тэорыі матроідаў.

ГІПЕРКАМПЛЕКСНАЯ ФУНКЦЫЯ — функцыя $\omega(z)$, дзе z — *гіперкамплексны лік* над полем рэчаісных лікаў, г.зн. функцыя на канцамернай асацыятыўнай алгебры U. У больш вузкім сэнсе Г.ф. называецца функцыя $\omega(z)$ са значэннямі ў той жа алгебры U, г.зн. тая, якая можа быць запісаная ў выглядзе

$$\omega(z)=\sum_{k=1}^{n}f_k e_k,$$

дзе $\{e_k\}$, $k = \overline{1, n}$, — базіс алгебры U, $f_k = f_k(x_1, x_2, ..., x_n)$, $k = \overline{1, n}$, — сістэма n рэчаісных функцый ад n рэчаісных зменных. Тэорыя Г.ф. найлепш развітая, калі U — алгебра *кватэрніёнаў*.

ГІПЕРКАМПЛЕКСНЫ ЛІК — упарадкаваныя наборы рэчаісных лікаў $\alpha_1, ..., \alpha_n$, для якіх вызначаны аперацыі складання, множання на рэчаісны лік і множання Г.л. саміх на сябе. Г.л. — абагульненне паняцця *камплекснага ліку* (для мнагамернай, памернасцю >2, вектарнай прасторы). Сэнс абагульнення ў тым, што арыфметычныя дзеянні над Г.л. адначасова выражаюць пэўныя працэсы ў мнагамернай прасторы ці даюць колькаснае апісанне якога-небудзь фізічнага закону.

Сумай Г.л. $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ і $\beta = (\beta_1, ..., \beta_n)$ называецца Г.л. $\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, ..., \alpha_n + \beta_n)$. Здабыткам Г.л. $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ і рэчаіснага ліку k называецца Г.л. $k\alpha = (k\alpha_1, ..., k\alpha_n)$. Здабытак двух Г.л. $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ і $\beta = (\beta_1, ..., \beta_n)$ звычайна задаецца табліцай множання адзінак $\varepsilon_i = (0, ..., 1, ..., 0)$ (1 на i-м месцы) $(i = 1, ..., n)$: $\varepsilon_i\varepsilon_j = C_{ij}^1\varepsilon_1 + ... + C_{ij}^n\varepsilon_n$ $(i, j = 1, 2, ..., n)$. Калі $\alpha = \alpha_1\varepsilon_1 + ... + \alpha_n\varepsilon_n$, $\beta = \beta_1\varepsilon_1 + ... + \beta_n\varepsilon_n$, то $\alpha\beta = \gamma_1\varepsilon_1 + ... + \gamma_n\varepsilon_n$, дзе $\gamma_k = \sum_{i,j} C_{ij}^k\alpha_i\beta_j$. Закон множання можа быць зададзены рознымі спосабамі адпаведна заданню n^3 лікаў C_{ij}^k $(i, j, k = 1, 2, ..., n)$. Напрыклад, калі $n = 2$, $C_{11}^1 = C_{21}^1 = 1$, $C_{22}^1 = -1$, астатнія C_{ij}^k нулі, то атрымаем камплексныя лікі. Аналагічна пры $n = 4$ атрымаем *кватэрніёны*.

ГІПЕРПАВЕ́РХНЯ — абагульненне на мнагамерны выпадак паняцця звычайнай *паверхні* ў трохмернай прасторы. У абагульненым сэнсе Г. ёсць падмнагастайнасць M (гладкай, алгебраічнай, аналітычнай) мнагастайнасці N, дзе $\dim N - \dim M = 1$. Найбольш пашыраны выпадак, калі N — афінная, эўклідава або праектыўная прастора. Прыклад Г. — *гіперплоскасць*.

ГІПЕРПЛО́СКАСЦЬ — абагульненне на мнагамерны выпадак паняцця звычайнай *плоскасці* ў трохмернай прасторы. Г. у n-мернай афіннай прасторы A_n, звязанай з вектарнай прасторай V_n над полем K, — гэта афінная плоскасць, памернасць якой $n - 1$. Гэтае азначэнне падыходзіць і да Г. у эўклідавай прасторы E_n. Калі ў A_n зафіксаваць афінны рэпер $\{0, e_1, e_2, ..., e_n\}$, то кожная Г. можа быць зададзена лінейным раўнаннем

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = a,$$

дзе ўсе каэфіцыенты належаць полю K. У эўклідавым выпадку вектар з каардынатамі $(a_1, a_2, ..., a_n)$ у артаганальным базісе $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ перпендыкулярны да гэтай Г.

ГІПЕРЭЛІПТЫ́ЧНАЯ КРЫВА́Я — неасаблівая праектыўная мадэль афіннай крывой $y^2 = f(x)$, дзе $f(x)$ — мнагасклад няцотнай ступені n без кратных каранёў (выпадак ступені $2k$ зводзіцца да няцотнага выпадку). Поле рацыянальных функцый на Г.к. (поле гіперэліптычных функцый) ёсць квадратовае пашырэнне поля рацыянальных функцый. У гэтым сэнсе яно з'яўляецца найпрасцейшым полем алгебраічных функцый пасля поля рацыянальных функцый. Г.к. характарызуецца ўмовай існавання аднамернага лінейнага шэрагу *дывізараў* ступені 2, які вызначае марфізм ступені 2 Г.к. на праектыўную простую. Род Г.к. роўны $(n - 1)/2$, таму для розных няцотных n Г.к. бірацыянальна неізаморфныя. Пры $n = 1$ атрымліваецца праектыўная простая, пры $n = 3$ — эліптычная крывая. На Г.к. роду $g > 1$ дзелі рэгулярных дыферэнцыяльных формаў утвараюць падполе роду 0, і гэтая ўласцівасць характарызуе Г.к.

ГІПЕРЭЛІПТЫ́ЧНЫ ІНТЭГРА́Л — прыватны выпадак *абэлева інтэграла* $\int R(z, w)dz$, дзе R — рацыянальная функцыя зменных z, w, звязаных алгебраічным раўнаннем $w^2 = P_n(z)$, у якім $P_n(z)$ — мнагасклад ступені $n \geq 5$ без кратных каранёў (пры $n = 3, 4$ маем эліптычныя інтэгралы). Калі $n = 5, 6$, інтэграл называецца ультраэліптычным. Усякі Г.і. можна падаць у выглядзе лінейнай камбінацыі элементарных функцый і кананічных Г.і.

ГІСТАГРА́МА (ад грэц. histos — тут слуп + gramma — напісанне, літара), слупковая дыяграма — адзін з відаў графічнага выяўлення вынікаў эксперыменту. Для пабудовы Г. увесь дыяпазон назіранняў $X_1, ..., X_n$ нейкай выпадковай велічыні X дзеліцца на k прамежкаў групоўкі (звычайна аднолькавых) пунктамі $X_1, ..., X_{k+1}$, затым падлічваецца колькасць назіранняў m_i, якія трапілі ў прамежак $[X_i, X_{i+1})$ $h_i = m_i/n$, і вызначаецца частасць $h_i = m_i/n$. На восі абсцысаў адзначаюцца пункты $X_1, ..., X_{k+1}$, і адрэзкі $[X_i, X_{i+1}h_i = m_i]$ $(i = 1, 2, ..., k)$ прымаюцца за аснову прамавугольнікаў з вышынямі, роўнымі $h_i/(X_{i+1} - X_i)$. У выпадку аднолькавых прамежкаў $[X_i, X_{i+1})$ вышыні прамавугольнікаў прымаюцца роўнымі або h_i, або m_i.

ГЛАБА́ЛЬНАЕ ПО́ЛЕ — поле, якое з'яўляецца канцым пашырэннем поля рацыянальных лікаў Q (у характарыстыцы 0) ці канцым пашырэннем поля рацыянальных функцый адной зменнай над канцым полем $Fg(x)$ (у характарыстыцы p). Г.п. — дыскрэтна нармаваныя палі з канцым полем рэштаў. Папаўненнямі Г.п. з'яўляюцца лакальныя палі. Сутнасць лакальна-глабальнага метаду — пераход ад вывучэння Г.п. і звязаных з імі аб'ектаў (напрыклад, алгебраў, алгебраічных мнагастайнасцяў) да вывучэння адпаведных аб'ектаў над лакальнымі палямі пры дапамозе ўсялякіх папаўненняў.

ГЛАБА́ЛЬНЫ МА́КСІМУМ — тое, што *абсалютны максімум*.

ГЛАБА́ЛЬНЫ МІ́НІМУМ — тое, што *абсалютны мінімум*.

ГЛА́ДКАСЦЬ — уласцівасць функцыі, геаметрычнай фігуры (крывой, паверхні і г.д.). Функцыя называецца г л а д к а й, калі яна дыферэнцавальная; фігура — калі кожны яе пункт мае наваколле, якое можна параметрызаваць з дапамогай дыферэнцыяльных функцый. Калі функцыя n разоў дыферэнцавальная, то кажуць пра Г. парадку n.

ГЛА́ДКАЯ ГІПЕРПАВЕ́РХНЯ — гіперпаверхня ў катэгорыі гладкіх *мнагастайнасцяў*. Больш дакладна, калі M і N — гладкія мнагастайнасці, $\dim N - \dim M = 1$ і зададзена патапанне $F: M \to N$, тады $F(M)$ ёсць патапанне Г.г. у мнагастайнасці N. Тэрмін п а т а п а н н е азначае, што F — такое гладкае адлюстраванне, дыферэнцыял якога ў кожным пункце $x \in M$ ёсць *ін'ектыўнае адлюстраванне* датычнай прасторы M_x да M у пункце x у датычную прастору $N_{F(x)}$ да N у пункце $F(x)$. Існуе іншае неэквівалентнае азначэнне Г.г. як укладзенай падмнагастайнасці M у мнагастайнасць N. Часцей за ўсё разглядаюць Г.г. у эўклідавай або афіннай прасторы. Напрыклад, мноства развязкаў раўнання $F(X_1, ..., X_n) = 0$ у дачыненні да афіннага рэпера $\{0, e_1, e_2, ..., e_n\}$ афіннай прасторы A_n, дзе F — гладкая функцыя з умовай $\mathrm{grad} F \neq 0$ ва ўсіх пунктах гэтага мноства, — гэта Г.г. у прасторы A_n. Ёсць квадрыкі ў A_n, якія не з'яўляюцца Г.г. (напрыклад, конус).

ГЛА́ДКАЯ ПАВЕ́РХНЯ — простая паверхня, гладкая ў кожным сваім пункце, датычныя плоскасці якой змяняюцца непарыўна. Апошняе азначае, што калі x і y — пункты паверхні S, а Πx, Πy — датычныя плоскасці да паверхні S у гэтых пунктах, то пры $x \to y$ маем $\Pi x \to \Pi y$. Простая паверхня S называецца г л а д к а й у п у н к ц е x, калі ў гэтым пункце існуе датычная плоскасць Π да паверхні S і нейкае наваколле пункта x паверхні S адназначна праектуецца на плоскасць Π. Калі простая паверхня задаецца вектарным раўнаннем $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, то дастатковая ўмова яе гладкасці — наступныя два патрабаванні: функцыя $\mathbf{r}(u, v)$ павінна мець непарыўныя частковыя вытворныя $\mathbf{r}_u'$ і $\mathbf{r}_v'$ у абсягу змянення параметраў u і v; у абсягу змянення параметраў u і v вектары $\mathbf{r}_u'$ і $\mathbf{r}_v'$ некалініярныя.

ГО́ЛЬДБАХА ПРАБЛЕ́МА — праблема *лікаў тэорыі*: ці можна кожны цотны лік, большы за 4, запісаць у выглядзе сумы двух простых лікаў (б і н а р н а я Г. п.), а няцотны лік, большы за 5, — у выглядзе сумы трох простых лікаў (т э р н а р н а я Г. п.). І.Віnаградаў (1937) даказаў, што кожны дастаткова вялікі няцотны лік ёсць сума трох простых лікаў. Тэрнарную Г.п. можна лічыць развязанай, бінарная Г.п. застаецца не развязанай (2001).

ГОМАМАРФІ́ЗМ — матэматычнае паняцце, якое абагульняе паняцце *ізамарфізму*. Азначаецца на пары алгебраічных аб'ектаў з зададзенымі на іх аперацыямі і дачыненнямі як адлюстраванне аднаго аб'екта на другі з захаваннем усіх аперацый і дачыненняў. Напрыклад, Г. групы G у групу H ёсць такое адлюстраванне φ, пры якім кожнаму элементу $g \in H$ ставіцца ў адпаведнасць пэўны элемент $h = \varphi(g) \in H$ і здабытку двух элементаў $g_1 \cdot g_2$ з G адпавядае $\varphi(g_1) \cdot \varphi(g_2)$.

ГОМЕАМАРФІ́ЗМ (ад грэч. homoios — падобны + morphe — форма) — адно з асноўных паняццяў тапалогіі. Дзве тапалагічныя прасторы называюцца г а м е а м о р ф н ы м і, калі існуе біектыўнае і непарыўнае адлюстраванне адной з іх на другую, для якога адваротнае адлюстраванне таксама непарыўнае. Пры гэтым само адлюстраванне называецца Г. Напрыклад, усякія два адрэзкі гамеаморфныя, але адрэзак не гамеаморфны ні акружыне, ні простай, а простая гамеаморфная ўсякаму інтэрвалу. Уласцівасці фігур, якія застаюцца інварыянтнымі пры Г., называюцца т а п а л а г і ч н ы м і. Тапалагічнымі ўласцівасцямі з'яўляюцца, напрыклад, кампактнасць, злучнасць. Тэрмін Г. увёў А.Пуанкарэ (1895).

ГО́РНЭРА СХЕ́МА — прыём для знаходжання дзелі і астачы пры дзяленні мнагаскладу $P_n(x) = a_0x^n + ... + a_{n-1}x + a_n$ на двухсклад $x - c$, дзе ўсе

каэфіцыенты c, a_0, a_1, ..., a_n знаходзяцца ў нейкім полі, напрыклад у полі камплексных лікаў. Усякі мнагасклад $P_n(x)$ адзіным спосабам можна падаць у выглядзе $P_n(x) = (x-c)\,Q_{n-1}(x) + R$, дзе $Q_{n-1}(x) = u_0 x^{n-1} + \ldots + b_{n-2}x + b_{n-1}$ — няпоўная дзель, а R — астача, роўная, паводле *Бэзу тэарэмы*, $P_n(c)$. Каэфіцыенты мнагаскладу Q_{n-1} і R знаходзяць згодна з рэкурэнтнымі формуламі:

$$b_0 = a_0,\ b_1 = a_1 + cb_0, \ldots, b_{n-1} = a_{n-1} + cb_{n-2},$$

$$R = a_n + cb_{n-1}. \qquad (1)$$

Пры вылічэннях выкарыстоўваюць табліцу, верхні радок якой зададзены, а ніжні вылічваецца па формулах (1). У вылічальнай практыцы алгарытм Г.с. ажыццяўляецца паводле формулы

$$P_n(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \ldots + x(a_{n-1} + a_n)\ldots)).$$

Прымаючы $u_n = a_n$, знаходзяць $u_k = xu_{k+1} + a_k$, $k = n-1, \ldots, 1, 0$.

ГРА́ДУС (ад лац. gradus — крок, ступень) — адзінка вымярэння плоскага вугла, роўная 1/90 прамога вугла, абазначаецца знакам °. Падзяляецца на 60 мінут (60′) ці 3600 секунд (3600″). Разгорнуты вугал складае 180°. Г. ужываецца таксама для вымярэння дугаў акружын (поўная акружына змяшчае 360°).

ГРАДУЯВА́НАЯ А́ЛГЕБРА — *алгебра* A, якая раскладаецца ў прамую суму $A = \bigoplus_{r=-\infty}^{\infty} A_r$ сваіх падпрастораў такім чынам, што праўдзіцца ўмова $A_r A_s \subset A_{r+s}$, $r, s \in \mathbb{Z}$. Г.а. камутатыўная, калі $ab = (-1)^{rs}ba$ для кожных $a \in A_r$; $b \in A_s$. *Грасмана алгебра* — асацыятыўная Г.а. з адзінкай над нейкім полем k з утваральнымі $\xi_1, \ldots, \xi_n$ і вызначальнымі стасункамі $\xi_i\xi_j = -\xi_j\xi_i$, $i \neq j$, $\xi_i^2 = 0$. Некамутатыўная Г.а. — гэта алгебра мнагаскладаў ад n зменных над нейкім полем K, калі A_r — прастора ўсіх аднародных мнагаскладаў ступені r пры $r \geq 0$ і $A_r = 0$ пры $r > 0$.

ГРАДЫЕ́НТ (ад лац. gradients (gradientis) — які крочыць) — вектар, які паказвае кірунак найхутчэйшага змянення нейкай зменнай велічыні $u(x, y, z)$, значэнне якой мяняецца ад аднаго пункта прасторы да другога. Абазначаецца $\mathbf{grad}\,u$ і мае кампаненты

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

Даўжыня Г. (хуткасць змянення велічыні ў кірунку Г.) роўная

$$\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

ГРАДЫЕ́НТАВАЕ ПО́ЛЕ — тое, што *патэнцыяльнае поле*.

ГРАДЫЕ́НТАВЫ МЕ́ТАД — метад мінімізацыі функцый многіх зменных, у якім наступнае набліжанне функцыі $F(x)$ атрымліваецца з папярэдняга зрухам у кірунку *градыента* функцыі $x^{n+1} = x^n - \delta_n\,\mathbf{grad}F(x^n)$. Значэнне δ_n атрымліваюць з умовы мінімуму велічыні $F(x^n - \delta_n\,\mathbf{grad}F(x^n))$.

ГРА́МА ВЫЗНА́ЧНІК — вызначнік *Грама матрыцы* сістэмы вектараў $\{\boldsymbol{a}_i\}$, $i = \overline{1,n}$, эўклідавай (унітарнай) прасторы:

$$\Gamma(a_1, \ldots, a_n) = \det[(a_i, a_j)],\ i, j = \overline{1, n}.$$

Г.в. роўны квадрату аб'ёму n-мернага паралелепіпеда, што пабудаваны на вектарах $\boldsymbol{a}_1$, ..., $\boldsymbol{a}_n$. Для Г.в. праўдзіцца няроўнасць

$$\Gamma(a_1, \ldots, a_n) \leq \Gamma(a_1), \ldots, \Gamma(a_n),$$

у якой знак роўнасці дасягаецца, калі і толькі калі вектары $\boldsymbol{a}_i$, $i = \overline{1, n}$, парамі артаганальныя або хоць бы адзін з іх нулявы. Геаметрычны сэнс няроўнасці ў тым, што аб'ём n-мернага паралелепіпеда не перавышае здабытку даўжыняў яго кантаў і роўны здабытку толькі ў тым выпадку, калі паралелепіпед прамавугольны. Калі сістэма $\{a_i\}$ лінейна незалежная, то даўжыня h артаганальнай складовай адвольнага вектара $\boldsymbol{b}$ у дачыненні да падпрасторы, нацягнутай на $a_1, \ldots, a_n$, знаходзіцца па формуле

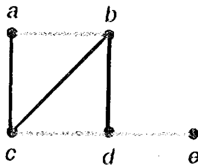
$$h^2 = \Gamma(a_1, \ldots, a_n, b)\,/\,\Gamma(a_1, \ldots, a_n).$$

ГРА́МА МА́ТРЫЦА — квадратная матрыца $[(a_i, a_k)]$, $i, k = \overline{1,n}$, элементы якой ёсць скалярныя здабыткі вектараў $\boldsymbol{a}_i$, $\boldsymbol{a}_k$ эўклідавай (унітарнай) прасторы. У эўклідавай (унітарнай) прасторы Г.м. — сіметрычная (адпаведна эрмітава) дадатна паўвызначаная матрыца, г.зн. усе яе галоўныя міноры неадмоўныя. Праўдзіцца адваротнае сцверджанне: усякая рэчаісная дадатна паўвызначаная сіметрычная (эрмітава) матрыца ёсць Г.м. нейкай сістэмы вектараў эўклідавай (унітарнай) прасторы. Сістэма вектараў $\{\boldsymbol{a}_i\}$, $i = \overline{1,n}$, лінейна незалежная, калі і толькі калі яе Г.м. дадатна вызначаная. Гл. таксама *Грама вызначнік*.

ГРАНЬ мнагагранніка — плоскі многавугольнік, які з'яўляецца часткаю паверхні *мнагагранніка* і абмежаваны яго кантамі.

ГРА́СМАНА А́ЛГЕБРА — асацыятыўная алгебра з адзінкай над некаторым полем K з утваральнымі $\xi_1,...,\xi_n$ і вызначальнымі стасункамі $\xi_i\xi_j = -\xi_j\xi_i$, $i \neq j$, $\xi_i^2 = 0$. Г.а. запісваецца $\Lambda(\xi_1,...,\xi_n)$ ці $\Lambda_k(\xi_1,...,\xi_n)$. Уведзена Г.Грасманам як алгебраічны апарат для ўтварэння мнагамерных прастораў аднамернымі.

ГРАФ (ад грэц. grapho — пішу) — упарадкаваная пара (V, E), дзе V — канцае пустое мноства, E — пэўнае мноства яго двухэлементавых падмностваў. Элемент мноства V — вяршыня Г., элемент мноства E — кант. Вяршыні u і v сумежныя, калі двухэлементавае мноства $\{u, v\} = e$ з'яўляецца кантам. Замест $\{u, v\}$ пішацца uv або vu. Вяршыні u і v — канцы канта $e = uv$, вяршыня



Рыс. 1

u і кант e (v і e) інцыдэнтныя. Два канты сумежныя, калі яны маюць агульны канец. Парадак Г. — колькасць яго вяршыняў. Ступень ($\deg v$) вяршыні v — колькасць вяршыняў, сумежных з v. На рыс. 1 вяршыням Г. адпавядаюць пункты, кантам — непарыўныя лініі, якія злучаюць канцы гэтых кантаў. Для Г. $G = (V, E)$ $V = \{a, b, c, d, e\}$, $E = \{ab, ac, bc, bd, cd, de\}$. Няхай $G = (V, E)$ — Г. парадку n. Занумаруем яго вяршыні: $V = \{v_1,..., v_n\}$. Матрыца сумежнасці $A(G)$ — $n{\times}n$-матрыца, яе элемент A_{pq}, які займае пазіцыю (p, q), вызначаецца роўнасцямі:

$$A_{pq} = \begin{cases} 1, \text{ калі } v_p \text{ з } v_q \text{ сумежныя,} \\ 0 \text{ у процілеглым выпадку.} \end{cases}$$

Матрыца Кірхгафа $I(G)$ — $n{\times}n$-матрыца, элемент якой K_{pq} вызначаецца роўнасцямі:

$$K_{pq} = \begin{cases} \deg v_p \text{ пры } p = q, \\ -1, \text{ калі } p \neq q \text{ і } v_p \text{ з } v_q \text{ сумежныя,} \\ 0, \text{ калі } p \neq q \text{ і } v_p \text{ з } v_q \text{ не сумежныя.} \end{cases}$$

Няхай канты Г. G таксама пранумараваныя: $EG = \{e_1, e_2,..., e_m\}$. Матрыца інцыдэнтнасці $I(G)$ — $n{\times}m$-матрыца, элемент якой вызначаецца роўнасцямі:

$$I_{pq} = \begin{cases} 1, \text{ калі вяршыня } v_p \text{ і канец } e_q \text{ інцыдэнтныя,} \\ 0 \text{ у процілеглым выпадку.} \end{cases}$$

Пры $a = v_1$, $b = v_2$, $c = v_3$, $d = v_4$, $e = v_5$, $ab = e_1$, $ac = e_2$, $bc = e_3$, $bd = e_4$, $cd = e_5$, $ed = e_6$ маем

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

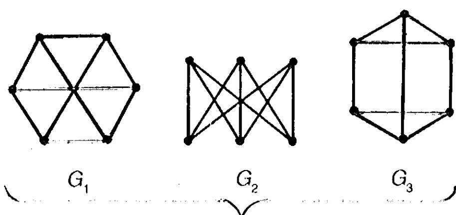
$$K(G) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$I(G) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

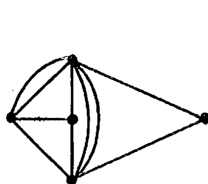
Маршрут у Г. — паслядоўнасць $v_1, e_1, v_2, e_2, ..., v_k, e_k, v_{k+1}$, у якой чаргуюцца вяршыні v_p і канты e_q, прычым $e_q = v_q v_{q+1}$, дзе $q = 1, 2, ..., k$, $v_1 = u$, $v_{k+1} = v$. Даўжыня маршруту — колькасць яго кантаў. Шлях — маршрут, у якім усе канты розныя. Просты шлях — шлях, у якім усе вяршыні, акрамя дзвюх крайніх, розныя. Просты шлях, крайнія вяршыні якога супадаюць ($v_1 = v_{k+1}$), — просты цыкл.

$G(V, E)$ — надграф Г. $H(V', E')$, калі $V \subseteq V'$, $E \subseteq E'$. Пры $V = V'$ надграф G каркасны. Надграф G вымушаны, калі E супадае з мноствам усіх кантаў з E', абодва канцы якіх належаць да V. Надграф G індукаваны падмноствам кантаў $X \subseteq E'$, калі $E = X$, а V — мноства канцоў кантаў з X. Можна разглядаць просты шлях (цыкл) як надграф. Калі Г. супадае са сваім простым шляхам (цыклам), то Г. таксама называецца простым шляхам (цыклам). Простыя цыклы парадку n і шлях з рознымі крайнімі вяршынямі абазначаюцца праз C_n і P_n адпаведна.

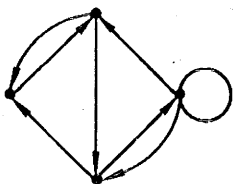
Ізамарфізм графаў G і H ёсць біекцыя мноства вяршыняў Г. G на мноства вяршыняў H,



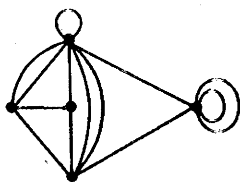
пры якой вобразы сумежных вяршыняў сумежныя, а несумежных — несумежныя. Калі ізамарфізм існуе, кажуць, што G і H ізаморфныя (маюць аднолькавую форму), і пішуць $G \cong H$ ($G_1 \cong G_2$, $G_1 \cong G_3$) (рыс. 2). Кожная з наступных умоў неабходная і дастатковая для таго, каб Г. G і H былі ізаморфныя: 1) A (G) і A (M) атрымліваюцца адна з адной як вынік аднолькавых перастаўленняў радкоў і слупкоў; 2) тое ж для K (G) і K (H); 3) I (G) і I (H) атрымліваюцца адна з адной як вынік перастаўленняў радкоў і слупкоў. Для практыкі гэтыя крытэры мала дастасоўныя. Эфектыўныя крытэры ізамарфізму адвольных графаў невядомыя.



Рыс. 3



Рыс. 4

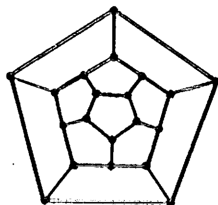


Рыс. 5

Непасрэднае абагульненне паняцця Г. — м у л ь т ы г р а ф. У ім дзве вяршыні могуць злучацца больш чым адным кантам (дазваляюцца кратныя канты) (рыс. 3). Наступнае абагульненне — п с е ў д а г р а ф палягае ў тым, што дазваляюцца петлі (канты, абодва канцы якіх супадаюць).

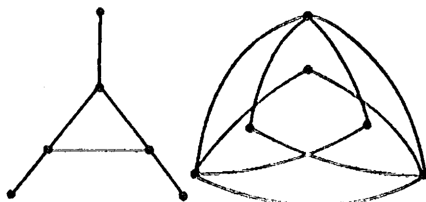
А р ы е н т а в а н ы Г. — упарадкаваная пара (V, A), дзе V — концае непустое мноства, A — пэўнае падмноства дэкартавага квадрата V^2. Элемент (u, v) мноства A — дуга, вяршыня u — пачатак дугі (u, v), v — канец дугі (рыс. 4, 5). Вывучаюцца таксама б я с к о н ц ы я Г. (мноства вяршыняў бясконцае). Для ўсіх відаў Г. адпаведна ўдакладняецца азначэнне ізамарфізму.

ГРАФ ГА́МІЛЬТАНАЎ — граф, што мае гамільтанаў цыкл, г.зн. просты цыкл, у які ўваходзіць кожная вяршыня графа. У.Гамільтан прапанаваў гульню "Падарожжа вакол свету" (1859). Кожнай з 20 вяршыняў *дадэкаэдра* прыпісаны назоў якога-небудзь горада свету. Патрабуецца наведаць кожны горад дакладна адзін раз і вярнуцца ў зыходны горад. Дазволена пераходзіць з аднаго горада ў іншы толькі па канце дадэкаэдра,



што злучае адпаведныя вяршыні. Задача зводзіцца да пошуку ў графе дадэкаэдра (гл. *Платона граф*) простага цыкла, які б праходзіў праз кожную вяршыню гэтага графа (гл. рыс.). Эфектыўныя крытэры гамільтанавасці адвольнага графа невядомыя, аднак ёсць дастатковыя прыкметы. Адна з іх належыць В.Хваталу (1972): няхай $d_1 \le d_2 \le \ldots \le d_n$ — ступеневая паслядоўнасць графа G, упарадкаваная па неспаданні; калі для кожнага k, што задавальняе няроўнасць $J \le k < \frac{n}{2}$, выконваецца $d_k > k$ ці $d_{n-k} \ge n-k$, то G гамільтанаў. Задача назнавання гамільтанавасці адвольнага графа NP-поўная.

ГРАФ ДАПАЎНЯ́ЛЬНЫ д а г р а ф а G — граф $\bar{G}$ з тым самым, што G, мноствам вяршыняў, кантамі якога ёсць тыя і толькі тыя двухэлементавыя мноствы вяршыняў, што не з'яўляюцца кантамі графа G (рыс.). Для кожнага графа G сама меней адзін з графаў G і $\bar{G}$ злучны, што дазваляе ў шэрагу выпадкаў мець справу толькі са злучнымі графамі замест адвольных.



ГРАФ ДАСКАНÁЛЫ — граф, для кожнага вымушанага падграфа якога шчыльнасць φ (*H*) і храматычны лік χ(*H*) супадаюць (гл. *Графа кліка, Графа каляроўка*). Паняцце вылучыў К.Бэрж (1960). Гл. *Графаў тэорыя.*

ГРАФ ДЗВЮХЧÁСТКАВЫ — граф, для мноства вяршынь якога існуе такі падзел на дзве часткі, што ў кожнай з іх няма сумежных вяршынь (б і п а д з е л). Адна з частак можа быць пустой. Граф дзвюхчасткавы, калі і толькі калі ў ім няма цыклаў няпарнай даўжыні.

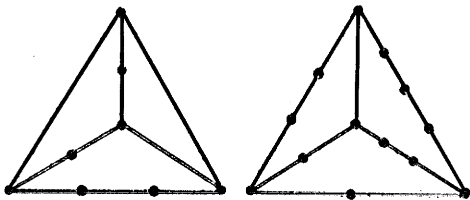
ГРАФ ЗЛЎЧНЫ — граф, у якім ёсць (*u*, *v*) — маршрут для адвольных вяршынь *u* і *v*, $u \neq v$ (гл. *Граф*). З л у ч н а я к а м п а н е н т а графа — яго максімальны злучны падграф.

ГРАФ *k*-ЗЛЎЧНЫ — такі граф, у якога лік злучнасці не меншы за *k*.

ГРАФ НАЗНÁЧАНЫ — граф з мноствам вяршынь {1, 2, ..., *n*}. Г.н. роўных парадкаў роўныя,

калі мноствы іх кантаў супадаюць. На рыс. $G = H$, $C \neq H$, аднак $G \cong F$ (гл. *Граф*). Колькасць розных парамі назначаных графаў парадку *n* роўная $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

ГРАФ ПЛАНÁРНЫ — граф, які можна ўкласці на плоскасць (гл. *Графа ўклад, Граф плоскі*). Два графы г а м е а м о р ф н ы я, калі іх можна атрымаць з аднаго і таго ж графа з дапамогай паслядоўнасці падзелаў кантаў (гл. рыс.). Т э а р э м а К у р а т о ў с к а г а (1930) дае неабходныя і дастатковыя ўмовы планарнасці графа: граф



планарны, калі і толькі калі ў ім няма падграфаў, гамеаморфных графам V_{v5} і V_{v33} (гл. *Граф поўны, Граф поўны дзвюхчасткавы*). Вядомыя і іншыя крытэры планарнасці. Задача назнавання планарнасці графа і пабудовы яго плоскага відарысу мае вялікае значэнне ў тэхніцы, у прыватнасці ў мікраэлектроніцы. Знойдзены алгарытм развязання гэтай задачы, складанасць якога з'яўляецца лінейнай функцыяй ад колькасці вяршынь і кантаў графа.

ГРÁФ ПЛÓСКІ — граф, вяршыні якога ёсць пункты плоскасці, а канты — непарыўныя лініі без самаперасячэнняў, што знаходзяцца ў той жа плоскасці. Пры гэтым ніякія два канты не маюць агульных пунктаў, акрамя інцыдэнтнай ім абодвум вяршыні. Максімальнае па ўлучэнні мноства пунктаў плоскасці, кожную пару якіх можна злучыць жарданавай крывой, што не перасякае канты графа, — г р а н ь Г.п. Для кожнага злучнага Г.п. праўдзіцца ф о р м у л а О й л е р а (1758) $n - m + f = 2$, дзе *m*, *n* і *f* — колькасць вяршынь, кантаў і граняў графа адпаведна.

ГРАФ ПÓЎНЫ — *граф*, кожныя дзве вяршыні якога злучаны кантам.

ГРАФ ПÓЎНЫ ДЗВЮХЧÁСТКАВЫ — дзвюхчасткавы граф, у якога кожныя дзве вяршыні, што належаць да розных частак, злучаны кантам. Г.п.дз., часткі якога маюць *p* і *q* вяршынь, абазначаецца сімвалам *Kpq*.

ГРАФ РЭГУЛЯ́РНЫ — граф, ступені ўсіх вяршынь якога роўныя. Ступень Г.р. — ступень яго вяршынь. Рэгулярны граф парадку *n* і ступені *d* існуе, калі і толькі калі задавальняюцца ўмовы: 1) $0 \leq d \leq n - 1$; 2) *dn* — парны лік.

ГРАФ САМАДАПАЎНЯ́ЛЬНЫ — граф *G*, ізаморфны свайму дапаўняльнаму графу $\bar{G}$.

ГРАФ УЗВÁЖАНЫ — граф *G*, кожнаму канту *l* якога прысвоены пэўны рэчаісны лік ω(*l*) (в а г а к а н т а). Для кожнага падграфа *H* (гл. *Граф*) графа *G* вага ω (*H*) роўная суме вагаў кантаў графа *H*. Звычайна, але не заўсёды, вагі ўсіх кантаў лічаць неадмоўнымі.

ГРÁФА АЎТАМАРФІ́ЗМ — ізамарфізм графа на сябе (гл. *Граф*). Мноства ўсіх аўтамарфізмаў графа *G* у дачыненні да множання нераўтварэнняў ёсць група, якую абазначаюць праз Aut *G*. Гэта група — мера сіметрыі графа. Граф ж о р с т к і, калі ў яго няма нятоесных аўтамарфізмаў. Жорсткасць — тыповая ўласцівасць графаў, але кожная конечная група ізаморфная групе аўтамарфізмаў якога-небудзь графа.

ГРÁФА ДАМІНÁНТАВАЕ МНÓСТВА в я р ш ы н я ў — такое падмноства *D* вяршынь графа, у якім для кожнай вяршыні графа, што не ўваходзіць у *D*, знойдзецца сумежная вяршыня.

ГРА́ФА КАЛЯРО́ЎКА в я р ш ы н е в а я — вольная функцыя f на мностве вяршыняў графа, о задавальняе ўмову: вобразы кожных дзвюх межных вяршыняў розныя. Вобраз $f(v)$ — к о- р вяршыні v. Каляроўка з'яўляецца l-каляўкай, калі колькасць розных колераў не больяза l. Можна трактаваць l-каляроўку як падзел $= V_1 \cup V_2 \cup ... \cup V_k$, $k \le l$, мноства V вяршыняў афа на сама болей l непустых незалежных надоостваў (гл. *Графа незалежнае мноства вяршыў*). Х р а м а т ы ч н ы л і к $\chi(G)$ — мінімальны l, пры якім існуе l-каляроўка графа G; м і н і- а л ь н а я к а л я р о ў к а — $\chi(G)$-каляроўка. ляроўка кантаў графа азначаецца аналагічна аляруюцца канты, а не вяршыні). Х р а м а т ы ч- ы і н д э к с $\chi'(G)$ — мінімальны лік l такі, што нуе l-каляроўка кантаў графа G. Задача мінільнай каляроўкі адвольнага графа NP-цяжкая, дачы назнавання "$\chi(G) = k$" і "$\chi'(G) = k$" пры вольных G і k NP-поўныя.

ГРА́ФА k-КАМПАНЕ́НТА — максімальны злучны падграф. Інакш кажучы, няхай F — падаф графа G, G — падграф графа H і F разам з G злучныя. Тады F ёсць k-кампанента графа H, лі і толькі калі $F = G$.

ГРА́ФА КЛІ́КА — надмноства вяршыняў афа, у якім кожныя дзве вяршыні сумежныя. аксімальная колькасць вяршыняў у кліках граа G — ш ч ы л ь н а с ц ь $f(G)$. Задача назнавання $f(G) = k$" пры адвольных G і k ёсць *NP-поўная дача.*

ГРА́ФА НЕЗАЛЕ́ЖНАЕ МНО́СТВА ВЯРШЫ́- НЯЎ — надмноства вяршыняў графа, сярод якіх няма сумежных. Максімальная колькасць вяршыняў у незалежных мноствах вяршыняў графа G — і к н е з а л е ж н а с ц і (G). Задача назнавання $\alpha_0(G) = k$" пры адвольных G і k NP-поўная. Часа выкарыстоўваецца ацэнка $\alpha_0(G) \ge \sum_v (1 + \deg v)$ гл. *Граф*), дзе v прабягае мноства ўсіх вяршыняў рафа G.

ГРА́ФА ПАРАСПАЛУЧЭ́ННЕ — надмноства кантаў графа, у якім няма сумежных кантаў. Максімальная колькасць кантаў у параспалучэннях графа G — л і к п а р а с п а л у ч э н н я $\alpha_1(G)$, для знаходжання якога існуюць эфектыўныя алгарытмы. Г. п. к а р к а с н а е, калі кожная вяршыня графа інцыдэнтная якому-небудзь канту гэтага параспалучэння.

ГРА́ФА СТУПЕ́НЕВАЯ ПАСЛЯДО́Ў- НАСЦЬ — спіс ступеняў вяршыняў графа. Паслядоўнасць d цэлых лікаў называюць г р а ф і ч- н а й, калі існуе граф — р э а л і з а ц ы я паслядоўнасці d, для якога d — ступеневая паслядоўнасць. Граф называюць у н і г р а ф а м, калі ўсе рэалізацыі яго ступеневай паслядоўнасці ізаморфныя. Няхай P — пэўная ўласцівасць графаў. Цэлалікавую паслядоўнасць называюць п а т э н- ц ы й н а P-г р а ф і ч н а й, калі існуе яе рэалізацыя з уласцівасцю P, і п р ы м у ш а н а-г р а ф і ч н а й, калі кожная яе рэалізацыя мае ўласцівасць P.

ГРА́ФА ЎКЛА́Д у п р а с т о р у L — вобраз графа G пры такім адлюстраванні вяршыняў і кантаў графа G адпаведна ў пункты і жарданавы крывыя прасторы L, што розным вяршыням адпавядаюць розныя пункты, несумежным кантам — неперасякальныя крывыя, сумежным кантам — крывыя, якія маюць толькі адзін агульны пункт, што адпавядае вяршыні, інцыдэнтнай гэтым кантам. Адвольны граф дазваляе такую ўкладку ў трохмерную прастору. Граф, які дазваляе такую ўкладку на плоскасць, называюць п л о с к і м.

ГРА́ФАЎ МЕТРЫ́ЧНЫЯ ХАРАКТАРЫ́С- ТЫКІ — функцыі, вызначаныя на мностве графаў і звязаныя з паняццем адлегласці. Няхай G — злучны граф, u і v — яго вяршыні. А д л е г л а с ц ь $d(u, v)$ ёсць мінімум даўжыняў (u, v)-шляхоў (гл. *Граф*). Выконваюцца звычайныя аксіёмы метрыкі: 1) $d(u, v) \ge 0$; 2) $d(u, v) = 0$, калі $u = v$; 3) $d(u, v) = d(v, u)$; 4) $d(u, v) + d(v, \omega) \ge d(u, \omega)$. Калі $e(u) = \max_v d(u, v)$, то $\max_u d(u, v)$ — д ы я м е т р $d(G)$, а $\min_v e(u)$ — р а д ы у с $r(G)$, u — ц э н т- р а л ь н а я в я р ш ы н я, калі $e(u) = r(G)$. Пры пераходзе да ўзважаных графаў даўжыні (u, v)-шляхоў у азначэнні адлегласці змяняюцца вагамі гэтых шляхоў.

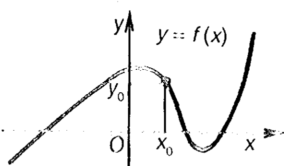
ГРА́ФАЎ ТЫПО́ВАЯ ЎЛАСЦІ́ВАСЦЬ — уласцівасць P, якую маюць амаль усе графы. Значыць, калі $e(n)$ — лік назначаных графаў парадку $n \left| e(n) = \dfrac{n(n-1)}{2} \right|$, а $e(n, P)$ — колькасць назначаных графаў парадку n з уласцівасцю P, то $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{e(n,p)}{e(n)} = 1$.

ГРА́ФАЎ ТЭО́РЫЯ — частка матэматычнага апарату *кібернетыкі*. Узнікла ў 1736 г., калі Л.Ойлер не толькі развязаў галаваломку пра кёнігсбергскія масты (гл. *Задача пра каралявецкія (кёнігсбергскія) масты*), але і знайшоў крытэр існавання ў графе ойлерава цыкла. Гэты крытэр больш за

100 гадоў заставаўся адзінай тээрэмай Г.т. Толькі ў сярэдзіне 19 ст. Г.Кірхгаф распрацаваў тэорыю *дрэва*, а А.Кэлі ў сувязі з апісаннем будовы вуглевадародаў развязаў пералічаныя задачы для некаторых тыпаў дрэў. У той жа перыяд з'явілася *чатырох колераў гіпотэза*, даказаная ў 1976 г. Адзін з найважнейшых класічных вынікаў — даказаная ў канцы 1920-х гг. тэарэма Куратоўскага, што характарызуе планарныя графы. Першая кніга па Г.т. — манаграфія Д.Кёніга (1936), дзе ўпершыню ўжыты тэрмін "граф". Росквіт Г.т. пачаўся ў 1940-х гг. у сувязі з бурным развіццём дастасоўнай матэматыкі. З'явіліся новыя метады і новыя фармулёўкі задач. Такія задачы ўзнікаюць у хіміі і біялогіі, у тэорыі схемаў кіравання і тэорыі інтэгральных схемаў, пры даследаванні аўтаматаў, лагічных схемаў, блок-схемаў праграм, у тэорыі імавернасцяў, статыстыцы і эканоміцы, у тэорыі раскладаў і дыскрэтнай аптымізацыі. У выглядзе графаў інтэрпрэтуюцца схемы дарог і электрычныя ланцугі, геаграфічныя карты і малекулы хімічных злучэнняў, сувязі паміж людзьмі і групамі людзей. Паўстае шмат задач, што патрабуюць распрацоўкі алгарытмаў. Пры гэтым укараненне вылічальнай тэхнікі вымагае такіх алгарытмаў, якія дазвалялі б практычную рэалізацыю з дапамогай сучасных камп'ютараў, г.зн. эфектыўных алгарытмаў. Адна з такіх задач — *задача пра мінімальны каркас*, іншыя датычаць *плыняў* у сетках (*транспартная задача*). Шэраг задач зводзіцца да знаходжання парасплучэнняў у *графе ўзважаным* (*задача пра вяселлі* і *задача пра прызначэнні*), цэнтральных вяршыняў (мінімаксная задача размяшчэння, у якой патрабуецца размясціць пункты абслугоўвання пры ўмове аптымізацыі горшага выпадку). Для развязання названых задач распрацаваны эфектыўныя алгарытмы. Аднак большую частку алгарытмічных задач займаюць задачы надзвычай складаныя. Эфектыўныя алгарытмы для іх развязання не знойдзеныя і хутчэй за ўсё не існуюць. Гэта, напрыклад, задачы, што маюць дачыненне да *графаў гамільтанавых* (задача комівояжора), клікаў, незалежных мностваў вяршыняў, каляровак. Такія задачы развязваюць набліжана з дапамогай эўрыстычных алгарытмаў. Адметнае месца ў Г.т. займае праблема ізамарфізму графаў (гл. *Граф*), да якой зводзіцца назнаванне ізамарфізму адвольных алгебраічных сістэм. Эфектыўныя алгарытмы назнавання ізамарфізму распрацаваныя толькі для асобных класаў графаў (напрыклад, для графаў, ступені ўсіх вяршыняў якіх абмежаваныя канстантай). З другога боку, агульная праблема распазнавання ізамарфізму зведзена да аналагічнай праблемы для графаў з загаданымі ўласцівасцямі (*граф дзвюхчасткавы*, *граф рэгулярны*, *граф самадапаўняльны*). Важная частка Г.т. — тэорыя ступеневых паслядоўнасцяў. Вывучаюцца ўмовы патэнцыйнай і прымушанай P-графічнасці для загаданых уласцівасцяў P. Крытэр патэнцыйнай (прымушанай) P-графічнасці — неабходная (дастатковая) умова для наяўнасці ў графа ўласцівасці P, прычым гэтая ўмова найбольш агульная з тых, што выражаюцца ў тэрмінах ступеняў вяршынь. Асаблівую ўвагу ў Г.т. прыцягвае *рэканструявальнасці гіпотэза*, якую больш за 50 гадоў не ўдаецца ні даказаць, ні абвергнуць. Гіпотэза пацверджана для спецыяльных класаў графаў, разглядаюцца яе розныя версіі. Адны з важнейшых — даследаванні, звязаныя з каляроўкамі. Даказана гіпотэза чатырох колераў. Атрымана дасканалая ацэнка храматычнага індэкса (В.Візінг, 1964): $\Delta(G) \le \chi'(G) \le \Delta(G)+1$, дзе $\Delta(G)$ — максімум ступеняў вяршынь графа G. У цэлым даследаванні, прысвечаныя каляроўкам і, у прыватнасці, *графам дасканалым*, у значнай меры акрэсліваюць сучасны стан Г.т.

Даследаванні беларускай школы Г.т. маюць дачыненне да шырокага кола праблем (дэкампазіцыя графаў, ступеневыя паслядоўнасці, гіпотэза рэканструявальнасці, матроідныя метады, незалежныя і дамінантавыя мноствы вяршыняў, клікі, група аўтамарфізмаў, *гіперграфаў рэалізацыі*). Створана тэорыя дэкампазіцыі, якая дазваляе развязваць класіфікацыйныя праблемы (Р.Тышкевіч). У прыватнасці, развязана праблема характарызацыі уніграфаў, што заставалася нявысветленай больш за 30 гадоў. Атрыманы значныя вынікі ў тэорыі ступеневых паслядоўнасцяў. Дасягнуты прыкметны поспех у даследаванні гіпотэзы рэканструявальнасці.

ГРА́ФІК ФУ́НКЦЫІ — мноства пунктаў плоскасці з прамавугольнымі каардынатамі (x, y), дзе $y=f(x)$, $x \in E$, E — абсяг вызначэння дадзенай функцыі, $y=f(x)$ — рэчаісная функцыя адной рэчаіснай зменнай x (рыс.). Каб пабудаваць Г.ф., трэба вызначыць мноства пунктаў, каардынаты якіх (x, y) звязаныя дачыненнем $y=f(x)$, $x \in E$. Дакладнае будаванне Г.ф. немагчымае, бо геаметрычнае выяўленне пунктаў, адрэзкаў, крывых і інш. можна зрабіць толькі набліжана. Таму рысунак Г.ф. з'яўляецца эскізам графіка, аднак, калі крывая мае дастатковую дакладнасць, яна таксама называецца Г.ф. Для пабудовы Г.ф. $y=f(x)$, зададзе-



най аналітычна (формулай), вывучаюцца і знаходзяцца: 1) абсяг вызначэння функцыі (тыя значэнні x, пры якіх выконваюцца ўсе аперацыі формулы); 2) інтэрвалы, на якіх функцыя непарыўная, мае першую і другую вытворныя; 3) інтэрвалы знакасталасці функцыі; 4) інтэрвалы манатоннасці функцыі, інтэрвалы выпукласці ці ўвагнутасці, пункты экстрэмуму і перагіну; 5) наводзіны функцыі пры імкненні аргумента да межавых пунктаў абсягу вызначэння; у прыватнасці, знаходзяцца ліміты функцыі і асімптоты (калі існуюць); 6) значэнні функцыі ў пунктах экстрэмуму, перагіну і некалькі пунктаў у залежнасці ад патрэбнай дакладнасці набудовы Г.ф. Затым будуецца Г.ф., які праходзіць праз знойдзеныя пункты.

ГРАФІЧНЫЯ ВЫЛІЧЭННІ — метады атрымання лікавых развязкаў розных задач з дапамогай графічных будаванняў. Уяўляюць сабою сістэму будавання адпаведнай аналітычнай аперацыі (множанне, развязанне раўнанняў, інтэграванне і г.д.) з вядомым набліжэннем. Пры Г.в. выкарыстоўваюцца графікі функцый. Вартасць Г.в. — прастасць выказвання і наглядднасць, недахоп — малая дакладнасць. Знаходзяць дастасаванне ў матэматыцы, інжынернай практыцы.

ГРУБАЯ ПАМЫЛКА — памылка, якая ўзнікла ад няправільных вылічэнняў, запісаў звестак вымяральных прылад і г. д.

ГРУПА — непустое мноства G, на якім вызначана *бінарная аперацыя* (алгебраічная), што задавальняе наступныя аксіёмы (калі аперацыю запісваюць як множанне): 1) аперацыя асацыятыўная, г.зн. $(ab)c = a(bc)$ для ўсіх элементаў $a, b, c \in G$; 2) у G існуе такі элемент e (які называецца а д з і н к а й), што $ae = ea = a$ для кожнага элемента $a \in G$; 3) для адвольнага элемента $a \in G$ існуе такі элемент $b \in G$ (называецца а д в а р о т н ы м да a), што $ab = ba = e$. З азначэння вынікае, што адзінка ў Г. толькі адна, для адвольнага элемента $a \in G$ адзіны адваротны элемент (ён абазначаецца a^{-1}), і для кожных элементаў $a, b \in G$ раўнанні $ax = b$ і $ya = b$ маюць адзіны развязак $x = a^{-1}b$ і $y = ba^{-1}$ адпаведна. Г. называецца к о н ц а й групай, калі колькасць элементаў у ёй концая. П а р а д к а м концай Г. называецца колькасць элементаў у Г.

Прыклады Г.: 1) мноства Z усіх цэлых лікаў з аперацыяй складання Г. Ролю e адыгрывае 0, а ролю адваротнага да z элемента — процілеглы лік $-z$. Г. з аперацыяй складання з'яўляюцца таксама мноствы ўсіх цотных лікаў, усіх рацыянальных лікаў, усіх камплексных лікаў. Мноствы ўсіх ненулявых рацыянальных, усіх ненулявых рэчаісных, усіх ненулявых камплексных лікаў — Г. з аперацыяй множання; 2) кожнай фігуры эўклідавай плоскасці можна паставіць у адпаведнасць сукупнасць усіх рухаў плоскасці, што сумяшчаюць фігуру з ёю самой (такія рухі называюцца с і м е т р ы я м і фігуры). Усе сіметрыі фігуры складаюць Г. у дачыненні да аперацыі кампазіцыі пераўтварэнняў. Яна характарызуе сіметрычнасць фігуры: чым большая Г. сіметрый, тым большая сіметрычная фігура.

П а д г р у п а й Г. G называецца непустое падмноства мноства G, якое само з'яўляецца Г. у дачыненні да аперацыі, вызначанай у G. Для падмноства $S \subseteq G$ перасячэнне ўсіх падгрупаў групы G, якія маюць у сабе S, ёсць падгрупа Г. G, якая абазначаецца (S) і называецца п а д г р у п а й, с п а р о д ж а н а й S; мноства S называецца с і с т э м а й у т в а р а л ь н ы х падгрупы (S). Падгрупа (S) супадае з мноствам элементаў выгляду $\{a_1a_2...a_k | a_i \in S$ або $a_i^{-1} \in S,\ k = 1,2,3,...\}$. Падгрупа, спароджаная адным элементам, называецца ц ы к л і ч н а й п а д г р у п а й.

Адлюстраванне $\varphi: G \to G_1$ называецца г о м а м а р ф і з м а м Г. G у групу G_1, калі $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ для кожных элементаў $a, b \in G$. Біектыўны гомамарфізм называецца і з а м а р ф і з м а м. Гомамарфізм G у сябе называецца э н д а м а р ф і з м а м Г. G, а ізамарфізм G у сябе — а ў т а м а р ф і з м а м Г. G. Мноства ўсіх аўтамарфізмаў Г. G у дачыненні да аперацыі кампазіцыі з'яўляецца Г., якая абазначаецца Aut$G$ і называецца г р у п а й а ў т а м а р ф і з м а ў Г. G. Падгрупа H групы G называецца х а р а к т а р ы с т ы ч н а й, калі яна інварыянтная ў дачыненні да ўсіх аўтамарфізмаў Г. G, г.зн. $\varphi(H) \subseteq H$ для кожнага $\varphi \in$ Aut G. Падгрупа H групы G называецца ц а л к а м х а р а к т а р ы с т ы ч н а й, калі яна інварыянтная да кожнага эндамарфізму Г. G. Мноства ўсіх элементаў $z \in G$, што камутуюць з кожным элементам групы G, г.зн. $zg = gz$ для кожнага $g \in G$, з'ўляецца характарыстычнай падгрупай у G, якая называецца ц э н т р а м Г. G. Падгрупа Г. G, спароджаная ўсімі камутатарамі, г.зн. элементамі $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$, ёсць цалкам характарыстычная падгрупа ў G — *камутант* групы G, які абазначаецца G' або $[G, G]$.

ГРЫ́НА ФО́РМУЛЫ — формулы інтэгральнага злічэння, якія звязваюць паміж сабою інтэгралы розных тыпаў. Найпрасцейшая звязвае падвойны інтэграл па абсягу G з крывалінейным інтэгралам па мяжы абсягу G, яна мае выгляд

$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_\Gamma (Pdx + Qdy).$$

Пры даследаваннях па тэорыі патэнцыялу (1828) Дж.Грын вывеў формулы:

$$\iiint_G \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right) dxdydz =$$

$$= \iint_S v\frac{\partial u}{\partial n} d\sigma - \iiint_G v\Delta u dxdydz$$

(п е р ш а я Г.ф.);

$$\iiint_G (u\Delta v - v\Delta u) dxdydz = \iint_S \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma$$

(д р у г а я Г.ф.), дзе G — абсяг трохмернай прасторы, паверхня S — мяжа гэтага абсягу,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

(аналагічна Δv) — аператар Лапласа; $\frac{\partial u}{\partial n}, \frac{\partial v}{\partial n}$ — вытворныя ў кірунку вонкавай нармалі да S.

ГРЫ́НА ФУ́НКЦЫЯ — функцыя, звязаная з інтэгральным выяўленнем развязкаў краявых задач для дыферэнцыяльных раўнанняў. Упершыню разгледзеў прыватны выпадак функцыі Дж. Грын (1828) у даследаванні з тэорыі патэнцыялу. Г.ф. краявой задачы для лінейнага дыферэнцыяльнага раўнання ёсць фундаментальны развязак раўнання, які адпавядае аднародным краявым умовам. Г.ф. — ядро інтэгральнага аператара, адваротнага ў дачыненні да дыферэнцыяльнага аператара, утворанага дадзеным дыферэнцыяльным раўнаннем і аднароднымі краявымі ўмовамі. З дапамогай Г.ф. можна знайсці развязкі неаднароднага раўнання, адпаведныя аднародным краявым умовам. Знаходжанне Г.ф. прыводзіць даследаванне ўласцівасцяў дыферэнцыяльнага аператара да вывучэння аналагічных уласцівасцяў інтэгральнага аператара. Г.ф. адыгрывае важную ролю ў квантавай тэорыі поля і статыстычнай фізіцы. Г.ф. апісвае распаўсюджванне палёў ад крыніц, якія стварылі гэтыя палі.

ГРЭ́ГАРЫ ФО́РМУЛА — формула вылічэння вызначаных інтэгралаў; мае выгляд

$$\frac{1}{h}\int_a^{a+nh} f(x)dx = \frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} +$$

$$+ \frac{1}{2}y_n + A_2(\Delta^1 y_{n-1} - \Delta^1 y_0) - A_3(\Delta^2 y_{n-2} - \Delta^2 y_0) +$$

$$+ A_4(\Delta^3 y_{n-3} - \Delta^3 y_0) - A_5(\Delta^4 y_{n-4} - \Delta^4 y_0) + \ldots + R,$$

дзе $y_j = f(a + jh)$, $\Delta^l y_j$ — рознасці функцыі y парадку l у пунктах $a + jh$ ($j = 0, 1, \ldots, h$),

$$A_k = \int_0^1 t(t-1)\ldots(t-k+1)(k!)^{-1}dt$$

($k = 2, 3, \ldots$). Г.ф. атрымліваецца пры інтэграванні інтэрпаляцыйнага мнагасkладу з вузламі ў пунктах $a + jh$.

ГУЛЁЦ — удзельнік *гульні* (рэальная або абстрактная асоба), які дзейнічае ў гульні і зацікаўлены ў ёй. Гл. *Гульняў тэорыя.*

ГУЛЬНЯ́ — фармальнае ўяўленне пра канфлікт і адпаведнае яму паняцце антымальнасці; паняцце з *гульняў тэорыі.* Для розных раздзелаў тэорыі гульняў існуюць розныя матэматычныя апісанні паняцця Г. Для дакладнага апісання той ці іншай Г. трэба пералічыць яе ўдзельнікаў (*гульцоў*), магчымыя зыходы Г., а таксама тых, хто зацікаўлены ў розных зыходах Г. Тыповай (базавай) Г. з'яўляецца гэтак званая б е с к а а л і ц ы й н а я Г. з выйгрышам. Яна характарызуецца мноствам сваіх удзельнікаў $J = \{1,\ldots\}$, сям'ёй мностваў стратэгій $\{x_j\}_{j\in J}$ і мноствам функцый выйгрышу $\{H_j\}_{j\in J}$, зададзеных на мностве ўсіх сітуацый $X = \prod_{j\in J} X_j$.

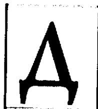
Бескааліцыйная Г. зводзіцца да адвольнага выбару кожным з гульцоў сваёй стратэгіі $x_j \in X_j$ з наступным атрыманнем выйгрышу $H_j(x_1,\ldots)$.

ГУЛЬНЯ́ ДЗВЮХ АСО́БАЎ з н у л я в о й с у м а й — тое, што *антаганістычная гульня.*

ГУ́ЛЬНЯЎ ТЭО́РЫЯ — тэорыя, з дапамогай якой фармалізуюцца задачы выяўлення антымальных рашэнняў ва ўмовах канфлікту. Матэматычнае апісанне *гульні*, як правіла, улучае мноства ўдзельнікаў гульні з рознымі зацікаўленасцямі і мноства стратэгій гульцоў. Процілегласць зацікаўленасці гульцоў задае структуру канфлікту ў гульні. Змястоўная прырода канфлікту можа быць вельмі разнастайная — эканамічная, сацыяльная, юрыдычная і г.д., а таксама мець гульнёвы змест ва ўласным сэнсе гэтага слова (спар-

тыўныя спаборніцтвы і гульні, салонныя гульні і інш.). Гульцы, як правіла, хаваюць свае намеры, таму для даследавання шэрагу гульняў надыходзяць метады тэорыі выяўлення антымальных намераў. Гэта дазваляе распрацоўваць матэматычныя мадэлі для прыняцця тых або іншых рашэнняў ва ўмовах нявызначанасці (недакладнасці). У залежнасці ад структуры мностваў гульцоў і мэтаў стратэгіі гульні ў Г.т. падзяляюць на класы. Найбольш пашыраныя: *гульня дзвюх асобаў, антаганістычная гульня, кааператыўная гульня, дынамічная гульня, дыферэнцыяльныя гульні, матрычная гульня, пазіцыйная гульня.* У сучаснай Г.т. базавай гульнёй лічаць бескааліцыйную гульню з выйгрышам, якая ў змястоўным сэнсе зводзіцца да адвольнага выбару кожным гульцом нейкай стратэгіі з наслядоўным атрыманнем выйгрышу.

ГУРСА ЗАДАЧА — задача пра даследаванне развязку гіпербалічнага раўнання другога парадку з дзвюма незалежнымі зменнымі па зададзеных яго значэннях на дзвюх характарыстычных крывых, якія выходзяць з аднаго пункта. Упершыню і падрабязна гэтую задачу разглядаў Э.Гурса (1902—07).



ДАВЯРАЛЬНАЕ АЦЭНЬВАННЕ — метад *матэматычнай статыстыкі,* які прызначаецца для знаходжання мноства набліжаных значэнняў невядомых параметраў імавернасных размеркаванняў.

Няхай x — выпадковы вектар, які прымае значэнні на мностве X у эўклідавай прасторы; размеркаванне імавернасцяў гэтага вектара належыць сям'і размеркаванняў, зададзенай шчыльнасцямі $\rho(x|\theta)$, $x\in X$, $\theta\in H$ у дачыненні да нейкай меры $\mu(x)$; мяркуецца, што сапраўднае значэнне θ, адпаведнае назіранню x, невядомае. Сутнасць Д.а. зводзіцца да знаходжання такога мноства $C(x)$, залежнага ад x, якое змяшчае значэнне зададзенай функцыі $u(\theta)$, адпаведнае невядомаму сапраўднаму значэнню параметра θ.

Няхай U — мноства значэнняў функцыі $u(\theta)$, $\theta\in H$, і няхай $C(x)$, $x\in X$, — якая-небудзь сукупнасць мностваў, што належаць U для ўсіх x з X. Дапускаецца, што для кожнага элемента $u\in U$ і ўсякага значэння $\theta\in H$ вызначана імавернасць падзеі $\{u\in C(x)\}$. Гэтая імавернасць падаецца інтэгралам $P_C(u,\theta)=\int_{u\in C(x)} P(x|\theta)d\mu(x)$; $u\in U$, $\theta\in H$ і называецца **імавернасцю накрыцця мноствам** $C(x)$ значэння $u(\theta)$ пры зададзеным θ.

Калі сапраўднае значэнне θ невядомае, то мноства $C(x)$ (з сукупнасці мностваў $C(x)$, $x\in X$), якое адпавядае выніку назіранняў x, называецца **даверальным мноствам** або **інтэрвальнай ацэнкай** (*даверальным інтэрвалам*) для невядомага сапраўднага значэння функцыі $u(\theta)$. Характарыстыка інтэрвальнай ацэнкі $C(x)$ — **даверальная імавернасць** $P_C(\theta)=P_C(u(\theta),\theta)$, $\theta\in H$. Звычайна $P_C(\theta)$ залежыць ад невядомага параметра θ, і таму на практыцы якасць ацэнкі характарызуюць даверальным каэфіцыентам $P_C=\inf_{\theta\in H} P_C(\theta)$. Часам P_C называюць **даверальным узроўнем**.

ДАВЯРАЛЬНЫ ІНТЭРВАЛ — інтэрвал, у якім з зададзенай імавернасцю знаходзіцца невядомы параметр размеркавання. Гл. *Давяральнае ацэньванне.*

ДАДАТНА ВЫЗНАЧАНАЯ КВАДРАТОВАЯ ФОРМА — *квадратовая форма* выгляду

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j,\ a_{ij}=a_{ji} \qquad (1)$$

з рэчаіснымі каэфіцыентамі, якая прымае толькі дадатныя значэнні пры ўсіх рэчаісных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ і абнуляецца толькі пры $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$. Кожную Д.в.к.ф. з дапамогай лінейных пераўтварэнняў можна прывесці да выгляду $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2$. Існуе канструктыўная ўмова Д.в.к.ф. (**крытэр Сільвестра**): форма (1) ёсць Д.в.к.ф., калі і толькі калі $\Lambda_1>0$, $\Lambda_2>0, \ldots, \Lambda_n>0$, дзе

$$\Lambda_k=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix}.$$

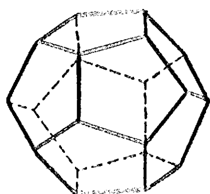
ДАДАТНА ВЫЗНАЧАНАЯ ЭРМІТАВА МАТРЫЦА — эрмітава матрыца $a_{ik}=\bar{a}_{ki}$, усе *галоўныя міноры* якой дадатныя. Матрыца ёсць Д.в.э.м., калі ўсе яе ўласныя значэнні дадатныя.

ДАДАТНЫ АПЕРАТАР — лінейны сіметрычны аператар A у гільбэртавай прасторы, для якога квадратовая форма (Ax, x) неадмоўная. Самаспа-

лучаны аператар A ёсць Д.а., калі і толькі калі праўдзіцца адна з наступных раўназначных умоў: 1) $A = B^2$, дзе B — самаспалучаны аператар; 2) A мае дадатны спектр.

ДАДАТНЫ ЛІК — рэчаісны лік a, большы за нуль ($a > 0$). Пункты, якія адпавядаюць Д.л. на лікавай восі, знаходзяцца справа ад пачатку адліку — пункта 0.

ДАДЭКАЭДР (ад грэч. dodeka — дванаццаць + hedra — аснова, грань) — адзін з 5 тыпаў *правільных мнагаграннікаў* (гл. рыс.). Мае 12 пяцівугольных граняў, 30 кантаў, 20 вяршынь (у кожнай вяршыні сустракаюцца тры канты). Калі a — даўжыня канта Д., то яго аб'ём



$$V = 1/4a^3(15 + 7\sqrt{5}) \approx 7{,}6631a^3.$$

Упершыню Д. набудаваў Тэатэт (4 ст. да н.э.).

ДАКЛАДНАЯ ВЕРХНЯЯ І НІЖНЯЯ МЕЖЫ — характарыстыкі мностваў рэчаісных лікаў. Д а к л а д н а й в е р х н я й м я ж о й м н о с т в а X рэчаісных лікаў называецца найменшая з *верхніх межаў* гэтага мноства, якая абазначаецца $\sup X$ (ад лац. supremum — найвышэйшы). Калі $b = \sup X$, то для кожнага ліку $x \in X$ праўдзіцца няроўнасць $x \le b$ (г.зн. b — верхняя мяжа мноства X) і для ўсякага $b' < b$ існуе такі $x' \in X$, што $x' > b'$ (г.зн. b ёсць найменшая з верхніх межаў). Д а к л а д н а й н і ж н я й м я ж о й м н о с т в а X рэчаісных лікаў называецца найбольшая з *ніжніх межаў* гэтага мноства, якая абазначаецца $\inf X$ (ад лац. infimum — найніжэйшы). Калі $a = \inf X$, то для кожнага ліку $x \in X$ праўдзіцца няроўнасць $x \ge a$ (г.зн. a — ніжняя мяжа мноства X) і для ўсякага $a' \ge a$ існуе такі $x' \in X$, што $x' < a'$ (г.зн. a ёсць найбольшая з ніжніх межаў). Д.в. і н.м. неабмежаванага зверху (знізу) мноства называецца сімвал $+\infty$ ($-\infty$). Акрамя таго, лічыцца, што $\sup\varnothing = -\infty$, $\inf\varnothing = +\infty$. Д.в. і н.м. функцыі, што набывае рэчаісныя значэнні, у прыватнасці паслядоўнасці рэчаісных лікаў, называецца Д.в. і н.м. мноства яе значэнняў. К.Вейерштрас высветліў важнасць паняццяў Д.в. і н.м. для асноў матэматычнага аналізу.

Д'АЛЯМБЭРА—ЭЙЛЕРА ЎМОВЫ — тое, што *Кашы—Рымана ўмовы.*

Д'АЛЯМБЭРА ПРЫКМЕТА з б е ж н а с ц і л і к а в ы х ш э р а г а ў — дастатковая ўмова збежнасці: дадатны лікавы шэраг $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n > 0$) збягаецца, калі $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, і разбягаецца, калі, пачынаючы з нейкага n, выконваецца $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$. Існуюць як збежныя, так і разбежныя шэрагі, для якіх

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} \le 1 \le \overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Напрыклад, шэраг $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ збягаецца, а гарманічны шэраг $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$ разбягаецца, але для абодвух

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$$

Д'АЛЯМБЭРА РАЎНАННЕ — дыферэнцыяльнае раўнанне выгляду

$$y = x\varphi(y') + f(y'), \qquad (1)$$

дзе φ і f — дыферэнцавальныя функцыі. Упершыню даследаваў Ж.Д'Алямбэр (1748). З дапамогай замены $y' = p$, дзе p — параметр, Д.р. (1) зводзіцца да лінейнага раўнання

$$\frac{dx}{dp} + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p}x = -\frac{f'(p)}{p - \varphi(p)}.$$

Знаходзячы адсюль x і падстаўляючы ў (1), можна знайсці агульны развязак Д.р. у параметрычнай форме

$$\begin{cases} x = A(p)C + B(p) \\ y = A_1(p)C + B_1(p) \end{cases}.$$

Калі раўнанне $\varphi(p) - p = 0$ мае рэчаісныя карані $p = p_i$, $i = \overline{1, n}$, то простыя лініі $y = p_i x + f(p_i)$ могуць быць асаблівымі развязкамі Д.р. Вядомае таксама пад назовам *Лягранжа раўнанне.*

ДАПАЎНЕННЕ — аперацыя, якая ставіць у адпаведнасць падмноству M, $M \subseteq X$, іншае падмноства $N \subseteq X$ так, што калі вядомыя M і N, то тым або іншым спосабам можна аднавіць мноства X. У агульнай тэорыі мностваў Д. п а д м н о с т в а

(або д а п а ў н я л ь н ы м п а д м н о с т в а м) да мноства X называецца падмноства $X\setminus M$ (абазначэнне $C_X M$, або CM, або $\bar{M}$), якое складаецца з усіх элементаў $x\in X$, што не належаць M: $M\bigcup\bar{M}=X$.

ДАРБУ́ СУ́МЫ — сумы спецыяльнага выгляду, што выкарыстоўваюцца для азначэння вызначаных інтэгралаў. Няхай рэчаісная функцыя $f(x)$ вызначана і абмежаваная на адрэзку $[a, b]$, які падзелены пунктамі

$$T=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\},\ a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$$

на адрэзкі

$$\Delta x_i=x_{i+1}-x_i;\ m_i=\inf_{[x_i,x_{i+1}]}f(x),\ \ M_i=\sup_{[x_i,x_{i+1}]}f(x).$$

Н і ж н я й і в е р х н я й Д.с. называюцца адпаведна сумы

$$s(f,T)=\sum_{i=0}^{n-1}m_i\Delta x_i;\ S(f,T)=\sum_{i=0}^{n-1}M_i\Delta x_i.$$

Для ўсякіх двух падзелаў T і T' адрэзка $[a, b]$ праўдзіцца няроўнасць $s(f,T')\le S(f,T)$. Калі

$$\sigma(f,\xi,T)=\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i,\ \xi_i\in[x_i,x_{i+1}]$$

— інтэгральная сума, то

$$s(f,T)\le\sigma(f,\xi,T)\le S(f,T).$$

Н і ж н і м і в е р х н і м і н т э г р а л а м і Дарбу называюць адпаведна велічыні

$$J_1=\sup_T s(f,T),\ J_2=\inf_T S(f,T).$$

Умова $J_1=J_2$ неабходная і дастатковая для таго, каб функцыя $f(x)$ была інтэгравальнай паводле Рымана на $[a, b]$ (гл. *Інтэграл*); яна раўназначная ўмове

$$\lim_{\lambda(T)\to0}(S(f,T)-s(f,T))=0,$$

дзе $\lambda(T)=\max_i\Delta x_i$ — параметр падзелу. Паняцце Д.с. відавочным чынам распаўсюджваецца на выпадак функцыі многіх зменных, вызначаных і абмежаваных на мноствах, вымерных у сэнсе якой-небудзь дадатнай меры.

ДАСКАНА́ЛАЕ МНО́СТВА — замкнёнае мноства, якое не мае ізаляваных пунктаў (г.зн. тоеснае мноству сваіх лімітавых пунктаў). Існуюць нідзе не шчыльныя Д.м., напрыклад *Кантара мноства*. У эўклідавай прасторы Д.м. абавязкова мае *магутнасць кантынууму*.

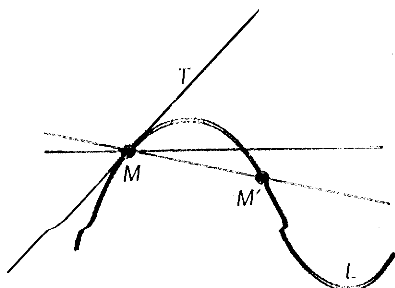
ДАСКАНА́ЛЫ ЛІК — цэлы дадатны лік, роўны суме ўсіх сваіх правільных (г.зн. меншых за гэты лік) дзельнікаў. Яшчэ Эўклід (3 ст. да н.э.) выявіў, што цотны Д.л. n можна атрымаць з формулы $n=2^{p-1}(2^p-1)$ пры ўмове, што p і 2^p-1 — простыя лікі. Д.л. $6=1+2+3$ ($p=2$); $28=1+2+4+7+14$ ($p=3$); 496 ($p=5$); 8128 ($p=7$) і інш. Знойдзена (на 2001) 27 цотных Д.л. Дагэтуль невядома ніводнага няцотнага Д.л. і пытанне пра іх існаванне застаецца адкрытым; вядома толькі, што няцотных Д.л. няма ў інтэрвале ад 1 да 10^{50}.

ДАСТАТКО́ВАЯ СТАТЫ́СТЫКА — сукупнасць такіх функцый ад вынікаў назіранняў (статыстык), якія змяшчаюць тую ж інфармацыю пра размеркаванне імавернасцяў, што і самі вынікі назіранняў. Статыстыка T для сям'і размеркаванняў $\{P_\theta,\theta\in H\}$ або для параметра θ будзе дастатковая, калі ўмоўнае размеркаванне кожнай іншай статыстыкі Y (пры ўмове, што $T=t$) не залежыць ад θ. Веданне Д.с. дае вычарпальны матэрыял для статыстычных высноваў пра параметр θ.

На практыцы для пошуку Д.с. выкарыстоўваюць наступны к р ы т э р ф а к т а р ы з а ц ы і. Няхай сям'я размеркаванняў $\{P_\theta,\theta\in H\}$ азначаецца шчыльнасцямі $\{P(x|\theta),\theta\in H\}$. Статыстыка T дастатковая для сям'і $\{P_\theta,\theta\in H\}$, калі і толькі калі $P(x|\theta)=g(x)h(T,\theta)$, дзе x — *выбарка* з размеркавання са шчыльнасцю $P(x|\theta)$, а $g(x)$ і $h(T,\theta)$ — неадмоўныя функцыі.

ДАСТАТКО́ВЫЯ ЎМО́ВЫ — умовы, пры выкананні якіх сцверджанне абавязкова будзе праўдзіцца. Гл. *Неабходная і дастатковая ўмовы.*

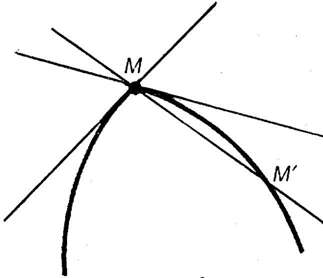
ДАТЫ́ЧНАЯ — простая, якая ўяўляе сабою лімітавае становішча сечнай. Няхай M — пункт крывой L (рыс. 1), на якой выбіраецца пункт і



Рыс. 1

праводзіцца простая MM'. Пункт M лічыцца нерухомым, пункт M' набліжаецца да M па крывой L. Калі пры неабмежаваным набліжэнні M' да M простая MM' імкнецца да вызначанай простай MT, то MT называецца Д. да крывой L у пункце M.

Не ўсякая непарыўная крывая мае Д., паколькі простая MM' можа не імкнуцца да лімітавага становішча або можа імкнуцца да двух розных лімітавых становішчаў, калі пункт імкнецца да M з розных бакоў ад пункта M (рыс. 2). Існуюць крывыя, якія маюць вызначаную Д. ва ўсіх пунктах,



Рыс. 2

акрамя нейкай колькасці "асаблівых" пунктаў. Калі простая на плоскасці ў прамавугольных каардынатах вызначаецца раўнаннем $y = f(x)$ і $f(x)$ дыферэнцавальная ў пункце x_0, то вуглавы каэфіцыент Д. у пункце M з абцысай x_0 роўны значэнню вытворнай $f'(x_0)$ у пункце x_0; раўнанне Д. у гэтым пункце мае выгляд

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Д. (простая) да паверхні S у пункце M ёсць адвольная простая, якая праходзіць праз пункт M і знаходзіцца ў датычнай плоскасці да паверхні S у пункце M.

ДАТЫ́ЧНАЯ ПЛО́СКАСЦЬ да паверхні — плоскасць, якая праходзіць праз пункт M_0 паверхні σ і мае такую ўласцівасць, што адлегласць ад гэтай плоскасці да зменнага пункта M паверхні σ пры імкненні M да M_0 бясконца малая ў параўнанні з адлегласцю MM_0. Калі паверхня σ зададзеная раўнаннем $z = f(x, y)$, то раўнанне Д.п. у пункце (x_0, y_0, z_0), дзе $z_0 = f(x_0, y_0)$, мае выгляд $z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0)$ у тым і толькі ў тым выпадку, калі функцыя $f(x, y)$ мае ў пункце (x_0, y_0) поўны дыферэнцыял. У такім разе

$$A = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \quad B = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}.$$

Калі паверхня σ зададзена няяўным раўнаннем $F(x, y, z) = 0$ і хоць бы адна з вытворных

$$\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$$

у пункце (x_0, y_0, z_0) адрозная ад нуля, то Д.п. у пункце (x_0, y_0, z_0) мае выгляд

$$\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}(y - y_0) +$$

$$+ \frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}(z - z_0) = 0.$$

ДАТЫ́ЧНАЯ ПРАСТО́РА — эўклідава прастора E да дадзенай рыманавай прасторы R, якая будуецца наступным чынам. Няхай у нейкай рыманавай прасторы адзначаны адвольны пункт O. У наваколлі пункта O можна ўвесці каардынаты $g_{ik}(x^1, ..., x^n)$ так, што каэфіцыенты g_{ik} метрычнай формы ў пункце O будуць адпавядаць умовам: $g_{ik} = 1$ пры $i = k$, $g_{ik} = 0$ пры $i \neq k$ і $\frac{d^l g_{ik}}{dx^l} = 0$ пры ўсіх i, k, l. Тады ў суседніх пунктах велічыні g_{ik} з дакладнасцю да малых другога парадку ў дачыненні да прыросту каардынат будуць супадаць з каэфіцыентамі метрычнай формы $dx^2 = \sum (dx^i)^2$ эўклідавай прасторы E. Калі наваколле пункта O адлюстраваць у прастору E па роўнасці каардынат, то гэтае адлюстраванне будзе ізаметрычным з той жа дакладнасцю. Эўклідава прастора E, на якую адлюстравана наваколле пункта O, называецца Д.п. да дадзенай рыманавай прасторы R у яе пункце O (пункт O пры гэтым атаясамляецца з яго вобразам).

ДАТЫ́ЧНЫХ МЕ́ТАД — тое, што *Ньютана метад*.

ДАЎЖЫНЯ́ — 1) лікавая характарыстыка працягласці ліній. Д. адрэзка простай — адлегласць паміж яго канцамі, вымераная якім-небудзь адрэзкам, узятым за адзінку. Д. ламанай лініі — сума Д. яе звёнаў. Д. простай дугі — дакладная верхняя мяжа (*супрэмум*) Д. ламаных, умежаных у гэтую дугу, калі колькасць звёнаў неабмежавана павялічваецца і максімум Д. асобных звёнаў імкнецца да нуля. Д. непарыўнай крывой, якая складаецца з концай колькасці простых дугаў, роўная суме Д. гэтых дугаў; 2) адна са *сферычных каардынат*; вугал паміж нулявым мерыдыянам і мерыдыянам, які праходзіць праз зададзены пункт на сферы. Гл. таксама *Каардынаты*.

ДАЧЫНЕ́ННЕ — падмноства концай дэкартавай ступені $A^n = A \times A \times \ldots \times A$ пэўнага мноства A, г.зн. падмноства сістэм $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ з n элементаў мноства A. Падмноства $R \subseteq A^n$ называецца n-арным (або n-месцавым) дачыненнем у

мностве A, лік n — рангам (або тыпам) дачынення R. Запіс R (a_1, a_2, …, a_n) азначае, што (a_1, a_2,…, a_n)$\in R$. Аднамесцавыя Д. называюцца у л а с ц і в а с ц я м і, двухмесцавыя — б і н а р н ы м і Д., трохмесцавыя — т э р н а р н ы м і Д. і г.д. Мноства A^n і пустое падмноства $\varnothing$ называюць адпаведна у н і в е р с а л ь н ы м Д. і н у л ь - д а ч ы н е н н е м рангу n у мностве A. Дыяганаль мноства A^n, г.зн. мноства $\Delta = \{(a, a, \ldots, a) \mid a \in A\}$, называецца Д. р о ў н а с ц і ў мностве A; (n + 1)-месцавае Д. F у A называецца ф у н к ц ы я н а л ь н ы м, калі з таго, што (a_1, a_2, …, a_n, a)$\in F$ і (a_1, a_2, …, a_n, b)$\in F$, вынікае $a = b$, дзе a_1, a_2, …, a_n, a, b — адвольныя элементы з A. Гл. таксама *Бінарнае дачыненне, Парадку дачыненне, Эквівалентнасці дачыненне, Адпаведнасць.*

ДВАЙКÓВАЯ АДЗІ́НКА — адзінка вымярэння *энтрапіі* і колькасці інфармацыі. Энтрапію ў адну Д.а. (1 біт) мае крыніца з двума роўнаімавернымі паведамленнямі. Назоў тэрміна звязаны з тым, што колькасць Д.а. паказвае (з дакладнасцю да адзінкі) сярэднюю колькасць двайковых знакаў, неабходных для запісу паведамленняў дадзенай крыніцы ў двайковым кодзе. Ужываюцца таксама дзесятковыя адзінкі. Пераход ад адных адзінак да іншых адпавядае замене асновы лагарыфмаў у вызначэнні энтрапіі і колькасці інфармацыі (10 замест 2). Формула пераходу: 1 дзесятковая адзінка = 1/ lg2 Д.а. ≈3,32 Д.а.

ДВАЙКÓВАЯ СІСТЭ́МА ЛІЧЭ́ННЯ — сістэма лічэння, пабудаваная на пазіцыйным (залежным ад месца) прынцыпе запісу лікаў з асновамі 2. Д.с.л. мае толькі два знакі — лічбы 0 і 1. Дзесятковы лік 2 лічыцца адзінкай 2-га разраду і запісваецца ў выглядзе 10. Каб лік, запісаны ў дзесятковай сістэме лічэння, запісаць у двайковай, яго падаюць праз ступені 2 у выглядзе $a = \sum_{i=0}^{k} c_i 2^{k-i}$ (дзе $c_i = \{0, 1\}$) і атрымліваюць двайковы запіс $a_2 = \overline{c_0 c_1 \ldots c_k}$, напрыклад $37_{10} = 32 + 4 + 1 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$. Такім чынам 37_{10} запісваецца як 100101_2. На практыцы пры вылічэннях Д.с.л. нязручныя, бо невялікія лікі запісваюцца як мнагазнакавыя. Д.с.л. выкарыстоўваецца ў тэарэтычных пытаннях, а таксама пры вылічэннях на кампутарах.

ДВАЙКÓВЫ КОД — код, які змяшчае толькі два сімвалы, напрыклад 0 і 1.

ДВУХБАКÓВАЯ ПАВÉРХНЯ — гл. *Аднабаковая і двухбаковая паверхні.*

ДВУХСКЛА́Д — тое, што *біном.*

ДВУХСКЛА́ДНІКАВАЕ РАЎНА́ННЕ — алгебраічнае раўнанне выгляду $ax^n + b = 0$, дзе a і b — камплексныя лікі, n — натуральны лік і $ab \neq 0$. У полі камплексных лікаў Д.р. мае n розных каранёў

$$a_k = \sqrt[n]{\left|\frac{b}{a}\right|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$

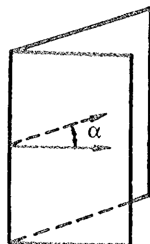
$$k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

якія ў камплекснай плоскасці размяшчаюцца на акружыне з цэнтрам у пачатку каардынат і радыусам, роўным арыфметычнаму кораню n-й ступені з $\left|\frac{b}{a}\right|$. Д.р. пры $a = 1$, $b = -1$ называецца р а ў н а н н е м д з я л е н н я к р у г а (а к р у ж ы н ы), паколькі задача пра дзяленне круга (акружыны) на n кангруэнтных частак зводзіцца да развязання раўнання $x^n - 1 = 0$. Развязкі такога раўнання называюцца к а р а н я м і n - й с т у п е н і з а д з і н к і і маюць выгляд

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n},\ k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Здабытак і дзель двух адвольных каранёў з адзінкі — гэта таксама нейкі корань з адзінкі. Сярод каранёў n-й ступені з адзінкі існуюць такія, што астатнія карані з адзінкі ёсць іх ступені. Гэтыя карані называюцца п е р ш а і с н ы м і. Для таго каб корань ε_k быў першаісным, неабходна і дастаткова, каб лікі k і n былі ўзаемна простыя. Так, корань ε_1 — заўсёды першаісны: $\varepsilon_1^k = \varepsilon_k$.

ДЗВЮХГРА́НЕВЫ ВУ́ГАЛ, д з в ю х г р а н е в ы к у т — фігура ў прасторы, утвораная дзвюма паўплоскасцямі, якія выходзяць з адной простай; таксама частка прасторы, абмежаваная гэтымі паўплоскасцямі (гл. рыс.). Паўплоскасці называюцца г р а н я м і Дз.в., іх агульная простая —



к а н т а м. Дз.в. вымяраецца лінейным вуглом α (вугал паміж двума перпендыкулярамі да канта, якія выходзяць з аднаго пункта і знаходзяцца ў розных гранях, або вугал, утвораны перасячэннем Дз.в. плоскасцю, перпендыкулярнай да канта).

ДЗВЮХГРА́НЕВЫ КУТ — тое, што *дзвюхграневы вугал.*

ДЗВЮХМЕ́РНАЯ МНАГАСТА́ЙНАСЦЬ — тапалагічная прастора, кожны пункт якой мае акругу, гамеаморфную плоскасці або паўплоскасці. Прыклады Дз.м.: сфера, круг, аркуш Мёбіюса, праектыўная плоскасць, бутэлька Кляйна і г.д.

ДЗВЮХПО́ЛАСЦЕВЫ ГІПЕРБАЛО́ІД — незамкнёная цэнтральная паверхня другога парадку, якая задаецца раўнаннем

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

Складаецца з дзвюх адасобленых частак (поласцяў), у прыватным выпадку, калі $a=b$, — Дз. г. а в а р о т у. Гл. *Паверхня другога парадку, Гіпербалоід.*

ДЗЕ́ЛІВА — лік, які дзеляць на іншы лік.

ДЗЕЛЬ — вынік *дзялення.*

ДЗЕ́ЛЬНІК — лік, на які дзеляць.

ДЗЕ́ЛЬНІК АДЗІ́НКІ — элемент колца (камутатыўнага з адзінкай), для якога існуе адваротны, г.зн. такі элемент b, што $ab=1$. У тэорыі алгебраічных функцый Дз.а. называюць таксама *адзінкамі.*

ДЗЕ́ЛЬНІК НУЛЯ́ — ненулявы элемент колца або групы з нулём, здабытак якога і нейкага ненулявога элемента роўны нулю. Элемент a называецца л е в ы м (п р а в ы м) Дз.н., калі $ab=0$ ($ba=0$) хоць бы для аднаго $b\neq 0$.

ДЗЕСЯТКО́ВАЕ НАБЛІ́ЖАННЕ р э ч а і с н а г а л і к у — набліжанае выяўленне рэчаіснага ліку канцым дзесятковым дробам. Усякі рэчаісны лік α можна запісаць у выглядзе бясконцага дзесятковага дробу: $\alpha=\pm\alpha_0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...$, дзе α_0 — неадмоўны цэлы лік, α_n — адна з лічбаў 0, 1, 2, ..., 9, $n=1, 2, \dots$. Дз.н. гэтага ліку атрымаем, калі ў запісе возьмем пэўную канцую колькасць знакаў α_n, пачынаючы з α_0. Дз.н. выкарыстоўваюць для набліжаных вылічэнняў.

ДЗЕСЯТКО́ВАЯ СІСТЭ́МА ЛІЧЭ́ННЯ — сістэма лічэння, пабудаваная на пазіцыйным (залежным ад месца) прынцыпе запісу лікаў з асновай 10. Мае 10 знакаў — лічбы 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Дзесяць адзінак 1-га разраду ўтвараюць адзінку 2-га разраду — лік 10, дзесяць адзінак 2-га разраду ўтвараюць адзінку 3-га разраду — лік 100 і г.д.' Для запісу ліку вызначаюць, колькі ў ім адзінак найвышэйшага разраду; потым вызначаюць у астачы лік адзінак разраду на адзінку меншага і г.д. Атрыманыя лічбы запісваюць побач: $2\cdot 10^3+4\cdot 10^2+7\cdot 10+1\cdot 10^0=2471$. Дз.с.л. найбольш пашыраная. Гл. таксама *Лічэнне.*

ДЗЕСЯТКО́ВЫ ДРОБ — дроб, назоўнік якога — цэлая ступень ліку 10. Дз.д. запісваюць без назоўніка, аддзяляючы ў лічніку справа коскай столькі лічбаў, колькі нулёў у назоўніку (напрыклад, $\frac{785}{10}=78{,}5$; $\frac{4}{100}=0{,}04$). Пры такім запісе Дз.д. лічбы, што стаяць злева перад коскамі, абазначаюць ц э л у ю ч а с т к у дробу, першая лічба пасля коскі — дзесятыя долі, другая — сотыя і г.д. Рацыянальныя лікі, назоўнік якіх складаецца з простых множнікаў 2 і 5, запісваюцца канцым Дз.д., напрыклад $\frac{1}{5}=0{,}2$. Калі ў назоўніку ёсць яшчэ іншыя простыя множнікі — бясконцым перыядычным дробам, напрыклад $\frac{8}{15}=0{,}533...=0{,}5(3)$. Ірацыянальныя лікі запісваюцца неперыядычнымі бясконцымі Дз.д., напрыклад $\sqrt{2}=1{,}4142...$

ДЗЕСЯТКО́ВЫ ЛАГАРЫ́ФМ л і к у — *лагарыфм* па аснове 10. Абазначаецца lg і мае шмат зручнасцяў у карыстанні, бо ў гэтым выпадку аснова супадае з лікам, які ўтварае дзесятковую сістэму лічэння.

ДЗЭ́ТА-ФУ́НКЦЫЯ РЫ́МАНА — аналітычная функцыя камплекснай зменнай $s=\sigma+it$, якая пры $\sigma>1$ вызначаецца абсалютна збежным шэрагам Дырыхле:

$$\zeta(s)\stackrel{\text{def}}{=}\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}.$$

Пры $\sigma>1$ можна запісаць $\zeta(s)$ у выглядзе здабытку Ойлера:

$$\zeta(s)=\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^{s}}\right)^{-1},$$

дзе p прабягае ўсе простыя лікі. Тоеснасць шэрагу і здабытку — адна з асноўных уласцівасцяў Дз.-ф. Р., якая мае значэнне для дастасаванняў у тэорыі лікаў. На першы план выходзіць размеркаванне нулёў Дз.-ф. Р. Існуе гіпотэза Б.Рымана, паводле

якой усе нулі Дз.-ф. Р. з $0 < t < 1$ знаходзяцца на простай $t = \frac{1}{2}$. Праўдзівасць і няпраўдзівасць гэтага сцверджання не даказаныя (2001). Дз.-ф. Р. мае яшчэ назоў ζ-ф у н к ц ы я.

ДЗЯЛЕ́ННЕ — арыфметычнае дзеянне, якое зводзіцца да таго, каб знайсці адзін з двух множнікаў, калі вядомыя іх здабытак і другі множнік. Дзеянне, адваротнае *множанню*. Падзяліць a на b — значыць знайсці такі невядомы лік x, каб выконвалася роўнасць $bx = a$, або $xb = a$. Вынік Дз. x называецца д з е л л ю, зададзены здабытак a — д з е л і в а м, зададзены множнік b — д з е л ь н і к а м. Абазначаецца двукроп'ем (a:b) або рыскай ($\frac{a}{b}$ ці a / b). Дз. у сістэме цэлых лікаў не заўсёды магчымае (9 не дзеліцца на 2), але калі яно магчымае, вынік Дз. адназначны. У сістэме рацыянальных лікаў (цэлых, дробавых і нуля) Дз. заўсёды выконваецца і яно адназначнае, акрамя Дз. на нуль, што немагчыма. Абагульненнем звычайнага Дз. з'яўляецца Дз. з астачай. Падзяліць з астачай цэлыя неадмоўныя лікі a на b — г.зн. знайсці такія два цэлыя неадмоўныя лікі x і y, якія б адпавядалі патрабаванню: $a = bx + y$, $y < b$. Лік a называецца д з е л і в а м, b — д з е л ь н і к а м, x — н я п о ў н а й д з е л л ю (пры $y \neq 0$) ці д з е л л ю (пры $y = 0$), y — а с т а ч а й. Гл. таксама *Падзельнасць*.

ДЗЯЛЕ́ННЕ АКРУ́ЖЫНЫ н а *n* р о ў н ы х ч а с т а к — тое, што *дзяленне круга*.

ДЗЯЛЕ́ННЕ КРУ́ГА (а к р у ж ы н ы) н а *n* р о ў н ы х ч а с т а к — найстаражытнейшая задача матэматыкі. Сэнс у тым, каб правесці Дз.к. з дапамогай цыркуля і лінейкі. Старажытнагрэцкія матэматыкі маглі падзяліць акружыну на 2, 3, 5, 15 частак, а таксама неабмежавана падвоіць колькасць старон атрыманых многавугольнікаў. У 1801 г. К.Гаўс паказаў, што акружына дзеліцца на 17 частак, наогул — на такую колькасць частак n, якая пададзена ў выглядзе $n = 2^{2k} + 1$ і ёсць просты лік або роўная здабытку розных такіх лікаў і адвольнай ступені ліку 2 (пры $k = 0, 1, 2, 3, 4$ атрымліваюцца простыя лікі $n = 3, 5, 17, 257, 65537$; пры $k = 5, 6, 7$ — адпаведныя няпростыя лікі). На іншую колькасць роўных частак падзяліць акружыну нельга. Дз.к. магчымае тады і толькі тады, калі ўсе карані раўнання $x^n - 1 = 0$ можна атрымаць паслядоўным развязаннем квадратовых і лінейных раўнанняў.

ДО́КАЗ — разважанне з мэтай абгрунтаван[…] праўдзівасці якога-небудзь сцверджання (тэар[…] мы). Патрабаванні, што прад'яўляюцца да Д[…] матэматыцы, выпрацаваліся на ранніх этапах […] развіцця ў сувязі з выкарыстаннем аксіяматычн[…] га метаду пабудовы матэматычных тэорый.

ДО́КАЗАЎ ТЭО́РЫЯ — тое, што *метамат[…] матыка*.

ДО́ТЫК — паняцце, якое азначае, што ў ней[…] кім пункце дзве крывыя (крывая і паверхня) ма[…] юць агульную датычную простую або дзве паверх[…] хні маюць агульную датычную плоскасць. Пара[…] дак Д. — характарыстыка блізкасці дзвюх крывых (крывой і паверхні або дзвюх паверхняў) у наваколлі іх агульнага пункта.

ДО́ТЫКУ ПУНКТ — адзіны ў лакальным сэнсе агульны пункт дзвюх крывых (паверхняў), у якім супадаюць іх датычныя простыя (плоскасці). Кажуць, што дотык крывых r_1: $[0, 1] \to \mathbf{R}^n$ і r_2: $[0, 1] \to \mathbf{R}^n$ пры пэўных $t \in [0, 1]$ мае парадак $k \in \mathbf{N}$, калі $\forall \mu = 0, \ldots, k$ выконваецца $r_1^{(\mu)}(t) = r_2^{(\mu)}(t)$, але $r_1^{(k+1)}(t) \neq r_2^{(k+1)}(t)$. Аналагічнае азначэнне даецца для паверхняў. У прыватнасці, разглядаецца дотык крывой і простай або паверхні і плоскасці.

ДРОБ з в ы ч а й н ы — лік, які ёсць цэлая колькасць доляў адзінкі. Запісваецца сімвалам $\frac{m}{n}$ (або m / n), дзе m — л і ч н і к Д., які паказвае колькасць узятых доляў адзінкі, падзеленай на столькі доляў, колькі іх паказвае (называе) н а з о ў н і к n. Д. можна разглядаць як дзель ад дзялення аднаго цэлага ліку m на другі n. Калі m дзеліцца цалкам на n, то дзель $\frac{m}{n}$ азначае цэлы лік (напрыклад, $\frac{8}{2} = 4$, $\frac{55}{11} = 5$), у процілеглым выпадку дзель $\frac{m}{n}$ — д р о б а в ы л і к (напрыклад, $\frac{3}{5}$, $\frac{12}{10}$). Д. $\frac{m}{n}$ не змяніцца, калі і лічнік, і назоўнік памножыць на адзін і той жа адрозны ад нуля лік. Таму два адвольныя Д. $\frac{m}{n}$ і $\frac{p}{q}$ можна прывесці да супольнага назоўніка. Д. таксама можна скарачаць, падзяляючы і лічнік, і назоўнік на адзін і той жа лік. Сума і рознасць Д. $\frac{a}{b}$ і $\frac{c}{b}$ з аднолькавымі назоўнікамі вызначаюцца правіламі:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}.$$

Каб скласці або адняць Д. з рознымі назоўнікамі, іх спачатку прыводзяць да супольнага назоўніка. Множанне і дзяленне Д. робіцца па правілах:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d},\quad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

Д. называецца правільным, калі яго лічнік меншы за назоўнік, у процілеглым выпадку — няправільным. Няправільны Д. можа быць пададзены ў выглядзе змяшанага ліку: сумы цэлага ліку і правільнага Д. Гл. таксама *Дзесятковы дроб*, *Непарыўны дроб*.

ДРÓБАВА-ЛІНЕ́ЙНАЯ ФУ́НКЦЫЯ — функцыя рэчаіснай або камплекснай зменнай, якую можна задаць раўнаннем

$$w=\frac{az+b}{cz+d},$$

дзе a, b, c, d — параметры, прычым вызначнік $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\neq 0$. Калі $c=0$, $d\neq 0$, то Д.-л.ф. зводзіцца да цэлай лінейнай функцыі $w=Az+B$, дзе $A\neq 0$. У выпадку рэчаіснай зменнай $z=x\in R$ звычайна лічыцца, што $a, b, c, d\in\mathbf{R}$. У гэтым выпадку графікам цэлай лінейнай функцыі $y=Ax+B$ будзе простая, графікам Д.-л.ф. $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ — роўнабаковая гіпербала з асімптотамі $x=-\frac{d}{c}$ і $y=\frac{a}{c}$.

Д.-л.ф. камплекснай зменнай $z\in\mathbf{C}$ звычайна давызначаюцца паводле непарыўнасці на пашыраную камплексную плоскасць $\mathbf{C}_1:=\mathbf{C}\cup\{\infty\}$ (сферу Рымана). Тады ўзнікаюць гэтак званыя дробава-лінейныя адлюстраванні (ДЛА) $\mathbf{C}_1$ на $\mathbf{C}_1$. Яны маюць наступныя ўласцівасці: 1) ДЛА (і толькі яны) рэалізуюць канформавыя гомеамарфізмы $\mathbf{C}_1$ на $\mathbf{C}_1$; 2) мноства ўсіх ДЛА ёсць група, калі ў якасці групавой аперацыі ўзяць кампазіцыю адлюстраванняў; 3) ДЛА адлюстроўвае кожную $\mathbf{C}_1$-акружыну (г.зн. звычайную акружыну або простую лінію супольна з пунктам ∞) на нейкую іншую $\mathbf{C}_1$-акружыну; 4) ДЛА адлюстроўвае кожную пару пунктаў, сіметрычных у дачыненні да дадзенай $\mathbf{C}_1$-акружыны, на пару пунктаў, якія абавязкова будуць сіметрычнымі ў дачыненні да вобраза дадзенай $\mathbf{C}_1$-акружыны; 5) калі дадзены тры розныя пункты $z_1, z_2, z_3\in\mathbf{C}_1$ і тры розныя пункты $w_1, w_2, w_3\in G$, то існуе адзінае ДЛА, якое адлюстроўвае першыя тры пункты. Гэтае ДЛА можна знайсці з раўнання

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}\cdot\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\cdot\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1},$$

калі ўсе $z_\mu, w_\nu\in\mathbf{C}$.

ДРÓБАВА-РАЦЫЯНА́ЛЬНАЯ ФУ́НКЦЫЯ — рацыянальная функцыя, якая не з'яўляецца *мнагаскладам*. Гл. *Рацыянальная функцыя*.

ДРÓБАВАЯ ЧА́СТКА ЛІ́КУ — розніца паміж лікам і яго цэлай часткай $[a]$. Абазначаецца $\{a\}$. Напрыклад, $\{1,7\}=0,7$, $\{\pi\}=0{,}141...$, $\{-2,2\}=0,8$. Гл. *Цэлая і дробавая часткі ліку*.

ДРÓБНЫХ КРÓКАЎ МÉТАД — рознасцевы метад развязання мнагамерных нестацыянарных задач матэматычнай фізікі, у якім пераход да новага часавага пласта адбываецца з дапамогай паслядоўнага развязання p аднамерных рознасцевых сістэм (p — памернасць зыходнай задачы), якія апраксімуюць адпаведныя нестацыянарныя задачы з меншым лікам прасторавых зменных. Пры гэтым кожная з прамежкавых аднамерных схемаў можа не апраксімаваць зыходную задачу, апраксімацыя дасягаецца за кошт падсумоўвання ўсіх *нявязак*. Падобныя метады называюцца часам метадамі расшчаплення, лакальна-аднамернымі рознасцевымі схемамі, адытыўнымі схемамі, метадамі сумарнай апраксімацыі.

ДРУГА́Я КВАДРАТÓВАЯ ФÓРМА — *квадратовая форма*, вызначаная ў кожнай датычнай прасторы арыентаванай паверхні, якая характарызуе адхіленне паверхні ад датычнай плоскасці. Калі паверхня зададзена параметрызацыяй $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$, для якой вектар нармалі $\boldsymbol{n}(u,v)=[\boldsymbol{r}_u', \boldsymbol{r}_v']/|[\boldsymbol{r}_u', \boldsymbol{r}_v']|$ вызначае арыентацыю, то Д.к.ф. φ_2 задаецца формулай: $\varphi_2=d^2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}=-d\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{n}=Ldu^2+Mdudv+Ndv^2$. Калі $\boldsymbol{p}$ — датычны вектар да паверхні, то значэнне Д.к.ф. знаходзіцца па формуле $\varphi_2(\boldsymbol{p})=k_n(\boldsymbol{p})\boldsymbol{p}^2$, дзе $k_n(\boldsymbol{p})$ — нармальная крывізна паверхні ў кірунку вектара $\boldsymbol{p}$.

ДРУГА́Я КРАЯВА́Я ЗАДА́ЧА — тое, што *Ноймана задача*; гл. таксама *Краявая задача*.

ДРЭ́ВА — злучны граф, у якім няма цыклаў (гл. *Граф*). Для яго лёгка развязваюцца праблемы, складаныя ў агульнай сітуацыі, напрыклад, для Д. даказаная гіпотэза рэканструявальнасці, для называння ізамарфізму дрэваў існуюць эфектыўныя алгарытмы.

ДРЭ́ВА КАРКА́СНАЕ — каркасны падграф злучнага графа, які з'яўляецца *дрэвам*. Адна з гістарычна першых тэарэм тэорыі графаў — матрычная тэарэма Кірхгафа (1817) сцвярджае, што колькасць каркасных дрэваў у злучным

графе G роўная алгебраічнаму дапаўненню адвольнага элемента матрыцы Кірхгафа K (G) (гл. *Граф*).

ДУА́ЛЬНАСЦІ ПРЫ́НЦЫП — 1) Д. п. у матэматычнай логіцы — тэарэма пра магчымасць узаемнай замены логікавых аперацый і логікава-прадметных моваў; 2) Д. п. у геаметрыі — замена ў кожным праўдзівым выказванні ўсіх паняццяў на дуальныя, што прыводзіць да праўдзівага выказвання; 3) Д. п. для часткова ўпарадкаваных мностваў: калі праўдзіцца якая-небудзь тэарэма пра часткова ўпарадкаваныя мноствы ў тэрмінах парадку і агульналогікавых тэрмінах, то праўдзіцца і дуальная ёй тэарэма.

ДУГА́, жарданава дуга — тапалагічная прастора, гамеаморфная прамежку лікавай восі; частка крывой, якая змяшчаецца паміж двума яе пунктамі і не мае кратных пунктаў. Д. на плоскасці вызначаюць, задаючы каардынаты яе пунктаў як непарыўныя функцыі $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ нейкага параметра t, $a \leq t \leq b$; пры гэтым лічаць, што розным значэнням адпавядаюць розныя пункты.

ДУ́ЖКІ — знакі ( ), [ ], { } і інш., якія ўжываюць для абазначэння парадку выканання матэматычных дзеянняў, а таксама для абазначэння паслядоўнасцяў, мностваў, сістэм раўнанняў і інш.

ДЫВЕРГЕ́НЦЫЯ (ад лац. divergere — адхіляцца) вектарнага поля — скалярнае поле div$\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{F}(x, y, z) = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$, значэнне якога ў пункце (x, y, z) знаходзяць па формуле

$$\text{div}\boldsymbol{F}(x,y,z) = \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}.$$

Калі $\boldsymbol{F}$ — поле хуткасцяў у стацыянарнай плыні несціскальнай вадкасці, то div$\boldsymbol{F}(x, y, z)$ — інтэнсіўнасць крыніцы (або сцёку) вадкасці ў пункце (x, y, z). Д. ёсць ліміт тасунку плыні вектарнага поля $\boldsymbol{F}$ праз сферу з цэнтрам у пункце (x, y, z) да аб'ёму шара, абмежаванага гэтай сферай, калі радыус сферы імкнецца да нуля.

ДЫВІ́ЗАР (ад лац. divisor — дзельнік) — абагульненне паняцця дзельніка элемента камутатыўнага колца. Няхай A — камутатыўнае асацыятыўнае колца з адзінкай, у якім няма дзельнікаў нуля. Тэорыя Д. дазваляе звесці пытанне пра раскладанне на простыя множнікі ў колцы A (у якім такое раскладанне не адназначнае) да раскладання на простыя множнікі ў нейкай паўгрупе D_0 з ужо адназначным раскладаннем. Пры гэтым існуе спецыяльны гомамарфізм з мультыплікатыўнай паўгрупы колца A у паўгрупу D_0. Элементы D_0 называюцца Д. колца A. Тэорыя Д. існуе для адвольнага дэдэкіндавага колца. Упершыню паняцце Д. з'явілася ў працах Э.Кумера.

ДЫЗ'ЮНКЦЫ́ЙНАЯ НАРМА́ЛЬНАЯ ФО́РМА — формула алгебры логікі, якая мае выгляд дыз'юнкцыі кан'юнкцый, калі кожны элемент кан'юнкцыі ёсць зменная або яе адмоўе. Асобны выпадак Д.н.ф. — дасканалая Д.н.ф., якая вызначаецца тым, што ў кожнай кан'юнкцыі трапляюцца ўсе зменныя (у пэўных ступенях) толькі адзін раз. Кожную булеву функцыю можна задаць адпаведнай Д.н.ф.; кожная формула алгебры логікі з дапамогай тоесных пераўтварэнняў можа быць прыведзеная да выгляду Д.н.ф. Дуальнай да Д.н.ф. з'яўляецца *кан'юнкцыйная нармальная форма.*

ДЫЗ'Ю́НКЦЫЯ (ад лац. disjunctio — адрозненне) — логікавая аперацыя, якая ўтварае з двух выказванняў A і B новае выказванне "A ці B" ("A або B"). Абазначаецца $A \vee B$. У звычайнай мове існуюць два разуменні злучніка "ці" ("або"): у вылучальным і невылучальным сэнсах. У першым разуменні выказванне "A ці B" азначае, што праўдзівае дакладна адно з двух выказванняў A, у другім разуменні — што праўдзівае хоць бы адно з іх. У матэматычнай логіцы тэрмін Д. далучаюць да інтэрпрэтацыі злучніка "ці" ў другім сэнсе. Такому ўжыванню адпавядае наступная табліца праўдзівасці (П — праўда, Н — няпраўда).

A	B	$A \vee B$
П	П	П
П	Н	П
Н	П	П
Н	Н	Н

ДЫНАМІ́ЧНАЕ ПРАГРАМАВА́ННЕ — раздзел *матэматычнага праграмавання*, прысвечаны даследаванню спецыяльных задач нелінейнага праграмавання і аптымальнага кіравання, матэматычныя мадэлі якіх маюць характар мнагакрокавых і дынамічных працэсаў. Метады Д.п. могуць выкарыстоўвацца для разнастайных задач планавання і кіравання, а таксама для пэўных задач тэхнічнага зместу. Акрамя гэтага, Д.п. стала адным

з асноўных інструментаў аналізу шэрагу мадэляў даследавання аперацый. Д.п. дазваляе таксама сфармуляваць новы падыход да некаторых задач *варыяцыйнага злічэння* і тэорыі *аптымальнага кіравання*. Пры гэтым у адрозненне ад іншых раздзелаў матэматычнага праграмавання ў Д.п. пры фармулёўцы задачы і апісанні агульнай схемы яе развязання не накладаецца якіх-небудзь спецыяльных абмежаванняў на прыроду і характар функцый, што ўваходзяць у задачу (тыпу лінейнасці, выпукласці, непарыўнасці і г.д.).

Агульная схема мнагакрокавага працэсу прыняцця аптымальных развязанняў (у дыскрэтным варыянце) палягае ў наступным. Няхай зададзена нейкая сістэма S, стан якой у пачатковы момант $k=0$ характарызуецца лікам $x_0=c_0$. У кожны з момантаў часу k, $k=1, ..., N$, вызначаецца некаторы намер x_k, у выніку чаго сістэма змяняе свае станы (звычайна развязак і стан можна атаясаміць). Пры гэтым кожны намер x_k абавязаны адпавядаць як зыходным абмежаванням, якія вызначаюць сістэму S, так і абмежаванням, што паўстаюць у выніку раней зробленых выбараў $x_1, ..., x_{k-1}$. Кожны намер прыносіць які-небудзь выйгрыш (даход). Для скарыстання схемаў Д.п. неабходна, каб агульны даход за N крокаў быў роўны суме даходаў ад асобных крокаў. Трэба знайсці сярод усіх стратэгій (паслядоўнасці дапушчальных намераў) такую, якая мае максімум сумарнага даходу.

У аснову Д.п. пакладзены наступны прынцып аптымальнасці, заўважаны Р.Белманам (1950-я гг.): аптымальная стратэгія валодае той уласцівасцю, што якія б ні былі пачатковы стан і m першых крокаў, гэтая стратэгія на наступных $m+1, ..., N$ кроках таксама аптымальная ў дачыненні да стану, дасягнутага пасля m першых крокаў. Фармалізацыя прынцыпу пунктуальнасці прыводзіць да спецыфічных функцыйных раўнанняў, развязанне якіх і складае аснову вылічальных схемаў Д.п. У многіх выпадках гэтыя функцыйныя раўнанні ўяўляюць сабою сістэму рэкурэнтных стасункаў. Класічныя задачы Д.п. — гэта задачы размеркавання рэсурсаў. Найпрасцейшая фармулёўка такіх задач палягае ў наступным. Ёсць аднародны рэсурс у колькасці c_0, які павінны быць размеркаваны паміж N вытворчымі працэсамі. Калі для працэсу k вылучаецца колькасць рэсурсу x_k, то пры гэтым атрымліваецца даход $\varphi_k(x_k)$, $k=1, ..., N$. Патрабуецца размеркаваць рэсурс на працэсах такім чынам, каб сумарны даход быў максімальны. Матэматычна задача зводзіцца да максімізацыі $\sum_{k=1}^{N}\varphi_k(x_k)$ пры ўмовах $x_k \geq 0$, $k=1, ..., N$ і

$$\sum_{k=1}^{N} x_k = c_0. \qquad (1)$$

У дадзенай задачы развязанне аднакрокавае, а мнагакрокавасць уводзіцца фармальна: лічыцца, што першы крок палягае ў вылучэнні рэсурсу на першы працэс, другі крок — у вылучэнні рэсурсу на першыя два працэсы і г.д. Для скарыстання схемы Д.п. улучаюць дадзеную задачу ў сям'ю задач з адвольнай колькасцю крокаў (працэсаў) і адвольным запасам рэсурсу $c \leq c_0$. Няхай $f_n(c)$ — максімальны даход, які можна атрымаць за n крокаў пры пачатковым запасе c. Фармальна

$$f_n(c) = \max\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(x_k),\ n=1, ..., N, \qquad (2)$$

дзе максімум бярэцца па ўсіх неадмоўных x_k, для якіх $x_1 + ... + x_n = c$. Тады скарыстанне прынцыпу аптымальнасці прыводзіць да рэкурэнтных стасункаў

$$f_n(c) = \max(\varphi_k(x_k) + f_{n-1}(c - x_n)), \qquad (3)$$

дзе $f_1(c) = \varphi_1(c)$, $n=2, ..., N$. Судачыненні (3) дазваляюць паслядоўна вылічыць значэнні $f_1(c)$, $f_2(c)$, ..., $f_N(c)$ пры ўсіх дапушчальных c і адпаведныя аптымальныя стратэгіі.

ДЫНАМІ́ЧНАЯ ГУЛЬНЯ́ — бескааліцыйная гульня, у якой гульцы супольна кіруюць рухам пункта ў якім-небудзь мностве X — прасторы станаў гульні. Кожнаму пункту $x\in X$ адпавядае мноства $S_j^{(x)}$ элементарных стратэгій гульца $j\in J$ у гэтым пункце і мноства $S^{(x)} = \prod_{j=1}^{n} S_j^{(x)}$ элементарных сітуацый. На X зададзены імавернасныя размеркаванні $F(x_k, s^{(x_j)}, ..., x_{k-1} s^{(x_{k-1})})$, $x_i \in X$, $s^{(x_j)} \in S^{(x_j)}$, якія вызначаюць вядомы кожнаму гульцу закон руху кіравання пункта. Партыя $P(x_1, s^{(x_1)}, ..., x_k s^{(x_k)})$ у Д.г. задаецца па схеме: у пачатковым стане x_1 кожны гулец выбірае стратэгію $s^{(x_1)}$, у выніку чаго атрымліваецца сітуацыя $s^{(x_1)}$, і гульня выпадковым чынам пераходзіць у стан x_2 у адпаведнасці з размеркаваннем імавернасці $F(x_2|x_1, s^{(x_1)})$. Далей Д.г. развіваецца па індукцыі. На кожнай партыі зададзены выйгрыш $h_j(P)$ гульца j. Гульня спыняецца, як толькі x_k трапляе ў тэрмінальнае мноства $x^{T} \subseteq X$, $h_j(P) = h_j(x_k)$, дзе x_k — апошні стан гульні.

ДЫНАМІ́ЧНАЯ СІСТЭ́МА — сістэма, хуткасць змянення якой не залежыць ад часу. У найбольш простых выпадках стан Д.с. можна харак-

тарызаваць з дапамогай рэчаісных велічыняў $w_1, ..., w_m$, напрыклад каардынат, хуткасці. Тады рух апісваецца сістэмай звычайных дыферэнцыяльных раўнанняў $\dot{w}_i = f_i(w_1,...,w_m)$, $i = 1, ..., m$. Часам тэорыю Д.с. называюць **якаснай тэорыяй** дыферэнцыяльных раўнанняў.

ДЫРА́КА ФУ́НКЦЫЯ — тое, што *дэльта-функцыя.*

ДЫРЫХЛЕ́ АБСЯ́Г — падмноства метрычнай прасторы X, якое з'яўляецца фундаментальным абсягам групы Γ ізаметрый прасторы X і якое будуецца так: няхай P — адвольны пункт прасторы X. Тады Д.а. $D(\Gamma, P)$ групы Γ у дачыненні да пункта P — гэта падмноства $D(\Gamma, P) = \{\delta \in x \mid \rho(p, s) \le \rho(p, \gamma(s)) \forall \in \Gamma\}$. Д.а. — найбольш пашыраны тып фундаментальных абсягаў з прычыны канструктыўнасці яе пабудовы. Гэты метад працуе ў выпадку групаў рухаў рыманавых прастораў сталай крывіні.

ДЫРЫХЛЕ́ ЗАДА́ЧА, **першая краявая задача** — задача пошуку рэгулярнай у абсягу D *гарманічнай функцыі* u, якая на мяжы абсягу D супадае з наперад зададзенай непарыўнай функцыяй φ. Задачу пошуку рэгулярнага ў абсягу D развязку эліптычнага раўнання другога парадку, які прымае наперад зададзеныя значэнні на мяжы абсягу, таксама называюць Д.з., або **першай краявой задачай.** Пытанні, звязаныя з гэтай задачай, разглядаў К.Гаўс (1840), а затым П.Дырыхле (1850).

ДЫРЫХЛЕ́ ІНТЭГРА́Л — назоў інтэгралаў некалькіх тыпаў: 1) інтэграл

$$\int_0^x \frac{\sin \alpha x}{x} \cos\beta x dx = \begin{cases} \pi/2 \text{ пры } \beta < \alpha, \\ \pi/4 \text{ пры } \beta = \alpha, \\ 0 \quad \text{пры } \beta > \alpha. \end{cases}$$

Такі Д.і. называецца таксама **разрыўным множнікам** Дырыхле і з'яўляецца разрыўнай функцыяй ад параметраў $\alpha > 0$ і $\beta > 0$. Дырыхле выкарыстаў інтэграл у даследаваннях прыцягнення эліпсоідаў (1889); 2) інтэграл

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t)dt,$$

дзе $D_n(t) = \dfrac{\sin(n+1/2)t}{2\sin t/2}$ — **ядро Дырыхле** (1829). Такі Д.і. роўны n-й частковай суме

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

шэрагу Фур'е функцыі $f(x)$. З дапамогай гэтай роўнасці П.Дырыхле выявіў, што шэраг Фур'е функцыі, якая мае канцую колькасць максімумаў і мінімумаў, збягаецца ў кожным пункце, таму гэтая формула важная ў тэорыі шэрагаў Фур'е; 3) інтэграл

$$\iiint\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right)dxdydz$$

— гл. у арт. *Дырыхле прынцып.*

ДЫРЫХЛЕ́ L-ФУ́НКЦЫЯ **па** mod k, **Дырыхле шэраг** — функцыя камплекснай зменнай $s = \tau + it$, якая вызначаецца шэрагам

$$L(s;x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} \qquad (1)$$

для ўсіх *Дырыхле характараў* $\chi(n)$ па mod k. Д. L-ф. рэчаіснай зменнай упершыню разглядаў П.Дырыхле (1837) у сувязі з доказам бясконцасці простых лікаў у арыфметычнай прагрэсіі $km + l$, рознасць k і першы элемент l якой — узаемна простыя лікі. Дырыхле шэраг (1) збягаецца абсалютна і раўнамерна ў кожным канцым абсягу камплекснай s-плоскасці, для якога $\sigma \ge 1 + \gamma$, $\gamma > 0$. Д. L-ф. называецца таксама **L-шэрагам.**

ДЫРЫХЛЕ́ ПРЫКМЕ́ТА — прыкмета збежнасці лікавых шэрагаў: калі паслядоўнасць рэчаісных лікаў a_n збягаецца да нуля, а паслядоўнасць частковых сумаў $\sum_{i=1}^{\infty} b_n$ шэрагу абмежаваная, то шэраг $\sum_{i=1}^{\infty} a_n b_n$ збягаецца.

ДЫРЫХЛЕ́ ПРЫ́НЦЫП — 1) Д.п. **у тэорыі лікаў** — сцверджанне, што калі разнесці m рэчаў па n класах ($m > n$), то хоць бы ў адзін з класаў трапяць не менш як дзве рэчы. Д.п. — аснова шматлікіх вынікаў у тэорыі дыяфантавых набліжэнняў, тэорыі трансцэндэнтных лікаў, элементарнай матэматыцы і г.д.; 2) Д.п. **у тэорыі гарманічных функцый:** няхай функцыя $u(x, y, z)$ зададзена на мяжы абсягу G і інтэграл

$$I = \iiint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]dxdydz$$

дасягае свайго найменшага значэння сярод такіх функцый. Тады $u(x, y, z)$ — гарманічная ў абсягу G. Д.п. мае дастасаванні ў матэматычнай фізіцы.

ДЫРЫХЛЕ́ ФУ́НКЦЫЯ — функцыя $f(x)$, роўная адзінцы для рацыянальных лікаў і нулю для ірацыянальных лікаў. Д.ф. не інтэгравальная паводле Рымана, але, паколькі амаль скрозь яна роўная нулю, інтэгравальная паводле Лебэга. Д.ф. належыць да другога класа ў *Бэра класіфікацыі* і можа быць зададзеная формулай:

$$f(x) = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} (\cos m!\pi x)^{2n}.$$

ДЫРЫХЛЕ́ ХАРА́КТАР — арыфметычная функцыя $\chi(n)$, уведзеная П.Дырыхле (1837) у сувязі з вывучэннем размеркавання простых лікаў у арыфметычных прагрэсіях. Няхай камплекснаначная функцыя $\chi(n)$, вызначаная для ўсіх цэлых n, мае ўласцівасці: 1) $X(m, n) = X(m)\,X(n)$ для ўсіх m і n; 2) існуе такі цэлы лік k (перыяд), што $\chi(n+k) = \chi(n)$ для ўсіх n. Тады χ называецца Д.х. Гл. *Лікаў тэорыя, Характар.*

ДЫРЫХЛЕ́ ШЭ́РАГ — функцыйны шэраг выгляду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$, дзе a_n — камплексныя каэфіцыенты, λ_n, $0 < |\lambda_n| \uparrow \infty$ — паказнікі Д.ш., $s = \sigma + it$ — камплексная зменная. Пры $\lambda_n = \ln n$ Д.ш. мае выгляд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$. У прыватным выпадку $a_n = 1$, $\sigma > 1$ *дзэта-функцыя Рымана* можа быць пададзеная ў выглядзе Д.ш.: $\xi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. Няхай $\lambda_n > 0$ і Д.ш. збягаецца ў пункце $s_0 = \sigma_0 + it_0$. Тады ён збягаецца ў паўплоскасці $\sigma > \sigma_0$. Унутры ўсякага вугла $|\arg(s - s_0)| < \varphi_0 < \frac{\pi}{2}$ Д.ш. збягаецца раўнамерна. Адкрыты абсяг збежнасці Д.ш. ёсць паўплоскасць $\sigma > c$. Лік c называецца абцысай збежнасці. Сума $F(s)$ Д.ш. ёсць функцыя, аналітычная ў паўплоскасці збежнасці. Няхай q — дакладная ніжняя мяжа такіх лікаў β, што ў паўплоскасці $\sigma > \beta$ функцыя $F(s)$ абмежаваная па модулі. Тады мае месца формула

$$a_n = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{p-iT}^{p+iT} F(s) e^{\lambda_n s}_{F(s)}\, ds,\ n = 1, 2, \ldots, p > q.$$

Калі Д.ш. збягаецца ва ўсёй плоскасці, яго сума ёсць цэлая функцыя. У выпадку, калі λ_n — камплексны лік, апісанне абсягу збежнасці і формула для каэфіцыентаў a_n значна болей складаныя.

ДЫРЫХЛЕ́ ЯДРО́ — функцыя

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin(n + 1/2)x}{2\sin x/2}.$$

П.Дырыхле даказаў, што частковая сума $S_n(x)$ шэрагу Фур'е функцыі $f(x)$ выражаецца праз Д.я.:

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t - x)\, dt;$$

інтэграл справа называецца сінгулярным інтэгралам Дырыхле.

ДЫРЭКТРЫ́СА (франц. directrice, ад позналац. directrix — кіроўная) канічнага сечыва — простая, якая знаходзіцца ў плоскасці канічнага сечыва (эліпса, гіпербалы, парабалы) і мае ўласцівасць: тасунак адлегласці r ад адвольнага пункта канічнага сечыва да фокуса і адлегласці d ад фокуса да гэтай простай нязменны і роўны эксцэнтрысітэту: $e = \frac{r}{d}$. Эліпс і гіпербала маюць па дзве Д., парабала — адну, для акружыны Д. не вызначана. У прамавугольнай сістэме каардынат, якая адпавядае кананічным раўнанням эліпса, гіпербалы, парабалы, Д. апісваецца раўнаннямі: $x = \pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ (эліпс), $x = \pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ (гіпербала), $x = -\frac{p}{2}$ (парабала).

ДЫСКРЫМІНА́НТ (ад лац. discriminantis — які падзяляе, адрознівае) мнагасклада — для мнагасклада $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ выраз

$$D = a_0^{2n-2} \prod_{i>k} (\alpha_i - \alpha_k)^2,$$

дзе здабытак распаўсюджаны на ўсе магчымыя рознасці каранёў $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ раўнання $P_n(x) = 0$. Д. роўны нулю, калі і толькі калі сярод каранёў мнагасклада $P_n(x)$ ёсць роўныя. Д. можна выразіць праз каэфіцыенты мнагасклада $P_n(x)$, калі падаць яго ў выглядзе вызначніка, утворанага з гэтых каэфіцыентаў (гл. *Рэзультант*). Для квадратовага мнагасклада $ax^2 + bx + c$ Д. роўны $b^2 - 4ac$; $D = -4p^3 - 27p^2$ для мнагасклада $x^3 + px + q$. Ад рэзультанта $R(P_n; P_n')$ мнагасклада P_n і яго вытворнай P_n' Д. адрозніваецца толькі множнікам a_0.

ДЫСКРЫМІНА́НТНЫ АНА́ЛІЗ — раздзел мнагамернага статыстычнага аналізу, які вывучае метады класіфікацыі аб'ектаў, зададзеных мнагамернымі назіраннямі. Галоўная праблема Д.а. — ацэнка памылак класіфікацыі, г.зн. вылучэнне надзейнасці правіл, паводле якіх ажыццяўляецца

класіфікацыя. Цікавасць да Д.а. звязаная з працамі па пазнаванні вобразаў і дастасаванні кампутараў да развязання задач аўтаматычнай дыягностыкі.

ДЫСКРЭ́ТНАЕ МНО́СТВА — мноства без лімітавых пунктаў. Элементамі Д.м. з'яўляюцца ізаляваныя пункты.

ДЫСКРЭ́ТНАЕ ПРАГРАМАВА́ННЕ — раздзел *матэматычнага праграмавання*, у якім распрацоўваюцца метады пошуку экстрэмумаў функцый, зададзеных на концых мноствах. Колькасць элементаў гэтых мностваў у рэальных задачах часта настолькі вялікая, што робіць немагчымым поўны перабор нават з дапамогай сучаснай кампутарнай тэхнікі. Метады Д.п. часта прыводзяцца да частковага перабору, напрыклад, у *галінаў і межаў метадзе.* Аб'ём вылічэнняў у такіх метадах бывае блізкі да экспанентавага і таму зараз пашыраюцца эўрыстычныя і набліжаныя метады, якія маюць паліномную складанасць. Да задач Д.п. прыводзяцца шырокія класы дастасоўных задач планавання, кіравання, транспартавання, арганізацыі вытворчасці і г.д.

ДЫСКРЭ́ТНАЕ РАЗМЕРКАВА́ННЕ — размеркаванне імавернасцяў, сканцэнтраванае на концым або злічальным мностве пунктаў выбаркавай прасторы Ω. Размеркаванне выпадковай велічыні $\xi(\omega)$ называецца дыскрэтным, калі з імавернасцю 1 яна прымае концую або злічальную колькасць розных значэнняў x_i з імавернасцямі $p_i = p\ \{\omega:\xi(\omega) = x_i\}$. Найбольш распаўсюджаныя Д.р.: *біномнае размеркаванне*, *паліномнае размеркаванне*, *Пуасона размеркаванне.*

ДЫСКРЭ́ТНАЯ АПТЫМІЗА́ЦЫЯ — раздзел *матэматычнага праграмавання*, у якім на зменныя аптымізацыі накладваюцца ўмовы дыскрэтнасці, пераважна цэлалікавасці (*цэлалікавае праграмаванне*). У многіх выпадках зменныя прымаюць толькі два значэнні — 0, 1 (б у л е в а п р а г р а м а в а н н е). Патрабаванне дыскрэтнасці істотна ўскладняе развязанне задач аптымізацыі. Напрыклад, задача лінейнага праграмавання пры накладанні ўмовы цэлалікавасці пераўтвараецца з паліномна развязальнай у *NP*-цяжкую праблему. Асноўныя падыходы да развязання задач Д.а. — звядзенне да концай паслядоўнасці задач без умовы дыскрэтнасці шляхам дадавання новых абмежаванняў (м е т а д ы а д с я ч э н н я), разнастайныя працэдуры накіраванага перабору варыянтаў, эўрыстычныя алгарытмы.

ДЫСКРЭ́ТНАЯ ВЫПАДКО́ВАЯ ВЕЛІЧЫНЯ́ — выпадковая велічыня, якая прымае концую або злічальную колькасць значэнняў.

ДЫСКРЭ́ТНАЯ ГРУ́ПА — 1) група, надзеленая дыскрэтнай тапалогіяй; 2) група непарыўных пераўтварэнняў тапалагічнай прасторы *X* такая, што арбіта адвольнага пункта прасторы *X* ёсць дыскрэтнае падмноства *X*.

ДЫСКРЭ́ТНАЯ МАТЭМА́ТЫКА — у шырокім сэнсе збіральны тэрмін, які аб'ядноўвае шэраг матэматычных тэорый, не звязаных непасрэдна з канцэпцыяй лімітаванага пераходу і непарыўнасці. У гэтай інтэрпрэтацыі да Д.м. далучаюць *матэматычную логіку, алгарытмаў тэорыю, графаў тэорыю, камбінаторны аналіз* і інш. Больш распаўсюджанае асэнсаванне Д.м. як галіны матэматыкі, у якой даследуюцца пераважна концыя структуры. Многія з іх выяўляюць сабою мадэлі элементаў сістэм кіравання і апрацоўкі інфармацыі, якія працуюць у дыскрэтным часе: концыя аўтаматы, камбінацыйныя і рэлейна-кантактныя схемы, коды.

ДЫСКРЭ́ТНЫ АНА́ЛІЗ — раздзел матэматыкі, у якім вывучаюцца ўласцівасці дыскрэтных аб'ектаў і структур. Тое, што *дыскрэтная матэматыка.*

ДЫСПЕРСІ́ЙНЫ АНА́ЛІЗ — метад матэматычнай статыстыкі, прызначаны для выяўлення ўплыву асобных фактараў на вынік эксперыменту, а таксама для далейшага планавання эксперыментаў. Сучасныя дастасаванні Д.а. ахопліваюць задачы эканомікі, сацыялогіі, біялогіі, тэхнікі і трактуюцца звычайна ў тэрмінах статыстычнай тэорыі выяўлення сістэматычных адрозненняў паміж вынікамі непасрэдных вымярэнняў у тых або іншых зменлівых абставінах.

ДЫСПЕ́РСІЯ (ад лац. dispersio — рассейванне) у т э о р ы і і м а в е р н а с ц я ў — мера $D\xi$ адхілення выпадковай велічыні ξ ад яе матэматычнага спадзявання. Д. вызначаецца роўнасцю $D\xi = M(\xi - M\xi)^2$. Уласцівасці $D\xi$: $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$; калі c — рэчаісны лік, тады $D(c\xi) = c^2 D\xi$; $D(\xi + c) = D\xi$; $D(c) = 0$; калі выпадковыя велічыні ξ і η некарэляваныя, то $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$.

Пададзім формулы для падліку Д. выпадковай велічыні праз размеркаванне гэтай велічыні на мностве рэчаісных лікаў. Калі выпадковая велічыня ξ прымае не больш чым злічальнае мноства розных значэнняў x_i з імавернасцямі $P_i = P(\xi = x_i)$, то $D\xi = \sum_i (x_i - M\xi)^2 p_i$. Калі ξ мае шчыльнасць раз-

меркавання $P_\xi(x)$, то $D\xi = \int (x - Mx)^2 p_\xi(x)\,dx$. У агульным выпадку, калі $F_\xi(x)$ — функцыя размеркавання ξ, то $D\xi = \int (x - Mx)^2 dF_\xi(x)$, дзе інтэграл разумеецца ў сэнсе Лебэга—Стыльт'еса або Рымана—Стыльт'еса.

ДЫСТРЫБУТЫЎНАСЦЬ (ад лац. distributivic — размеркавальны), размеркавальны закон — уласцівасць, якая злучае складанне і множанне велічыняў і выражаецца тоеснасцямі $c \cdot (a+b) = c \cdot a + c \cdot b$ і $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$. У больш агульным сэнсе гаворыцца пра Д. аператара $F(x)$ у дачыненні да якога-небудзь дзеяння $x * y$ як пра ўласцівасць, выражаную роўнасцю $F(x * y) = F(x) * F(y)$.

ДЫФЕРЭНЦАВА́ЛЬНАЕ АДЛЮСТРАВА́ННЕ — адлюстраванне прасторы $\mathbf{R}^n$ у $\mathbf{R}^m$, якое задаецца дыферэнцавальнымі функцыямі $y_i = f_i(x_j)$. Матрыца, у якой на перакрыжаванні i-га радка і j-га слупка стаіць $f_i(x_j)$, называецца матрыцай Якобі. Калі $m = n$, то яе вызначнік называецца якабіянам адлюстравання.

ДЫФЕРЭНЦАВА́ЛЬНАЯ МНАГАСТА́ЙНАСЦЬ n-мерная — n-мерная тапалагічная прастора, накрытая адкрытымі мноствамі v_α, якія задавальняюць наступныя ўмовы: для кожнага v_α існуе гомеамарфізм φ_α: $v_\alpha \to V$, дзе V — n-мерны шар з R^n; калі $v_\alpha \cap v_\beta \neq \varnothing$, то адлюстраванне $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta\varphi_\alpha$ мноства $\varphi_\alpha(v_\alpha \cap v_\beta)$ на мноства $\varphi_\beta(v_\alpha \cap v_\beta)$ ёсць дыферэнцавальнае адлюстраванне. Накрыццё $\{v_\alpha\}$ і гомеамарфізмы $\{\varphi_\alpha\}$ задаюць на тапалагічнай прасторы дыферэнцавальную структуру.

ДЫФЕРЭНЦАВА́ЛЬНАЯ ФУ́НКЦЫЯ ў пункце — функцыя, якая мае дыферэнцыял у гэтым пункце. Для функцыі адной зменнай гэта тое ж, што і існаванне концай вытворнай у гэтым пункце. Функцыя многіх зменных будзе Д.ф. пры дадатковай умове непарыўнасці частковых вытворных першага парадку.

Д.ф. на нейкім мностве пунктаў азначаецца як функцыя, дыферэнцавальная ў кожным пункце гэтага мноства. Калі ўсе частковыя вытворныя функцыі многіх зменных існуюць і яны непарыўныя, то гэтыя функцыі называюцца непарыўна дыферэнцавальнымі функцыямі. Калі існуе дыферэнцыял n-га парадку або існуе дыферэнцыял адвольнага парадку $n = 1, 2, \ldots$, то функцыя называецца n разоў дыферэнцавальнай функцыяй ці бясконца дыферэнцавальнай функцыяй адпаведна. Кожная Д.ф. непарыўная, але існуюць непарыўныя функцыі, якія не дыферэнцавальныя ні ў адным пункце.

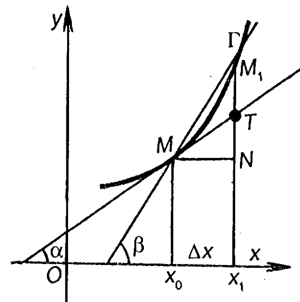
ДЫФЕРЭНЦАВА́ННЕ — аперацыя, якая ставіць у адпаведнасць функцыі яе вытворную або дыферэнцыял. Пры гэтым можна мець на ўвазе вытворную і дыферэнцыял у пункце ці на нейкім мностве, а таксама частковыя вытворныя, вытворныя па вектары і г.д. Самі функцыі могуць быць не толькі лікавымі, але і больш агульнага выгляду.

ДЫФЕРЭНЦАВА́ННЕ ЛІ́КАВАЕ — знаходжанне вытворнай функцыі лікавымі метадамі. Выкарыстоўваецца ў тых выпадках, калі метады дыферэнцыяльнага злічэння непрыдатныя (функцыя зададзена табліцай) або функцыя мае складаны аналітычны выраз.

ДЫФЕРЭНЦЫЯ́Л — адно з асноўных паняццяў *дыферэнцыяльнага злічэння*. Лікавая функцыя $f:(a, b) \to \mathbf{R}$ называецца дыферэнцавальнай у пункце $x_0 \in (a, b)$, калі існуе такі лік A, што выконваецца роўнасць

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = Ah + o(h) \text{ пры } h \to 0. \quad (1)$$

Лінейнае аднароднае адлюстраванне $h \to Ah$, якое ўваходзіць у роўнасць (1), называецца Д. першага парадку функцыі f у пункце x_0. Дыферэнцавальнасць функцыі f у пункце x_0 раўназначная існаванню концай вытворнай $f'(x_0)$, прычым $f'(x_0) = A$, дзе A — лік, які ўваходзіць у (1). Д. абазначаюць $Df'(x_0)(h) = df(x_0)(h) = f'(x_0)(h) = f'(x_0)h$. Акрамя таго, існуюць класічныя абазначэнні Ляйбніца для Д. $dy = df = df(x_0)$, але яны менш дакладныя, бо ў іх не паказаная залежнасць ад "прыросту" $h = dx = \Delta x$. Геаметрычна дыферэнцыял першага парадку (пры фіксаваным значэнні x_0 і прыросце Δx, якія змяняецца) ёсць прырост ардынаты датычнай да крывой у пункце $(x_0, f(x_0))$, г.зн. адрэзак NT (гл. рыс.). З роўнасці (1) можна атрымаць набліжаную роўнасць



$$f(x_0+h) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,h, \qquad (2)$$

адкуль вынікае, што Д. можна выкарыстоўваць для набліжаных вылічэнняў. Роўнасць, якая ў абазначэннях Ляйбніца мае выгляд $dy = f'(x_0)\,dx$, выконваецца незалежна ад таго, з'яўляецца зменная x незалежнай зменнай або дыферэнцавальнай функцыяй ад іншых зменных. Гэтае сцверджанне называецца ў л а с ц і в а с ц ю і н в а р ы я н т н а с ц і ф о р м ы Д. першага парадку. Д. в ы ш э й ш ы х п а р а д к а ў можна вызначыць па індукцыі: $D^2f(x_0)(h)^2 = f''(x_0)h^2$, $D^3f(x_0)(h)^3 = f'''(x_0)h^3$, ..., $D^nf(x_0)(h)^n = f^{(n)}(x_0)h^n$. У класічных абазначэннях Ляйбніца выраз для Д. n-га парадку мае выгляд $d^ny = df^{(n)}(x_0)$. Д. вышэйшых парадкаў ужо не маюць уласцівасці інварыянтнасці. Д. вышэйшых парадкаў уваходзяць у формулу Тэйлара

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{Df(x_0)(h)}{1!} + \ldots + \frac{D^nf(x_0)(h)^n}{n!} + r_n(x_0,h),$$

з якой, у прыватнасці, можна атрымаць набліжаныя роўнасці больш дакладныя, чым (2).

ДЫФЕРЭНЦЫЯ́ЛЬНАЕ ЗЛІЧЭ́ННЕ — раздзел матэматыкі, які вывучае спосабы вылічэння вытворных і дыферэнцыялаў і іх выкарыстанне пры даследаванні паводзін функцый. Разам з інтэгральным злічэннем уваходзіць у курс матэматычнага аналізу. Стварэнне Д.з. як самастойнага раздзела матэматыкі належыць А.Ньютану і Г.Ляйбніцу (17 ст.). А.Ньютан браў за аснову паняцце вытворнай як хуткасці руху. Г.Ляйбніц зыходзіў з задач будавання датычных і вызначэння экстрэмумаў. Тэрміналогія і абазначэнні, прынятыя ў матэматычным аналізе, належаць Г.Ляйбніцу. Няхай функцыя рэчаіснай зменнай $y = f(x)$ вызначаная ў нейкім наваколлі пункта x_0. Вытворнай функцыі $f(x)$ у пункце x_0 называецца ліміт

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

калі ён існуе. Існаванне вытворнай у пункце x_0 неабходнае і дастатковае для таго, каб функцыя $f(x)$ была дыферэнцавальнай у гэтым пункце. Пры гэтым яе дыферэнцыял вылічаецца паводле формулы $df(x_0) = f'(x_0)\,dx$, дзе $dx = \Delta x$ — прырост незалежнай зменнай. Такім чынам, $f' = \frac{df}{dx}$. Геаметрычны сэнс вытворнай: $f'(x_0)$ ёсць тангенс вугла нахілу датычнай да графіка функцыі $y = f(x)$ у пункце $(x_0, f(x_0))$ (гл. рыс. на с. 119). Будаванне датычных — адна з крыніц адкрыцця Д.з. Задача пошуку хуткасці руху — другая крыніца адкрыцця Д.з. Усякая дыферэнцавальная функцыя — непарыўная; адваротнае не заўсёды мае месца: непарыўная функцыя можа не быць дыферэнцавальнай ні ў адным пункце. Калі $f'(x)$ сама ёсць дыферэнцавальная функцыя, для яе таксама можна знаходзіць вытворную. Так узнікаюць вытворныя вышэйшых парадкаў: другая, трэцяя і г.д. Абазначаюцца яны $f''(x), f'''(x), \ldots, f^{(n)}(x)$ або

$$\frac{d^2f}{dx^n}, \frac{d^3f}{dx^3}, \ldots, \frac{d^nf}{dx^n}.$$

Вытворныя вышэйшых парадкаў выкарыстоўваюцца пры раскладанні функцый у ступеневыя шэрагі і ў іншых пытаннях. Метады Д.з. ужываюцца таксама для вывучэння функцый некалькіх зменных. У гэтым выпадку вызначаюцца частковыя вытворныя па кожнай незалежнай зменнай. Напрыклад, для функцыі дзвюх зменных $z = f(x, y)$ частковымі вытворнымі на x і y з'яўляюцца

$$\frac{\partial z}{\partial z} = z'_x = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y)-f(x,y)}{\Delta x};$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_y = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x, y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}.$$

Дыферэнцыял гэтай функцыі роўны $dz = z'_x dx + z'_y dy$. З дапамогай вытворных вызначаюць інтэрвалы нарастання і спадання функцый, а таксама будуюць графікі. Калі $f'(x) > 0$ на нейкім інтэрвале, то функцыя $f(x)$ нарастае на гэтым інтэрвале. Калі $f'(x) < 0$, то $f(x)$ спадае. У пункце максімуму нарастанне функцыі мяняецца на спаданне, у пункце мінімуму — наадварот. Мінімумы і максімумы называюцца э к с т р э м у м а м і (лакальнымі) функцыі. Калі функцыя дыферэнцавальная ў нейкім пункце і мае там экстрэмум, то яе вытворная ў гэтым пункце роўная нулю. Задача пошуку экстрэмуму была трэцяй крыніцай адкрыцця Д.з.

ДЫФЕРЭНЦЫЯ́ЛЬНА-РО́ЗНАСЦЕВАЕ РАЎНА́ННЕ — раўнанне, якое звязвае аргумент, функцыю, яе прырост і вытворныя.

ДЫФЕРЭНЦЫЯ́ЛЬНАЯ ГЕАМЕ́ТРЫЯ — раздзел геаметрыі, у якім вывучэнне геаметрычных аб'ектаў заснаванае на ўжыванні дыферэнцыяльнага злічэння. Узнікла ў 18 ст. як дастаса-

ванне матэматычнага аналізу (працы Л.Ойлера і Г.Монжа). Садзейнічала развіццю асноўных паняццяў матэматычнага аналізу. Пачатковымі аб'ектамі даследавання ў Д.г. былі крывыя і паверхні, пераважна іх лакальныя ўласцівасці. Тэорыя крывых заснаваная на ўжыванні суправаджальнага трохгранніка (р э п е р а Ф р э н э). У дачыненні да рэпера Фрэнэ адвольная крывая задаецца сістэмаю лінейных дыферэнцыяльных раўнанняў, вызначаных крывінёю і кручэннем. Асновы тэорыі паверхняў заклаў Ф.Гаўс у пачатку 19 ст. Ён пабудаваў нутраную геаметрыю паверхняў, якая вызначаецца першай квадратовай формай паверхні, і ўвёў поўную (гаўсаву) крывіню паверхні. Адно з важных дасягненняў Д.г. — доказ несупярэчлівасці геаметрыі Лабачэўскага, заснаваны на мадэлі, у якой простымі з'яўляюцца геадэзічныя лініі на паверхні псеўдасферы. Геаметрыя Лабачэўскага садзейнічала развіццю паняцця прасторы, якому ў сучаснай Д.г. адпавядае паняцце мнагастайнасці. Важныя раздзелы Д.г. складаюць даследаванні рыманавых мнагастайнасцяў і іншых структур на мнагастайнасцях. Адна з такіх структур — афінная злучнасць, якая абагульняе паняцце паралельнага пераносу ў эўклідавай прасторы. Тэорыя злучнасцяў знаходзіць дастасаванне ў тэарэтычнай фізіцы. З дапамогаю палёў крывіні злучнасці інтэрпрэтуюцца розныя фізічныя палі. На падставе злучнасцяў будуецца таксама тэорыя характарыстычных класаў. Сучасны этап у развіцці Д.г. характарызуецца ўжываннем тэорыі спластаваных прастораў і груп Лі, а таксама новых метадаў алгебры, тапалогіі і аналізу.

ДЫФЕРЭНЦЫЯ́ЛЬНАЯ ТАПАЛО́ГІЯ — раздзел тапалогіі, які вывучае тапалагічныя праблемы тэорыі дыферэнцыяльных мнагастайнасцяў. У прыватнасці, Д.т. займаецца вывучэннем дыферэнцыямарфізмаў, укладанняў і занурэнняў. У Д.т. узніклі і набылі вельмі важнае агульнаматэматычнае значэнне такія кірункі, як спластаваныя прасторы, і такія звязаныя з імі паняцці, як злучнасці структуры, аснашчаныя мнагастайнасці і інш.

Асаблівым кірункам Д.т., які мае дачыненне да варыяцыйнага злічэння, з'яўляецца глабальная тэорыя экстрэмаляў розных функцыяналаў на геадэзічных мнагастайнасцях, якая зрабіла вялікі ўплыў на развіццё самой тапалогіі. На гэтым шляху ўзнікла K-тэорыя — метад даследавання тапалагічных інварыянтаў. Другі асаблівы кірунак Д.т., звязаны з дыферэнцыяльнай геаметрыяй, — гэта тэорыя спластаванняў (цалкам інтэгравальных лакальна сістэм Пфафа). Сродкамі Д.т. удалося развязаць шэраг цяжкіх задач, як, напрыклад, задачы ўкладання рыманавых прастораў у эўклідавы. У апошнія два дзесяцігоддзі значна павялічылася колькасць дастасаванняў ідэй Д.т. да фізікі, у прыватнасці ў тэорыі элементарных часцінак, тэорыі вадкіх крышталяў, фазавых пераходаў і інш.

ДЫФЕРЭНЦЫЯ́ЛЬНЫ АПЕРА́ТАР — абагульненне аператара дыферэнцавання. Напрыклад, левую частку дыферэнцыяльнага раўнання можна разглядаць як Д.а., які ставіць кожнай функцыі ў адпаведнасць новую функцыю. Найболей даследаваны клас лінейных Д.а. Няхай Ω — сукупнасць функцый $y(x)$ на адрэзку $[a, b]$, якія маюць вытворныя да n-га парадку і задавальняюць межавыя ўмовы

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k^j y^{(k)}(a) + \beta_k^j y^{(k)}(b) = 0.$$

Звычайны Д.а. задаецца формулай

$$D(y) = \sum_{k=0}^{n} p_k(x) y^{(k)}(x)$$

на функцыях Ω; прычым Ω называецца абсягам вызначэння Д.а. Дыферэнцыяльны аператар задаецца не толькі адной формулай, а формулай разам з межавымі ўмовамі. Тэорыя Д.а. як частка агульнай тэорыі аператараў набывае апошнім часам усё большае значэнне не толькі ў тэорыі дыферэнцыяльных раўнанняў, але і наогул у сучасным аналізе.

ДЫФЕРЭНЦЫЯ́ЛЬНЫ БІНО́М, б і н о м н ы д ы ф е р э н ц ы я л — выраз выгляду $x^m(a + bx^n)^p dx$, дзе a, b — рэчаісныя, m, n, p — рацыянальныя лікі. Нявызначаны інтэграл ад Д.б. $\int x^m(a+bx^n)^p dx$ зводзіцца да інтэграла ад рацыянальных функцый у выпадку, калі хоць бы адзін з лікаў p, $(m+1)/n$, $(m+1)/n+p$ цэлы. П.Чабышоў (1853) паказаў, што ва ўсіх астатніх выпадках інтэграл ад Д.б. не выражаецца праз элементарныя функцыі.

ДЫФЕРЭНЦЫЯ́ЛЬНЫЯ ГУ́ЛЬНІ — раздзел матэматычнай тэорыі кіравання, які вывучае кіраванне ў канфліктных сітуацыях і кіраванне з гарантаваным вынікам ва ўмовах нявызначанасці. Узніклі на стыках тэорыі гульняў, дыферэнцыяльных раўнанняў, аўтаматычнага кіравання. У Д.г.

удзельнічаюць два і больш гульцоў. У асноўным змястоўныя вынікі ў тэорыі Д.г. атрыманы для гульняў з двума гульцамі. Апісанне такой Д.г. улучае дынамічную сістэму з вонкавым кіроўным уздзеяннем, пры гэтым адна частка ўздзеянняў падпарадкавана аднаму гульцу, а другая частка — другому. Гульцы, як правіла, інфармаваныя толькі пра цяперашні стан дынамічнай сістэмы і маюць процілеглыя мэты, якія, у сваю чаргу, фармалізуюцца з дапамогай гэтак званай платы гульні — функцыянала, зададзенага на мностве станаў Д.г. Першы гулец, напрыклад, мінімізуе функцыянал, а другі гулец максімізуе гэты функцыянал.

Тыповы прыклад Д.г. — гульня пераслед — ухіленне. Гульня апісваецца сістэмай дыферэнцыяльных раўнанняў:

$$\dot{y} = f_1(t, y, z, u), \quad \dot{z} = f_2(t, y, z, v),$$

дзе $y = (y_1, ..., y_n)$, $z = (z_1, ..., z_n)$, (y, z) — вектар стану дынамічнай сістэмы, u і v — кіроўныя ўздзеянні першага і другога гульцоў адпаведна. Платай у гэтай гульні з'яўляецца час да супадзення (сустрэчы) вектараў z, y.

ДЫФЕРЭНЦЫЯ́ЛЬНЫЯ РАЎНА́ННІ — раўнанні, якія змяшчаюць невядомыя функцыі, іх вытворныя адвольных парадкаў і незалежныя зменныя. Увялі ў матэматыку стваральнікі злічэння бясконца малых А.Ньютан і Г.Ляйбніц (17 ст.). Сістэматычнае вывучэнне пачаў Л.Ойлер (18 ст.). У 19 ст. Д.р. сталі самастойнай матэматычнай дысцыплінай. Заснавальнікі сучаснай тэорыі Д.р. — А.Ляпуноў, У.Сцяклоў і інш.

Да прыкладу, змена масы m радыеактыўнага рэчыва з каэфіцыентам распаду k за прамежак часу dt выражаецца Д.р.

$$dm = kmdt. \qquad (1)$$

Тэмпература $u = u\ (x, y, z)$, што ўсталявалася ў кожным пункце (x, y, z) цела, на мяжы якога падтрымліваецца зададзены цеплавы рэжым, праўдзіць Д.р.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \qquad (2)$$

Д.р. выгляду (1) — з в ы ч а й н а е Д. р. (змяшчае функцыю адной зменнай), выгляду (2) — Д.р. у ч а с т к о в ы х в ы т в о р н ы х (змяшчае вытворныя невядомай функцыі па розных зменных). П а р а д а к Д. р. вызначаецца вытворнай найвышэйшага парадку ў гэтым раўнанні. Кожнае Д.р. вызначае адразу цэлую сям'ю р а з в я з к а ў, залежную ад лікавых ці функцыйных параметраў; яна выражае пэўны агульны закон, якому падпарадкоўваецца мноства канкрэтных працэсаў. Для вылучэння асобнага працэсу задаюць дадатковыя ўмовы, найчасцей — к р а я в ы я (п а ч а т к о в ы я і м е ж а в ы я). У прыватнасці, для развязання (1) задаецца пачатковае значэнне — маса $m\ (0) = m_0$. Развязанне (2) вызначаецца, напрыклад, межавымі значэннямі — размеркаваннем тэмпературы на паверхні цела. Звычайнае лінейнае Д.р. або сістэму гладкіх Д.р. шляхам увядзення дапаможнай функцыі можна запісаць у выглядзе $x' = P\ (t) + \Phi\ (t)$, дзе P — матрыца каэфіцыентаў, Φ — вектар вольных складнікаў, $x = x\ (t)$ — вектар-функцыя. Калі Y — квадратная матрыца, якая складаецца з незалежных развязкаў адпаведнай аднароднай сістэмы ($\Phi \equiv 0$), а x^* — адзін з развязкаў прыведзенага Д.р., тады ўсе яго развязкі дае формула $x = x^* + Yc$, дзе c — адвольны сталы вектар. У шэрагу выпадкаў, напрыклад пры сталай P, будаванне x^* і Y зводзіцца да алгебраічных аперацый і інтэгравання. Існуюць і нелінейныя Д.р., якія развязваюцца пры дапамозе концага ліку простых аналітычных аперацый. Напрыклад, калі $M_y' = N_x'$, тады ўсе развязкі $M(x, y)\,dx + N(x, y) = 0$ дае формула $\int M\ (x, y)\,dx + N\ (x, y) = c$, дзе c — адвольная канстанта. Калі Д.р. зададзена з дапамогай аналітычных функцый, тады развязак таксама ёсць аналітычная функцыя, якая раскладаецца ў ступеневы шэраг у наваколлі кожнага неасаблівага пункта і знаходзіцца метадам нявызначаных каэфіцыентаў. Вызначэнне развязку Д.р. ці сістэмы Д.р. $x' = f\,(t, x)$ з зададзенай пачатковай умовай $x\ (t_0) = x_0$ раўназначнае развязанню інтэгральных раўнанняў тыпу

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f[s, x(s)]\,ds. \qquad (3)$$

Калі $x\ (t)$ — непарыўная функцыя, то (3) мае хаця б адзін развязак. Калі, акрамя гэтага, непарыўная $f\,(x)$, то развязак (3) адзіны і яго можна знайсці з дапамогай ітэрацый. Метад ітэрацый разам з метадам падзелу зменных, з метадам малога параметра і інш. ужываецца і ў Д.р. з частковымі вытворнымі. Набліжаны развязак Д.р. атрымліваюць, замяняючы ў Д.р. вытворныя праз тасунак прыростаў і пераходзячы да раўнанняў у канцых рознасцях. Тэорыя Д.р. выкарыстоўваецца ў варыяцыйным злічэнні, у тэорыі аптымальных працэсаў, у тэорыі кіравання рухам і ў большасці раздзелаў дастасоўнай матэматыкі. Вывучэнне краявых задач для Д.р. з частковымі вытворнымі — галоўная частка матэматычнай фізікі.

Сістэматычныя даследаванні па Д.р. у Беларусі пачаліся з сярэдзіны 50-х гг. пасля прыезду ў Мінск акад. М.Яругіна. За сорак гадоў працы Д.р. сталі буйнейшай галіной беларускай матэматыкі, у якой створаны вядомыя школы акадэмікаў М.Яругіна, Я.Барбашына, І.Гайшуна, М.Ізобава. З 1965 г. у Беларусі выдаецца шырока вядомы ў свеце часопіс "Дыферэнцыяльныя раўнанні".

Атрыманы буйныя вынікі па аналітычнай і якаснай тэорыі Д.р. устойлівасці, сістэмах Пфафа, нелінейных Д.р., раўнаннях Пэнлевэ, устойлівасці дынамічных сістэм, праблеме цэнтра і фокуса, класіфікацыі лімітавых цыклаў, тэорыі пераўтварэнняў Ляпунова, абагульненых характарыстычных лікаў, хваляў, вылічальных метадах Д.р. (акадэмікі М.Яругін, Я.Барбашын, У.Крылоў, І.Гайшун, М.Ізобаў, чл.-кар. І.Груда, чл.-кар. Я.Іваноў, У.Амелькін, Ю.Багданаў, В.Борухаў, В.Громак, М.Дымкоў, А.Іваноў, С.Кандраценя, В.Лапцінскі, М.Лукашэвіч, С.Мазанік, І.Мартынаў, А.Садоўскі, Л.Чэркас, А.Яблонскі).

ДЫФЕРЭНЦЫЯ́ЛЬНЫЯ РАЎНА́ННІ ЗВЫЧА́ЙНЫЯ — раўнанні, у якіх невядомая функцыя ёсць функцыя адной камплекснай зменнай. У такія раўнанні ўваходзяць невядомая функцыя і яе вытворная парадкаў $\overline{1,n}$, $n \geq 1$. Найбольшы парадак $n \geq 1$, які ў яўным выглядзе прысутнічае ў раўнанні, называецца парадкам Д.р.з. Д.р.з. — апарат вывучэння многіх задач прыродазнаўства, тэхнікі, эканомікі; выкарыстоўваюцца ў механіцы, астраноміі, фізіцы, хіміі, біялогіі, экалогіі, эканоміцы, радыё- і электратэхніцы, машынабудаванні і інш. Аб'ектыўныя законы рэальных з'яваў апісваюцца ў форме Д.р.з., а самі раўнанні — гэта сродкі колькаснага выяўлення гэтых законаў.

Функцыя, якая задае Д.р.з., можа быць яўнай і няяўнай. Яўнае заданне Д.р.з. разумеюць як раўнанне, зададзенае ў дачыненні да найвышэйшай вытворнай n, а ў другой частцы раўнання можа быць толькі незалежная зменная, невядомая функцыя і яе вытворная парадку ніжэй за n. Д.р.з., зададзенае ў няяўнай форме, можа быць у выглядзе некалькіх раўнанняў яўных. Геаметрычна развязак Д.р.з. у выпадку рэчаіснай зменнай — гэта крывая, а ў выпадку камплекснай зменнай — аналітычная функцыя на камплекснай плоскасці. Развязак Д.р.з. парадку $n \geq 1$ залежыць ад n адвольных канстантаў і называецца агульным развязкам. Калі адвольныя канстанты зафіксаваны — развязак называецца частковым. Але для некаторых Д.р.з. бываюць развязкі, якія не атрымліваюцца з агульнага развязку, яны знаходзяцца на мяжы абсягу існавання і адзінасці агульнага развязку і называюцца асаблівымі развязкамі. Абсяг існавання і адзінасці развязкаў Д.р.з. складаюць пункты, у якіх пры зададзеных пачатковых умовах існуе адзін і толькі адзін развязак пры замацаваных значэннях незалежнай зменнай, функцыі з яе вытворнымі да $n-1$ парадку.

ДЫФУЗІ́ЙНЫ ПРАЦЭ́С — непарыўны *Маркава працэс* $x = x(t)$ з пераходнай шчыльнасцю $p(s, x, t, g)$, які адпавядае ўмовам: існуюць функцыі $a(t, x)$, $\sigma^2(t, x)$ (каэфіцыенты зносу і дыфузіі адпаведна), што для кожнага $\varepsilon > 0$ праўдзяцца роўнасці

$$\left(\int (y-x) >\right) \int_{|y-x|<\varepsilon} p(t,x,t+\Delta t, y)\,dy = O(\Delta t),$$

$$\int_{|y-x|\leq\varepsilon} (y-x)p(t,x+\Delta x, y)\,dy = a(t,x) + O(\Delta t),$$

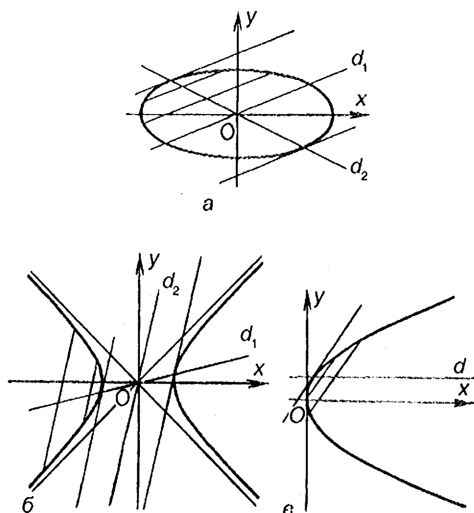
$$\int_{|y-x|\leq\varepsilon} (y-x)^2 p(t,x,t+\Delta t, y)\,dy = \sigma^2(t,x) + O(\Delta t).$$

Найбольш распаўсюджаны клас Д.п. — *браўнава руху працэс* — першая матэматычная мадэль працэсаў дыфузіі (адсюль найменне Д.п.).

ДЫЯГАНА́ЛЬ (ад грэц. diagonios — які ідзе ад вугла да вугла) — 1) Д. у многавугольніку — адрэзак простай, які злучае дзве яго вяршыні, што не належаць адной старане. Пры колькасці вяршыняў многавугольніка n колькасць Д. ёсць $n(n-3)/2$; 2) Д. у мнагагранніку — адрэзак простай, які злучае дзве яго вяршыні, што не належаць да адной грані. Тэрмін Д. сустракаецца ў Эўкліда (3 ст. да н.э.).

ДЫЯГАНА́ЛЬНАЯ МА́ТРЫЦА — квадратная матрыца $\| a_{ij} \|$, у якой усе элементы, размешчаныя па-за галоўнай дыяганаллю, роўныя нулю ($a_{ij} = 0$ пры $i \neq j$). Вызначнік Д.м. роўны здабытку ўсіх элементаў на галоўнай дыяганалі. Д.м., у якой на дыяганалі стаяць элементы $a_{ii} = a_i$, абазначаецца $\mathrm{diag}(a_1, ..., a_i, ..., a_n)$. Калі ўсе элементы дыяганалі роўныя паміж сабою, матрыца называецца скалярнай.

ДЫЯ́МЕТР (ад грэц. diametros — папярэчнік) — 1) Д. акружыны (круга) — хорда, якая праходзіць праз цэнтр акружыны, таксама даўжыня гэтай хорды; 2) Д. лініі другога парадку — простая, якая праходзіць праз сярэдзіны пара-



лельных хордаў гэтай лініі (гл. рыс., *а—в*). Паняцце Д. як даўжыні адпаведнага адрэзка распаўсюджваецца на іншыя геаметрычныя фігуры і на мноствы агульнай прыроды.

ДЫЯФА́НТАВА ГЕАМЕ́ТРЫЯ, дыяфантаў аналіз — раздзел матэматыкі, які вывучае цэлалікавыя і рацыянальныя развязкі алгебраічных раўнанняў метадамі алгебраічнай геаметрыі. Найбольш поўна ў Д.г. даследавана пытанне пра развязкі алгебраічнага раўнання $f(x, y) = 0$, дзе f — абсалютна непрыводны мнагасклад ад дзвюх зменных x і y з рацыянальнымі каэфіцыентамі. Калі f — мнагасклад першай ступені, то мноства рацыянальных развязкаў бясконцае і параметрызуецца рацыянальнымі лікамі. Пытанне пра існаванне хоць бы аднаго рацыянальнага развязку раўнання другой ступені развязваецца з дапамогай прынцыпу Хасэ. Калі раўнанне $f(x, y) = 0$ задае алгебраічную крывую роду, большага за 1, то колькасць яго рацыянальных развязкаў канцая (Г.Фалтынгс, 1983). Для вывучэння цэлалікавых развязкаў раўнання выкарыстоўваецца тэорыя *дыяфантавых набліжанняў*. Разглядаюцца таксама шматлікія абагульненні Д.г. на палі алгебраічных лікаў і на палі алгебраічных функцый ад адной зменнай.

ДЫЯФА́НТАВЫ НАБЛІ́ЖАННІ — раздзел тэорыі лікаў, у якім вывучаюцца набліжанні рэчаісных лікаў рацыянальнымі лікамі, а таксама шматлікія абагульненні гэтай задачы. У Д.н. выкарыстоўваюцца сродкі геаметрыі лікаў, аналітычныя метады. Першыя вынікі ў Д.н. атрыманыя з дапамогай *непарыўных дробаў*, *Фарэя паслядоўнасцяў* і *Дырыхле прынцыпу*. Для аднародных Д.н. мае значэнне Мінкоўскага тэарэма пра лінейныя формы. У неаднародным выпадку вядомая Кронэкера тэарэма: калі $\alpha_1, ..., \alpha_n$ — рэчаісныя лікі, для якіх роўнасць $a_1\alpha_1 + ... + a_n\alpha_n = 0$ з цэлымі $a_1, ..., a_n$ магчымая толькі пры $a_1 = ... = a_n = 0$, а $\beta_1, ..., \beta_n$ — некаторыя рэчаісныя лікі, то $\forall\varepsilon > 0$ можна знайсці лік $t \in \mathbf{Z}$ і такія цэлыя лікі $x_1, ..., x_n$, што праўдзіцца няроўнасць $|t\alpha_k - \beta_k - x_k| < \varepsilon$, $k = 1, ..., n$. З дапамогай Д.н. Ж.Ліўвіль (1844) упершыню канструктыўна пабудаваў прыклад трансцэндэнтнага ліку. Тэорыя Д.н. скарыстоўваецца ў метадах развязання *дыяфантавых раўнанняў*. Значны ўклад у развіццё Д.н. зрабіў беларускі матэматык У.Спрынджук.

ДЫЯФА́НТАВЫ РАЎНА́ННІ — алгебраічныя раўнанні або сістэмы алгебраічных раўнанняў з цэлымі каэфіцыентамі, у якіх адшукваюцца цэлыя ці рацыянальныя развязкі. Назоў паходзіць ад прозвішча матэматыка Дыяфанта, які вывучаў такія раўнанні. Д.р. першай ступені $ax + dy = 1$ пры ўзаемна простых a і b мае бясконцае мноства развязкаў, іх выгляд $x = x_0 + bn$, $y = y_0 - an$, дзе x_0, y_0 — які-небудзь развязак раўнання, n — цэлы лік. Д.р. другой ступені таксама можа мець бясконцае мноства развязкаў, напрыклад раўнанне Пэля $x^2 - Ay^2 = 1$ ($A > 0$, A — няпоўны квадрат). Вядомае раўнанне Туэ $a_0x^n + a_1x^{n-1}y + ... + a_ny^n = A$ пры $n \geq 3$, цэлым A і непрыводным у полі рацыянальных лікаў мнагаскладзе $a_0 t^n + ... + a_n$ не можа мець бясконцай колькасці развязкаў (гл. *Фэрма вялікая тэарэма)*.

ДЫЯФА́НТАВЫХ НАБЛІ́ЖАННЯЎ МЕТРЫ́ЧНАЯ ТЭО́РЫЯ — раздзел тэорыі лікаў, у якім вывучаюцца метрычныя ўласцівасці лікаў, вылучаных той ці іншай ступенню апраксімацыі. Тыповы вынік Д.н.м.т. — тэарэма Хінчына: няроўнасць $|q\alpha - p| < \varphi(q)$ для амаль усіх α мае бясконцае мноства развязкаў у цэлых p, q, калі шэраг $\sum_{q=1}^{\infty}\varphi(q)$ разбежны, і толькі канцае мноства развязкаў у выпадку збежнасці шэрагу. У будаванне Д.н.м.т. значны ўклад зрабілі беларускія матэматыкі, якія развязалі *Малера праблему*, праблемы Бэйкера, абагульнілі тэарэму Хінчына.

ДЫЯФА́НТАЎ АНА́ЛІЗ — тое, што *дыяфантава геаметрыя*.

ДЭДУ́КЦЫІ ТЭАРЭ́МА — агульнае найменне шэрагу тэарэм, якія дазваляюць вызначыць даказальнасць імплікацый $A \supset B$ у выпадку, калі зададзена лагічнае вывядзенне формулы B з формулы A. У найбольш простых выпадках класічнага злічэння выказванняў Д.т. сцвярджае: калі $\Gamma, A \mapsto B$ (з дапушчэннеў Γ, A выводзіцца B), то $\Gamma \mapsto A \supset B$ (Γ можа быць пустое). Пры наяўнасці квантараў аналагічнае сцверджанне няправільнае: $A(x) \mapsto \forall x\, A(x)$, аднак не $\mapsto A(x) \supset \forall x\, A(x)$. Адна з фармулёвак Д.т. для традыцыйных злічэнняў прэдыкатаў (класічнага, інтуіцыйнага і г.д.): калі $\Gamma, A \mapsto B$, то $\Gamma \mapsto (\forall A \subset B)$, дзе $\forall A$ — вынік прыпісвання $\forall$-квантараў па ўсіх вольных зменных формулы A. У прыватнасці, калі A — замкнёная формула, Д.т. набывае форму $\Gamma \mapsto (A \supset B)$. Такая фармулёўка Д.т. дае магчымасць зводзіць вывядзенне ў аксіяматычных тэорыях да вывядзення ў злічэнні прэдыкатаў: формула выводзіцца з аксіём A_1, ..., A_n, калі і толькі калі ў злічэнні прэдыкатаў выводзіцца формула $\forall A_1 \supset (\forall A_2 \supset \ldots \supset (\forall A_n \supset B)\ldots)$.

ДЭДУКЦЫ́ЙНАЕ ПРА́ВІЛА— тое, што *вывядзення правіла*.

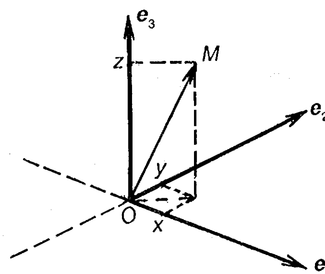
ДЭ́ДЭКІНДАВА АКСІЁМА — адна з аксіём непарыўнасці мноства рэчаісных лікаў: для кожнага сечыва $A \mid B$ мноства рэчаісных лікаў існуе рэчаісны лік α, найбольшы ў класе A або найменшы ў класе B. Лік α — дакладная верхняя мяжа мноства A і дакладная ніжняя мяжа мноства B. Д.а. выкарыстоўваецца ў аксіяматычным будаванні тэорыі рэчаісных лікаў. Д.а. можа быць замененая на раўназначнае сцверджанне (напрыклад, на аксіёму поўнасці або аксіёму існавання дакладнай верхняй мяжы мноства, абмежаванага зверху). У гэтым выпадку Д.а. выводзіцца з іншых аксіём і называецца д э д э к і н д а в а й т э а р э м а й.

ДЭ́ДЭКІНДАВА КО́ЛЦА — асацыятыўнае камутатыўнае колца з адзінкай, у якім няма дзельнікаў нуля і ў якім кожны ўласны ідэал можа быць пададзены як здабытак концай колькасці простых ідэалаў. Для кожнага ўласнага ідэалу Д.к. характэрнае адзінае такое выяўленне. У прыватнасці, колцы цэлых алгебраічных лікаў ёсць Д.к. Адвольнае колца галоўных ідэалаў — дэдэкіндава. Названая ў гонар Р.Дэдэкінда, які вывучаў пытанні раскладання цэлых алгебраічных лікаў на простыя множнікі.

ДЭ́ДЭКІНДАВА СЕ́ЧЫВА — падзел мноства рэчаісных (або адных рацыянальных) лікаў R на непустыя класы A і B такія, што: 1) $R = A \cup B$; 2) $a < b$, $\forall a \in A$, $\forall b \in B$. Д.с. абазначаецца $A \mid B$, выкарыстоўваецца для будавання аксіяматычнай тэорыі лікаў (Р.Дэдэкінд, 1872). Калі рацыянальны лік r утварае сечыва $A \mid B$ такім чынам, што клас A змяшчае ўсе лікі a, $a < r$, клас B — усе лікі b, $b > r$ (сам лік r можа належаць класу A або класу B), то гэты лік r называюць м я ж о ю с е ч ы в а $A \mid B$.

ДЭКАДАВА́ННЕ — працэс, адваротны да *кадавання* інфармацыі. Здзяйсняецца, зыходзячы з запісу інфармацыі ў закадаваным выглядзе.

ДЭКА́РТАВА СІСТЭ́МА КААРДЫНА́Т — сістэма каардынат пунктавай эўклідавай прасторы. Задаецца пунктам O (пачатак каардынат) і трыма некампланарнымі адзінкавымі вектарамі e_1, e_2, e_3 (базіснымі вектарамі). Простая лінія, што праходзіць праз пункт O у кірунку вектара e_1, называецца в о с с ю Ox (або в о с с ю а б ц ы с). Простая лінія, якая праходзіць праз пункт O у кірунку вектара e_2, — в о с ь Oy (в о с ь а р д ы н а т) і ў кірунку e_3 — в о с ь Oz (в о с ь а п л і к а т) адпаведна. Д.с.к. мае абазначэнне $\{0; e_1, e_2, e_3\}$ або $Oxyz$. Д э к а р т а в ы м і к а а р д ы н а т а м і п у н к т а M (гл. рыс.) называецца тройка ўпарадкаваных лікаў (x, y, z), якія з'яўляюцца каэфіцыентамі раскладу вектара OM у базісе $\{e_1, e_2, e_3\}$: $\vec{OM} = xe_1 + ye_2 + ze_3$. Лікі x, y, z называюць адпаведна а б ц ы с а й, а р д ы н а т а й і а п л і к а т а й п у н к т а M, які запісваецца ў выглядзе $M(x, y, z)$.



Плоскасці, што праходзяць праз пару восяў, называюцца к а а р д ы н а т н ы м і п л о с к а с ц я м і. Аналагічна вызначаецца і а г у л ь н а я д э к а р т а в а с і с т э м а к а а р д ы н а т (а ф і н н а я с і с т э м а к а а р д ы н а т) заданнем пункта O і базісных вектараў e_1, e_2, e_3. Калі вектары e_1, e_2, e_3 узаемна перпендыкулярныя, то Д.с.к. называецца п р а м а в у г о л ь н а й с і с т э м а й к а а р д ы н а т.

ДЭКА́РТАВЫ КААРДЫНА́ТЫ — гл. *Дэкартава сістэма каардынат.*

ДЭКА́РТАЎ ЗДАБЫ́ТАК д в у х м н о с т в а ў — мноства $X_1 \times X_2$ для непустых мностваў X_1, X_2, якое складаецца з усіх упарадкаваных параў выгляду (x_1, x_2), дзе $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$: $X_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}$. Калі хоць адно з мностваў X_1 або X_2 пустое, Д.з. ёсць пустое мноства. Д.з. некалькіх мностваў азначаецца індукцыйна:

$$\prod_{i=1}^{1} X_i = X_1; \; \prod_{i=1}^{2} X_i = X_1 \times X_2;$$

$$\prod_{i=1}^{n} X_i = \prod_{i=1}^{n-1} X_i \times X_n.$$

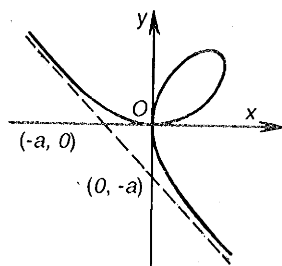
Д.з. называюць таксама п р а м ы м з д а б ы т к а м.

ДЭКА́РТАЎ ЛІСТ — плоская алгебраічная крывая, раўнанне якой у прамавугольнай дэкартавай сістэме каардынат мае выгляд $x^3 + y^3 = 3axy$ (рыс.). Д.л. — крывая 3-га парадку. Д.л. можна задаць параметрычнымі раўнаннямі

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \; y = \frac{3at^2}{1+t^3},$$

дзе t — тангенс вугла паміж радыусам-вектарам і воссю Ox. Палярнае раўнанне Д.л. мае выгляд

$$\rho = \frac{3a\cos\varphi \sin\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi}.$$



Д.л. сіметрычны ў дачыненні да простай $y = x$. Датычныя ў пунктах $(a\sqrt[3]{2}, a\sqrt[3]{4})$ і $(a\sqrt[3]{4}, a\sqrt[3]{2})$ паралельныя каардынатным восям. Пачатак каардынат ёсць вузлавы пункт Д.л. Восі каардынат $x = 0$ і $y = 0$ — датычныя да Д.л. у вузлавым пункце. Крывая перасякае сама сябе ў пачатку каардынат пад прамым вуглом. Простая $x + y + a = 0$ ёсць асімптота. Плошча паміж крывой і асімптотай $S = 3/2a^2$. Плошча пятлі $S = 3/2a^2$. Д.л. як крывую, якая мае пэўныя ўласцівасці, упершыню разглядаў у 1638 г. Р.Дэкарт. Форму Д.л. высветліў Ж.Раберваль. Канчатковую форму крывой разам з яе асімптотай вызначылі ў канцы 17 ст. Х.Гюйгенс і Ё.Бэрнулі.

ДЭ́ЛЬТА-ФУ́НКЦЫЯ — функцыя $\delta(x)$, якая дазваляе запісаць прасторавую шчыльнасць фізічнай велічыні (маса, зарад, інтэнсіўнасць крыніцы цяпла), што сканцэнтраваная ў пункце прасторы. Увёў П.Дырак у працах па квантавай механіцы. Д.-ф. азначаная П.Дыракам як функцыя, для якой праўдзіцца роўнасць $\int_{R^n} f(x-a)f(x)dx = f(a)$ пры ўсякай непарыўнай функцыі f. Паколькі не існуе лакальна інтэгравальнай функцыі $\delta(x)$, якая задавальняла б дадзеную роўнасць, то δ-функцыя была названая а б а г у л ь н е н а й. З гледзішча тэорыі абагульненых функцый δ-функцыя — гэта абагульненая функцыя нулявога парадку сінгулярнасці, г.зн. яна ёсць непарыўны лінейны функцыянал на прасторы гладкіх функцый і задаецца формулай $(\delta, y) = y(0)$. Носіць яшчэ назоў δ-ф у н к ц ы я, δ-ф у н к ц ы я Д ы р а к а.

ДЭ́НА ТЭАРЭ́МА — куб і роўны яму па аб'ёме правільны тэтраэдр не з'яўляюцца раўнаскладзенымі. Тэарэма даказана М.Дэнам (1901). Гл. *Роўнавялікія і раўнаскладзеныя фігуры.*

ДЭСКРЫПТЫ́ЎНАЯ ТЭО́РЫЯ МНО́СТВАЎ — раздзел тэорыі мностваў, які вывучае нутраное будаванне мностваў у залежнасці ад тых аперацый, пры дапамозе якіх гэтыя мноствы пабудаваныя з іншых, больш простых. Пад аперацыямі разумеюць *аб'яднанне*, перасячэнне, *дапаўненне* і г.д. Першым аб'ектам Д.т.м. былі *барэлевы мноствы*. Найбольш значны ўклад у іх вывучэнне зрабілі расійскія матэматыкі Н.Лузін, П.Аляксандраў, М.Суслін.

ДЭТЭРМІНАВА́НЫ АЎТАМА́Т — абстрактны *аўтамат*, абедзве вызначальныя функцыі якога адназначныя.

ДЭТЭРМІНА́НТ (ад лац. determinans, родны склон determinantis — вызначальны) — тое, што *вызначнік.*

ДЭФАРМА́ЦЫЯ — падмноства A у мностве X (фігур, адлюстраванняў і г.д.), аднапараметрычная сям'я падмностваў $\{A_t\} \in X$ такая, што $A_0 = A$.

ДЭФЕ́КТ — 1) Д. л і н е й н а й м н а г а с т а й н а с ц і гільбэртавай прасторы — памернасць артаганальнага дапаўнення гэтай прасторы; 2) Д. т р о х в у г о л ь н і к а — недахоп да двух прамых вуглоў сумы нутраных вуглоў трохвугольніка на плоскасці Лабачэўскага. Найбольшае значэнне Д.

роўнае двум прамым вуглам у выпадку, калі ўсе вяршыні — бясконца аддаленыя пункты. Д. трохвугольніка прапарцыйны яго плошчы; 3) Д. м а т р ы ц ы — лік, роўны рознасці паміж лікам яе слупкоў і яе рангам; 4) Д. л і н е й н а г а а д л ю с т р а в а н н я — памернасць ядра гэтага адлюстравання. Ён роўны Д. матрыцы лінейнага адлюстравання ў адвольным базісе.

ДЭ́ЦЫЛЬ (ад лац. decem — дзесяць) — значэнне x, пры якім функцыя размеркавання $F(x)$ прымае для $j = 1, 2, ..., 9$ значэнні, роўныя $j/10$. Калі Д. існуюць, то яны даюць добрае ўяўленне пра форму крывой размеркавання. Адлегласць паміж дзевятай і першай Д. называецца і н т э р д э ц ы л ь н а й шырынёй. Д. — прыватны выпадак квантылі.

ЕНСЭНА НЯРО́ЎНАСЦЬ — няроўнасць

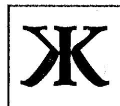
$$f\left(\frac{\lambda_1 x_1+...+\lambda_n x_n}{\lambda_1+...+\lambda_n}\right) \le \frac{\lambda_1 f(x_1)+...+\lambda_n f(x_n)}{\lambda_1+...+\lambda_n}, \qquad (1)$$

дзе $f(x)$ — *выпуклая функцыя* на нейкім мностве D, $x_i \in D$, $\lambda_i \ge 0$, $i = 1, ..., n$. Е.н. дакладная, бо ў выпадку, калі $x_1 = ... = x_n$ ці $f(x)$ —лінейная функцыя, няроўнасць (1) становіцца роўнасцю. Пры адпаведным выбары функцый $f(x)$ і лікаў λ_i з Е.н. можна атрымаць шмат іншых класічных няроўнасцяў. Напрыклад, калі $f(x) = \ln x$, $x > 0$, і $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 1/n$, то (1) пераўтвараецца ў няроўнасць паміж сярэднім арыфметычным і сярэднім геаметрычным:

$$\sqrt[n]{x_1 ... x_n} \le \frac{x_1+...+x_n}{n}.$$

Існуе шэраг абагульненняў Е.н. Названая няроўнасць у гонар дацкага матэматыка І.Енсэна, які першы разглядзеў яе інтэгральны варыянт (1906).

ЁРДАНАВА А́ЛГЕБРА — алгебра, у якой праўдзяцца тоеснасці $xy = yx$, $(x^2y)x = x^2(yx)$. Такія алгебры ўпершыню ўжыў П.Ёрдан у працах (1933), прысвечаных аксіяматызацыі асноў квантавай механікі; знайшлі дастасаванне ў алгебры, матэматычным аналізе і геаметрыі.



ЖАРДА́НАВА КЛЕ́ТКА — квадратная матрыца $I_n(\lambda)$ выгляду

$$I_n(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & ... & ... & \lambda \end{bmatrix}.$$

Гл. таксама *Жарданава матрыца.*

ЖАРДА́НАВА КРЫВА́Я — непарыўны вобраз нейкага адрэзка. Можа быць вызначаная і як мноства пунктаў $M(x, y)$ плоскасці, каардынаты якіх праўдзяць раўнанні $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ пры непарыўных функцыях аргумента t, $a \le t \le b$. Азначаная непарыўная крывая можа быць і вельмі складанай: напрыклад, праходзіць праз усе пункты якога-небудзь квадрата. Калі розным t адпавядаюць розныя пункты M, то Ж.к. называецца з в ы ч а й н а й д у г о й, а калі дадаткова пункты M пры $t = a$ і $t = b$ супадаюць, то Ж.к. называецца п р о с т ы м з а м к н ё н ы м к о н т у р а м. Першая азначаная крывая ёсць гамеаморфны вобраз адрэзка, а другая — акружыны. Кожная замкнёная Ж.к. без кратных пунктаў дзеліць плоскасць на два абсягі, адзін з якіх нутраны ў дачыненні да гэтай крывой, а другі — вонкавы (тэарэма Жардана).

ЖАРДА́НАВА МА́ТРЫЦА — матрыца выгляду

$$I = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & A_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & A_s \end{bmatrix},$$

дзе A_i, $i = 1, ..., s$ — жарданавы клеткі. Квадратная матрыца A парадку n тады і толькі тады падобная Ж.м. над полем P (г.зн. існуе такая матрыца C,

што $C^{-1}AC=I$), калі матрыца A мае ў полі P n уласных значэнняў з улікам іх кратнасці.

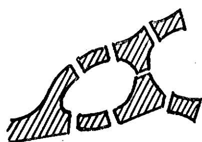
ЖАРДА́НАВА НАРМА́ЛЬНАЯ ФО́РМА МА́ТРЫЦЫ — *жарданава матрыца*, падобная дадзенай матрыцы. Такую нармальную форму адзін з першых разглядаў М.Жардан. Ж.н.ф.м. вызначаецца з дакладнасцю да парадку размяшчэння *жарданавых клетак*. Дзве жарданавы матрыцы падобныя, калі і толькі калі яны змяшчаюць адны і тыя ж жарданавы клеткі і розняцца толькі іх парадкаваннем.

ЖУКО́ЎСКАГА ФУ́НКЦЫЯ — функцыя камплекснай зменнай $w(z)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$, адкрытая Н.Жукоўскім (1911). Ж.ф. дазваляе пабудаваць канформавае адлюстраванне вонкавай часткі круга радыусам 1 на вонкавую частку профіля крыла самалёта, а потым атрымаць формулы для сілаў і момантаў, якія дзейнічаюць на крыло самалёта.

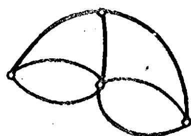
З

ЗАДА́ЧА ПРА ВЯСЕ́ЛЛІ — задача з тэорыі графаў. Дадзены два концыя мноствы: X — мноства юнакоў, Y — мноства дзяўчат. Кожны юнак з X знаёмы з некаторымі дзяўчатамі з Y. Патрабуецца скласці шлюбныя пары (x, y), $x\in X$, $y\in Y$, якія адпавядаюць дзвюм умовам: кожны юнак x уваходзіць дакладна ў адну пару (x, y), прычым x і y знаёмыя; кожная дзяўчына y уваходзіць сама болей у адну пару (x, y). Развязана Ф.Холам (1953). Зводзіцца да параспалучэнняў у дзвюхчасткавым графе.

ЗАДА́ЧА ПРА КАРАЛЯВЕ́ЦКІЯ (КЁНІГСБЕ́РГСКІЯ) МАСТЫ́ — задача з тэорыі графаў. Сем мастоў горада Кёнігсберга (зараз г. Калінінград) спалучалі берагі ракі і два астравы так, як паказана на рыс. 1. Паўстала пытанне: ці можна прайсці праз кожны мост дакладна адзін раз і вярнуцца ў зыходны пункт? Задача зводзіцца да знаходжання ойлерава цыкла у мультыграфе з рыс. 2. Развязана Л.Ойлерам (1736): патрэбнага маршруту не існуе.



Рыс. 1



Рыс. 2

ЗАДА́ЧА ПРА КРОЙ — задача выбару спосабаў крою аднатыповых кавалкаў матэрыялу, каб захаваць камплектнасць загатовак і мінімізаваць расход сыравіны. З. пра к. зводзіцца да мінімізацыі лінейнай формы $\sum_{j=1}^{n} x_j$ пры ўмовах $\sum_{j=1} a_{ij}x_j \geq r_i$, x_j — цэлае, $j=\overline{1,n}$, дзе r_i — колькасць i-х загатовак у камплекце, a_{ij} — колькасць i-х загатовак пры j-м спосабе крою, x_j — колькасць кавалкаў матэрыялу, для якіх выкарыстаны j-ы спосаб крою. З. пра к. сустракаюцца ў машынабудаванні, металургіі, кравецкай вытворчасці, лесапільнай прамысловасці і г.д. Яны NP-поўныя. Найбольш ужывальны спосаб развязання — дынамічнае праграмаванне. Таксама ўжываюцца эўрыстычныя і набліжаныя метады развязання.

ЗАДА́ЧА ПРА МІНІМА́ЛЬНЫ КАРКА́С — задача з тэорыі графаў. Патрабуецца знайсці ў злучным узважаным графе каркаснае дрэва мінімальнай вагі, вага кантаў неадмоўная. Узнікае пры праектаванні ліній электраперадачы, трубаправодаў, дарог і іншых камунікацый. Эфектыўна развязваецца *алгарытмам прагным* (развязанне "сляпым" пераборам каркасных дрэваў можа быць вялікім).

ЗАДА́ЧЫ ПРА ПАКРЫЦЦЁ І ПАДЗЕ́Л — раздзел задач *дыскрэтнай матэматыкі*. Няхай зададзеныя мноства R і набор $S=(S_1, ..., S_n)$ падмностваў $S_j\in R$. Адвольны набор $S'=(S_{j1}, ..., S_{jk})$, дзе $S_{ij}\leftarrow S$, такі, што $\bigcup_{i=1}^{k} S_{ji}=R$, называецца пакрыццём мноства R. Пакрыццё S' называецца падзелам мноства R, калі $S_{jp}\cap S_{jq}=\varnothing$ пры ўсіх $p\neq q$. Няхай для кожнага элемента c набору S зададзены рацыянальны лік $\omega(S_i)$ — вага элемента S_i. Трэба знайсці такі набор S', для якога $\sum_{S_i\leftarrow S}\omega(S_i)$ будзе найбольшай (найменшай). Да З. пра п. і п. зводзяцца многія задачы дыскрэтнай матэматыкі. У агульным выпадку З. пра п. і п. NP-цяжкія.

ЗАДА́ЧА ПРА ПЛЯТКА́РАК — задача з тэорыі графаў. Кожная з n пляткарак мае нейкую інфармацыю, невядомую астатнім. Кожныя дзве

пляткаркі могуць у размове паміж сабою абмяняцца інфармацыяй, якую яны ведаюць. Патрабуецца знайсці мінімальную колькасць $f(n)$ размоў, дастатковых для таго, каб кожная пляткарка атрымала ўсю інфармацыю. З. пра п. развязалі ў 1972 г. незалежна некалькі матэматыкаў:

$$f(n)=\begin{cases}0, & \text{калі } n=1,\\ 1, & \text{калі } n=2,\\ 3, & \text{калі } n=3,\\ 2n-4, & \text{калі } n\geq 4.\end{cases}$$

У далейшым разглядаліся розныя абагульненні гэтай задачы.

ЗАДА́ЧА ПРА ПРЫЗНАЧЭ́ННІ — вядомая экстрэмальная камбінаторная задача. Яе фармулёўка наступная. Ёсць канцае мноства выканаўцаў $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, кожны з якіх можа выконваць пэўныя работы $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$. Вядомая вартасць выканання работы y_i выканаўцам x_j. Трэба размеркаваць выканаўцаў такім чынам, каб кожны від работы быў прызначаны толькі аднаму выканаўцу, былі выкананыя ўсе работы і агульныя затраты былі мінімальныя. Гэтая задача зводзіцца да пошуку ва ўзважаным дзвюхчасткавым графе каркаснага параспалучэння, вага якога мінімальная. Такога тыпу задачы ўзнікаюць, напрыклад, пры аўтаматызацыі праектавання інтэгральных мікрасхемаў і размяшчэння вытворчага абсталявання; акрамя таго, часта выкарыстоўваюцца як дапаможныя пры развязанні іншых камбінаторных задач. У прыватнасці, шэраг алгарытмаў развязання *комівояжора задачы* выкарыстоўвае З. пра п. менавіта ў гэтай якасці. Вядома некалькі паліномных алгарытмаў развязання З. пра п. Складанасць лепшага з іх абмежаваная паліномам трэцяй ступені ад n.

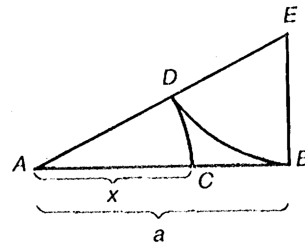
ЗАДА́ЧА ПРА РА́НЕЦ — задача пра найлепшы выбар n рэчаў з пэўнай сукупнасці такім чынам, каб іх агульная вага не перасягала зададзенай велічыні b, а сума іх вартасцяў была найбольшай; прыватны выпадак цэлалікавай задачы лінейнага праграмавання, у якой патрабуецца максімізаваць лінейную форму $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ пры ўмовах $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b$, $x_j \geq 0$, x_j — цэлае, $j=\overline{1,n}$, дзе a_j — вага рэчы, c_j — яе вартасць, x_j — колькасць выбраных j-х рэчаў. Да З. пра р. зводзіцца шмат задач размяшчэння абсталявання, загрузкі суднаў, вагонаў і г.д. З. пра р. — NP-поўная задача. Найбольш эфектыўныя метады развязання — *галінаў і межаў метад* і *дынамічнае праграмаванне*.

ЗАДА́ЧА ПРА ТРЫ ХА́ТЫ І ТРЫ СТУ́ДНІ — задача з тэорыі графаў. Жыхары кожнай з трох хатаў карыстаюцца кожнай з трох студняў. У нейкі момант яны выказалі намер пракласці сцежкі да студняў так, каб пазбегнуць сустрэч, г.зн. каб сцежкі не перасякаліся. Ці магчыма гэта? Задача цесна звязаная з планарнасцю ці непланарнасцю графа K_{33} (гл. *Граф планарны*) і мае адмоўны адказ.

ЗАДА́ЧЫ СКЛАДА́НАСЦЬ — складанасць аптымальнага алгарытму развязання задачы (маецца на ўвазе алгарытм, складанасць якога па парадку не перасягае складанасці адвольнага іншага алгарытму развязання дадзенай задачы).

ЗАКО́НЫ ДЭ МО́РГАНА — тое, што *Моргана законы*.

ЗАЛАТО́Е СЕ́ЧЫВА — вынік дзялення адрэзка, пры якім большая яго частка ёсць сярэдняя прапарцыйная паміж усім адрэзкам і меншай яго часткай (гл. рыс.). Алгебраічнае знаходжанне З.с. адрэзка $AB = a$ зводзіцца да развязання раўнання $a:x = x:(a-x)$, адкуль $x = (\sqrt{5}-1)\,a/2 \approx 0{,}62a$. Тасунак x да a можна выразіць набліжана дробамі 2/3, 3/5, 5/8, 8/13..., дзе 2, 3, 5, 8, 13, ... — *Фібаначы лікі*. З.с. адрэзка можна знайсці і геаметрычным



спосабам. Для гэтага ў пункце B узводзяць перпендыкуляр да AB, на ім адкладаюць адрэзак $BE = 1/2AB$, злучаюць A і E, адкладаюць $ED = EB$ і $AC = AD$. Тады будзе $AB:AC = AC:CB$. Паняцце З.с. упершыню трапляецца ў Эўкліда. Тэрмін З.с. увёў Леанарда да Вінчы (канец 15 ст.). Прынцыпы З.с. выкарыстоўваюцца ў архітэктуры і мастацтве.

ЗАЛЕ́ЖНЫ АД ПАРА́МЕТРА ІНТЭГРА́Л — інтэграл выгляду $\varphi(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt$, дзе функцыя $f(x, t)$ непарыўная па t. Пры пэўных дадатковых умовах на функцыю f інтэграл $\varphi(x)$ можна дыферэнцаваць і інтэграваць. З. ад п.і. (асабліва *неўласцівыя інтэгралы*) маюць важнае значэнне ў матэ-

матычным аналізе, бо з іх дапамогай можна вылічваць значэнне інтэгралаў, якія не вылічаюцца ў квадратурах.

ЗАМЕ́НЫ ЗМЕ́ННАЙ ПРА́ВІЛА — адно з правілаў інтэгравання: калі для функцый $f(x)$ і $x = \varphi(t)$, зададзеных на нейкіх прамежках, мае сэнс складаная функцыя $f(\varphi(t))$, функцыя $\varphi(t)$ дыферэнцавальная і існуе інтэграл $\int f(x)dx$, то праўдзіцца формула

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int f(x)dx.$$

ЗАМКНЁНАЕ АДЛЮСТРАВА́ННЕ — адлюстраванне $f: X \to Y$ тапалагічнай прасторы X у тапалагічную прастору Y такое, што вобраз усякага замкнёнага мноства замкнёны.

ЗАМКНЁНАЕ МНО́СТВА тапалагічнай прасторы — мноства, якое змяшчае ўсе свае *лімітавыя пункты*. Прыкладамі З.м. могуць служыць адрэзак, квадрат, куб, разгляданыя са сваімі межавымі пунктамі. Аб'яднанне концай колькасці і перасячэнне ўсякай колькасці З.м. ёсць таксама З.м. Дапаўненне ўсякага З.м. ёсць адкрытае мноства і наадварот. Сярод З.м. асабліва вылучаюцца д а с к а н а л ы я м н о с т в ы — гэта З.м., якія не маюць ізаляваных пунктаў.

ЗАМКНЁНАЯ ПАЎПРО́СТАЯ — тое, што *прамень*.

ЗАМКНЁНЫ ПРАМЕ́ЖАК — мноства ўсіх пунктаў лікавай простай паміж пунктамі a і b разам з самімі пунктамі a і b. Абазначаецца $[a, b]$ і называецца а д р э з к а м або с е г м е н т а м.

ЗАМЫКА́ННЕ м н о с т в а X — перасячэнне ўсіх замкнёных мностваў, якія змяшчаюць X. Абазначаецца $[X]$, ці ClX, ці $\bar{X}$.

ЗАРЫ́СКАГА ТАПАЛО́ГІЯ ў а ф і н н а й п р а с т о р ы A^n — тапалогія, у якой замкнёнымі падмноствамі з'яўляюцца алгебраічныя надмнагастайнасці прасторы A^n, г.зн. мноствы агульных нулёў нейкай сям'і мнагаскладаў, якую заўсёды можна абраць концай з кольца мнагаскладаў $K[T_1, ..., T_n]$ (K — асноўнае поле). Напрыклад, для адзінай простай $A^1 = K$ над алгебраічна замкнёным полем замкнёныя мноствы — гэта ў дакладнасці концыя мноствы, пустое мноства і ўсё A^1. Калі X — адзіная алгебраічная мнагастайнасць у A^n, тады выкліканая ў X тапалогія таксама называецца З.т. Падобна ўводзіцца З.т. афіннай схемы Spec$A$ кольца A (с п е к т р а л ь н а я т а п а л о г і я). Замкнёнымі мноствамі тут лічацца мноствы $V(I) = \{\rho \in \mathrm{Spec}\, A, p \supset I\}$, дзе I — ідэал кольца A. Гэтую тапалогію як тапалогію на мностве нармаванняў поля алгебраічных функцый упершыню разглядзеў А.Зарыскі (адсюль назоў). Увогуле З.т. не ёсць хаўсдарфава.

ЗБЕ́ЖНАСЦІ ХУ́ТКАСЦЬ — характарыстыка ітэрацыйнага метаду, якая дазваляе зрабіць выснову пра залежнасць хібнасці ад нумара ітэрацыі n. Пазначым $\|Z^n\|$ норму хібнасці на n-й ітэрацыі. Калі выконваюцца няроўнасці $\|Z^n\| < q^n \|Z^0\|$, $q < 1$, і $\|Z^{n+1}\| \leq C\|Z^n\|^K$, то кажуць, што метады маюць збежнасць з хуткасцю геаметрычнай прагрэсіі і ступеневы парадак K адпаведна.

ЗБЕ́ЖНАСЦЬ — адно з асноўных паняццяў матэматычнага аналізу, цесна звязанае з паняццем ліміту. Паняцце З. узнікае пры вывучэнні матэматычных аб'ектаў, калі будуецца паслядоўнасць больш простых у нейкім сэнсе аб'ектаў, якія набліжаюцца да дадзенага. Сустракаецца пры разглядзе З. паслядоўнасцяў, напрыклад, паслядоўнасць $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ збягаецца да ліку e, З. шэрагаў $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ — да $\frac{\pi^2}{6}$, З. інтэгралаў $\int_0^{\infty} e^{-x}dx$ — да 1 і г.д. Уласцівасць З. тых ці іншых матэматычных аб'ектаў мае істотнае значэнне як у пытаннях тэорыі, так і ў дастасаваннях матэматыкі. Так, набліжаны выраз

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

атрыманы з дапамогай З. шэрагу да $\sin x$. Гэты выраз дазваляе вылічыць значэнне $\sin x$ для адвольнага x з адвольнай наперад зададзенай дакладнасцю. Існуюць розныя тыпы З.: *абсалютная збежнасць*, збежнасць *амаль скрозь*, *раўнамерная збежнасць* і г.д. На сучасныя абагульненні паняцця З. значны ўплыў мае развіццё тэорыі функцый, функцыянальнага аналізу і тапалогіі.

ЗБЕ́ЖНАСЦЬ ВЫЛІЧА́ЛЬНЫХ ПРАЦЭ́САЎ — збежнасць лікавых метадаў набліжаных вылічэнняў. Калі вылічальны працэс з'яўляецца ітэрацыйным метадам, то кажуць пра збежнасць і хуткасць збежнасці ітэрацыйнага метаду; калі вылічальны працэс з'яўляецца метадам дыскрэтызацыі зыходнай задачы, то кажуць пра збежнасць і дакладнасць таго або іншага метаду дыскрэтызацыі.

ЗБЕ́ЖНАСЦЬ ВЫПАДКО́ВЫХ ПАСЛЯДО́ЎНАСЦЯЎ — адзін з тыпаў збежнасці ў тэорыі імавернасцяў. Няхай (ξ_n) — паслядоўнасць выпадковых велічыняў, ξ — выпадковая велічыня. У тэорыі імавернасцяў разглядаецца чатыры віды збежнасцяў: 1) збежнасць амаль напэўна: $\xi_n \xrightarrow[\infty]{\text{а.н.}} \xi$, калі $P(\omega: \xi_n(\omega) \to \xi(\omega)) = 1$; 2) збежнасць па імавернасці: $\xi_n \xrightarrow[\infty]{P} \xi$, калі пры кожным $\xi > 0$ $P(\omega: |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \xi) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$; 3) збежнасць у сярэднім парадку r: $\xi_n \xrightarrow[\infty]{\text{с.п.}r} \xi$, калі $M|\xi_n|^r < \infty$, $n = 1, 2, \ldots$, $M|\xi|^r < \infty$ і $M|\xi_n - \xi| \xrightarrow[\infty]{r} 0$. Калі $r = 2$, то збежнасць называецца збежнасцю ў сярэднім квадратовым і абазначаецца $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = \xi$; 4) збежнасць па размеркаванні: $\xi_n \xrightarrow[\infty]{D} \xi$, калі $F_{\xi_n}(x) \to F_\xi(x)$ для ўсіх пунктаў x, якія з'яўляюцца пунктамі непарыўнасці функцыі $F_\xi \to F_\xi(x)$. Паміж збежнасцямі існуюць судачыненні: а.н. $\Rightarrow P \Rightarrow D$, с.п. $R \Rightarrow P$. Напрыклад: $\Omega = [0, 1]$, F — барэлева σ-алгебра мностваў $[0, 1]$, P — мера Лебэга.

$$\xi_{mk} = \xi_{mk}(\omega) = \begin{cases} m, \omega \in \left(\dfrac{k}{m}, \dfrac{k+1}{m}\right), \\ 0, \omega \notin \left(\dfrac{k}{m}, \dfrac{k+1}{m}\right), \end{cases}$$

$k = 0, \ldots, m-1$; $\xi_n = \xi_{mk}$, дзе $m = \min\left(s: \dfrac{s(s+1)}{2} \geq n\right)$, $k = n - m$. Тады паслядоўнасць (ξ_n) збягаецца да 0 па імавернасці і ў сярэднім парадку 1, але не збягаецца амаль напэўна і ў сярэднім парадку r, $r > 1$.

ЗБЕ́ЖНАЯ ПАСЛЯДО́ЎНАСЦЬ — лікавая паслядоўнасць, якая мае концы ліміт. Некалькі ўласцівасцяў З.п.: а) кожная З.п. — абмежаваная; б) манатонная і абмежаваная паслядоўнасць з'яўляецца З.п.; в) паслядоўнасць (x_n) ёсць З.п., калі і толькі калі для кожнага дадатнага ліку ε знойдзецца такі нумар N, што для ўсіх $n > N$ і кожнага m праўдзіцца няроўнасць $|x_n - x_{n+m}| < \varepsilon$ (крытэр Кашы). Існуюць абагульненні З.п. Паслядоўнасць (x_n) *метрычнай прасторы* M называецца З.п. у M, калі заўсёды знойдзецца элемент $x \in M$ такі, што для кожнага $\varepsilon > 0$ існуе нумар N такі, што пры $n > N$ праўдзіцца няроўнасць $d(x, x_n) < \varepsilon$, дзе $d(x, y)$ — адлегласць у прасторы M. У розных метрычных прасторах адна і тая ж паслядоўнасць можа быць З.п. і не быць ёю.

ЗБЕ́ЖНЫ ШЭ́РАГ — шэраг (лікавы, функцыйны), паслядоўнасць частковых сумаў якога збягаецца да концага ліміту. Гэты ліміт называецца сумай шэрагу.

ЗВАРО́ТНАЕ РАЎНА́ННЕ — раўнанне выгляду $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$, у якім каэфіцыенты, роўнааддаленыя ад пачатку і канца, роўныя паміж сабою: $a_i = a_{n-i}$. З.р. ступені $2n$ можна прывесці да раўнання n-й ступені заменай $z = x \pm \dfrac{1}{x}$.

ЗВЫРО́ДНАЕ ЛІНЕ́ЙНАЕ ПЕРАЎТВАРЭ́ННЕ — *лінейнае пераўтварэнне*, матрыца якога мае нулявы вызначнік.

ЗВЫРО́ДНАЯ МА́ТРЫЦА, асаблівая матрыца — квадратная матрыца, вызначнік якой роўны нулю. Квадратная матрыца над полем ёсць З.м., калі і толькі калі паміж яе радкамі (а таксама паміж слупкамі) існуе *лінейная залежнасць*, г.зн. калі яе ранг меншы за яе парадак.

ЗВЯ́ЗАНЫ ВЕ́КТАР — вектар, пачатак якога зафіксаваны. Напрыклад, сіла, прыкладзеная да нейкага пункта пругкага цела, ёсць З.в.

ЗВЯ́ЗКА — двухпараметрычная сям'я ліній плоскасці або паверхняў у прасторы пры ўмове, што яна лінейна залежыць ад параметраў. Напрыклад, З. простых — мноства ўсіх простых, што праходзяць праз адзін пункт, З. плоскасцяў — мноства ўсіх плоскасцяў, што праходзяць праз адзін пункт.

ЗГО́РТКА ФУ́НКЦЫЙ — функцыя

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-y) f_2(y) dy,$$

дзе $f_1(x)$, $f_2(x)$ — некаторыя функцыі. З.ф. $\varphi(x)$ абазначаецца $f_1 * f_2$. Аперацыя З.ф. камутатыўная, асацыятыўная і мае шматлікія дастасаванні ў тэорыі імавернасцяў і матэматычнай фізіцы.

Так, калі f_1 і f_2 — *шчыльнасці імавернасці* незалежных выпадковых велічыняў X і Y, то $f_1 * f_2$ — шчыльнасць імавернасці выпадковай велічыні $X + Y$. Пры пэўных абмежаваннях пераўтварэнне Фур'е З.ф. $f_1 * f_2$ роўнае здабытку пераўтварэнняў функцый f_1 і f_2. Аналагічныя ўласцівасці маюць пераўтварэнні Ляпляса, Меліна і інш.

ЗГУШЧЭ́ННЯ ПУНКТ, межавы пункт — пункт нейкага мноства ў кожным працятым на-

ваколлі якога існуюць пункты гэтага мноства. Мяркуецца, што разгляданае мноства і пункт належаць да некаторай тапалагічнай прасторы.

ЗДАБЫВА́ННЕ КО́РАНЯ, караняванне — аперацыя, адваротная *падвышэнню да ступені.* Здабыць корань n-й ступені з ліку a, $n \geq 2$, $n \in \mathbf{N}$, — значыць знайсці такі лік x, што $x^n = a$. Лік x (абазначаецца $\sqrt[n]{a}$) называецца коранем, n — паказнікам кораня, a — падкарэнным выразам, знак $\sqrt{\ }$ (знак радыкала) — трансфармаванае напісанне літары r (ад лац. radix — корань). У выпадку, калі лік a рэчаісны, з яго можна здабыць толькі адзін рэчаісны корань пры n няцотным, два — пры цотным n і $a > 0$; ніводнага кораня — пры n цотным і $a < 0$. З кожнага камплекснага ліку $a \neq 0$ можна заўжды здабыць роўна n каранёў. Калі a запісаны ў трыганаметрычнай форме $a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то гэта будуць лікі

$$x = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),\quad k = \overline{0, n-1}.$$

ЗДАБЫ́ТАК — вынік аперацыі *множання* ў якой-небудзь алгебраічнай сістэме.

ЗЛІЧА́ЛЬНАЕ МНО́СТВА — мноства, для якога існуе *біекцыя* на мностве натуральных лікаў. Магутнасць З.м. азначаецца сімвалам X_0. Прыклады З.м. — мноства ўсіх цэлых лікаў Z, мноства рацыянальных лікаў Q, мноства алгебраічных лікаў. Мноства ўсіх рэчаісных лікаў не ёсць З.м.

ЗЛУ́ЧНАЕ МНО́СТВА — мноства ў тапалагічнай прасторы, якое складаецца нібы з адной часткі. З.м. — адрэзак, акружына, круг, а гіпербала не ёсць З.м. Аб'яднанне З.м., якія маюць непустое перасячэнне, ёсць З.м. Мноства злучнае, калі і толькі калі адвольная непарыўная функцыя праходзіць ад аднаго значэння да іншага і пры гэтым прымае ўсе прамежкавыя значэнні. Адкрытае З.м. называецца абсягам, кампактнае — кантынуумам. Мноства, якое не з'яўляецца злучным, называецца нязлучным.

ЗЛУ́ЧНАСЦІ ЛІК — магутнасць сям'і кампанентаў злучнасці тапалагічнай прасторы. Напрыклад, калі разглядаць лікавую вось без n пунктаў $a_1, a_2, ..., a_n$, то кампанентамі мноства $L = R \setminus \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ з'яўляюцца мноствы $(-\infty, ..., a_1)$, (a_1, a_2), ..., (a_{n-1}, a_n) і, такім чынам, З.л. мноства L роўны $n + 1$.

ЗЛУ́ЧНАСЦЬ — паняцце *дыферэнцыяльнай геаметрыі,* якое ўзнікла ў сувязі з паняццем паралельнага пераносу. З. характарызуецца геаметрычнымі ўласцівасцямі пераўтварэнняў датычных прастораў ад пункта да пункта. Напрыклад, афінная З. вызначаецца афінным адлюстраваннем датычных прастораў і пры гэтым геаметрычныя вобразы параўноўваюцца паводле іх афінных уласцівасцяў. Абагульненае паняцце афіннай З. прыводзіць да паняцця прасторы са З. у дачыненні да ўсякай групы Лі.

ЗМЕ́ННАЯ ў матэматычнай логіцы — моўны выраз, які служыць для абазначэння адвольнага аб'екта з нейкага фіксаванага мноства аб'ектаў. З. звычайна абазначаюцца літарамі ці літарамі з індэксамі. З кожнай З. звязаны абсяг яе магчымых значэнняў. У матэматычнай логіцы выкарыстоўваюцца прапазіцыйныя і прэдыкатныя З., магчымыя значэнні якіх — адпаведна выказванні і прэдыкаты. З. ўжываюцца таксама ў будаванні іменных формаў, якія ператвараюцца ў імя нейкага аб'екта, калі замяніць кожную З. на імя аб'екта з абсягу магчымых значэнняў. Прыклад іменнай формы — выраз $y\cos x^2$, дзе x, y — камплексныя зменныя.

Іменныя формы, прапазіцыйныя і прэдыкатныя З. выкарыстоўваюцца ў выказвальных формах, якія пры падстанове ў іх імёнаў аб'ектаў замест З. ператвараюцца ў выказванні. Прыклады выказвальных формаў: $x < y + z$, $A \vee B \Rightarrow C$, дзе x, y, z — рэчаісныя лікі, A, B, C — прапазіцыйныя З., $\vee$ — знак дыз'юнкцыі, $\Rightarrow$ — знак імплікацыі. З. называецца свабоднай, калі ў выраз, у які яна ўваходзіць, магчымая падстанова замест З. імёнаў аб'ектаў з абсягу яе значэнняў. Калі названая падстанова немагчымая (на сэнсе выразу), то З. называецца звязанай. Напрыклад, у іменнай форме $\int_0^1 \sin(xy)^2\,dx$ З. y свабодная, а x звязаная. Гл. таксама *Зменная велічыня.*

ЗМЕ́ННАЯ ВЕЛІЧЫНЯ́ — велічыня, якая пры вывучэнні зададзенай задачы прымае розныя значэнні, прычым усе дапушчальныя значэнні З.в. цалкам вызначаныя зададзенымі ўмовамі. Калі пры развязанні задачы ўзнікаюць некалькі З.в., то адрозніваюць незалежныя і залежныя З.в., прычым апошнія разглядаюць як функцыі ад незалежных З.в., якія называюцца аргументамі. Напрыклад, пры вывучэнні свабоднага падзення цела З.в. — гэта вышыня цела над зямлёй h, час падзення t, хуткасць цела v. Калі даследуецца залежнасць вышыні h ад часу t, то аргументам

з'яўляецца t, а функцыяй — h. У выпадку вывучэння залежнасці хуткасці v ад вышыні h аргументам будзе h, а функцыяй — v. Такім чынам, З.в. залежныя або незалежныя толькі ў сваіх дачыненнях, што вызначаецца ўмовамі задачы.

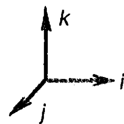
Паняцце З.в. узнікла ў 17 ст. пры даследаванні задач прыродазнаўства, якія вывучаюць працэсы руху. Увядзенне З.в. патрабавала для іх выражэння распрацоўкі новых формаў. Гэтымі формамі сталі літарная алгебра і аналітычная геаметрыя Р.Дэкарта. З.в. знайшлі сваё сімвалічнае ўвасабленне ў літарах дэкартавай алгебры, якія могуць прымаць адвольныя лікавыя значэнні. Механічная і геаметрычная інтэрпрэтацыі З.в. панавалі ў матэматыцы да сярэдзіны 19 ст. Нягледзячы на інтуіцыйны і абмежаваны характар такога погляду, ён быў вельмі плённым і выклікаў значнае развіццё матэматычных метадаў у прыродазнаўстве. Навуковае абгрунтаванне матэматычных вынікаў і фармалізацыя матэматычных метадаў пашырылі паняцце З.в. У канцы 19 — на пачатку 20 ст. паняцце З.в. і спосабы яе змянення вызначаюцца ў тэрмінах тэорыі мностваў, тапалогіі і матэматычнай логікі. Незалежная З.в. лічыцца зададзенай, калі вызначана мноства ўсіх яе магчымых значэнняў, а функцыйная залежнасць паміж дзвюма З.в. задаецца як адлюстраванне мноства значэнняў адной З.в. у мноства значэнняў другой. З.в. называецца карацей — з м е н н а я.

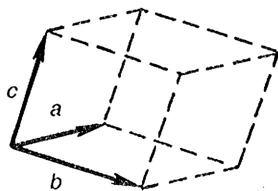
ЗМЕ́ННЫХ КІРУ́НКАЎ МЕ́ТАД — метад развязання сістэм сеткавых раўнанняў, якія атрымліваюцца пры апраксімацыі дзвюхмерных раўнанняў у частковых вытворных.

ЗМЕ́ННЫВА — лік, ад якога адымаюць. Гл. *Адыманне.*

ЗМЯША́НЫ ЗДАБЫ́ТАК $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ в е к т а р а ў $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ — скалярны здабытак вектара $\boldsymbol{a}$ на вектарны здабытак вектараў $\boldsymbol{b}$ і $\boldsymbol{c}$: $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}])$. Мае ўласцівасці: $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = -(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) = -(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = -(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b})$; $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = 0$, калі $\boldsymbol{a} = 0$, ці $\boldsymbol{b} = 0$, ці $\boldsymbol{c} = 0$, ці $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ ёсць кампланарныя вектары. З.з. лікава роўны аб'ёму паралелепіпеда, пабудаванага на вектарах $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$, які бярэцца са знакам плюс, калі тройка $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ арыентаваная так, як тройка каардынатных вектараў $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, (гл. рыс.), са знакам мінус — у процілеглым выпадку. Калі ў артаўнармаваным базісе вектары $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ маюць каардынаты (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3),

то $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$.





ЗМЯША́НЫ ЛІК — лік, які мае цэлую і дробавую часткі, напрыклад $3\frac{1}{7}$, $-19\frac{11}{20}$.

ЗНАКАЗМЕ́ННАЯ ГРУ́ПА м н о с т в а X — падгрупа $A(X)$ цотных падстановак сіметрычнай групы $S(x)$. Гл. *Сіметрычная група.*

ЗНАКАЧАРГАВА́ЛЬНЫ ШЭ́РАГ — лікавы шэраг, складнікі якога ёсць на чарзе дадатныя і адмоўныя: $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + (-1)^{n-1}a_n + ...$, $a_i > 0$, $\forall i \in N$. Калі складнікі З.ш. на абсалютнай велічыні манатонна спадаюць і $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то шэраг збягаецца (п р ы к м е т а Л я й б н і ц а). Астача збежнага З.ш. $r_n = (-1)^n a_{n+1} + (-1)^{n+1} a_{n+2} + ...$ мае знак свайго першага складніка $(-1)^n a_{n+1}$ і па модулі меншая за яго. Прыклады З.ш., якія збягаюцца:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+...=\ln 2;$$

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}+...=\frac{\pi}{4}.$$

ЗРУХ — 1) афіннае пераўтварэнне плоскасці, у выніку якога ўсе пункты (рыс.) нейкай простай l застаюцца на месцы, а ўсе пункты простай, размешчанай ад l на адлегласці 1, зрушваюцца на

вектар k, паралельны простай l. Аналітычна (калі l — вось Ox) З. можа быць зададзены ў дэкартавых прамавугольных каардынатах (x, y) формуламі: $x' = x + ky$, $y' = y$. Пры З. захоўваюцца плошчы і арыентацыя. Аналагічна вызначаецца З. у прасторы; 2) тое, што *паралельны перанос.*

ЗЭ́ЙДЭЛЯ МЕ́ТАД — ітэрацыйны метад развязання сістэм лінейных алгебраічных раўнанняў $Ax = b$, матрыцы $A = \| a_{ij} \|$ якіх не маюць нулявых дыяганальных элементаў (прапанаваны Л.Зэйдэлем (1874)). Па З.м. k-е набліжанне $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})^{\mathrm{T}}$ да вектара-развязку x^* знаходзіцца паводле правілаў

$$x_i^{(k)} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k-1)} + \frac{b_i}{a_{ii}},$$

дзе $x_i^{(0)}$ — кампаненты вектара пачатковага набліжання $x^{(0)}$, b_i — вектара b ($i = 1, 2, \ldots, n$; $k = 1, 2, \ldots$). У матрычным выглядзе ітэрацыйны працэс можна запісаць: $x^{(k)} = -B^{-1}Cx^{(k-1)} + B^{-1}b$,

$$B = \left\| \begin{matrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{matrix} \right\|, \quad C = \left\| \begin{matrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{matrix} \right\|.$$

З.м. для раўнання $Ax = b$ раўназначны метаду простай *ітэрацыі* ў дачыненні да раўнання $x = -B^{-1}Cx + B^{-1}b$. Метад збежны, калі праўдзіцца, напрыклад, адна з умоваў: 1) $\sum_{j \neq i} |a_{ij}| < |a_{ii}|$ ($i = 1, 2, \ldots, n$); 2) A — эрмітава дадатна вызначаная матрыца. Разглядаюцца таксама розныя мадыфікацыі З.м.

ЗЯНО́НА АПО́РЫІ (грэц. aporia — цяжкасць, бязвыхаднасць) — лагічныя разважанні Зянона Элейскага (5 ст. да н.э.), у якіх паказаны супярэчнасці адлюстравання ў паняццях непарыўнасці руху, прасторы і часу. Найбольш вядомыя З.а. "Ахілес", "Дыхатамія", "Страла" і "Стадый".

Напрыклад, у апорыі "Ахілес" сцвярджаецца, што Ахілес не можа дагнаць чарапаху, бо, пакуль ён дабяжыць да пункта першапачатковага знаходжання чарапахі, яна прапаўзе далей, пакуль ён прабяжыць гэтую адлегласць, чарапаха прасунецца яшчэ і гэтак бясконца. У апорыі "Дыхатамія": перш чым прайсці ўвесь шлях, цела, якое рухаецца, павінна прайсці палову шляху, а да гэтага — палову гэтай паловы, і паколькі працэс такога дзялення бясконцы, то цела наогул не́ можа пачаць рухацца (аналагічна даказваецца, што рух не можа скончыцца). Гэтыя і іншыя З.а. выявілі рэлятыўны і супярэчлівы характар матэматычнага апісання руху і неабгрунтаванасць прэтэнзій на поўную адэкватнасць (ізамарфізм) такіх апісанняў і матэматычных паняццяў. Гл. таксама *Антыномія.*

I

ІДЭА́Л алгебры, кольца, паўгрупы A — адпаведна падалгебра, падкольца ці паўгрупа B, замкнёная ў дачыненні да аперацыі множання на элементы з A. Паняцце І. узнікла ў тэорыі алгебраічных лікаў (Р.Дэдэкінд, 1870), потым перанесена ў тэорыю кольцаў, паўгрупаў і інш. алгебраічных структур. І. называецца левым (правым), калі ён замкнёны ў дачыненні да множання злева (справа) на элементы з A, г.зн. $AB = B$ (адпаведна $BA = B$), дзе $AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$, $BA = \{ba \mid a \in A, b \in B\}$. І., які з'яўляецца і левым, і правым, называецца двухбаковым. У камутатыўным выпадку ўсе тры паняцці супадаюць. Двухбаковыя І. у кольцах і алгебрах выконваюць тую ж ролю, што і нармальныя падгрупы ў групах. Для ўсякага гомамарфізму $f: A \to B$ ядро $\mathrm{Ker}\, f$ (г.зн. мноства ўсіх элементаў X з A такіх, што $f(x) = 0$) ёсць І. і, наадварот, кожны І. — ядро нейкага гомамарфізму. І., утвораны адным элементам, называецца галоўным. Кольцы, у якіх кожны І. галоўны, называюцца кольцамі галоўных ідэалаў. Прыклад такога кольца — мноства цэлых лікаў.

ІДЭА́ЛЬНЫ ЛІК — элемент паўгрупы D дывізараў кольца A цэлых лікаў якога-небудзь поля алгебраічных лікаў. Паўгрупа D — камутатыўная свабодная паўгрупа з адзінкай, базіс якой утвараюць усе элементы кольца A. У сучаснай тэрміналогіі І.л. называюць цэлым *дывізарам* кольца A. І.л. дапускаюць натуральнае атаясамленне з ідэаламі кольца A. Паняцце І.л. увёў Э.Кумер у сувязі з вывучэннем арыфметычна кругавых палёў і з мэтай пераадолення неадназначнасці раскладу на простыя множнікі ў кольцах алгебраічных лікаў.

ІДЭМПАТЭ́НТ (ад лац. idem — той жа + potens — моцны, здольны) — элемент e кольца (паўгрупы), роўны свайму квадрату: $e^2 = e$. Напрыклад, паралельная праекцыя ўздоўж дадзенага кірунку на дадзеную плоскасць ёсць І. кольца лінейных пераўтварэнняў прасторы. Два І. e і f называюцца артаганальнымі, калі $ef = fe = 0$. Для адвольнага І. e кольца элемент $1 - e$ ёсць таксама І., артаганальны да e (тут 1 — адзінка кольца). Паняцце І. увёў Б.Пірс (1881) пры вывучэнні раскладаў кольцаў у прамую суму, звязаных з артаганальнымі сістэмамі І.

ІЗАКЛІНА (ад грэц. isos — роўны + klino — нахіляю) — мноства пунктаў (x, y) плоскасці, у якіх адзін і той жа нахіл поля кірункаў, што задаецца звычайным дыферэнцыяльным раўнаннем першага парадку $y' = f(x, y)$.

ІЗАКЛІНАЎ МЕТАД — метад набліжанага графічнага развязання раўнання $y' = f(x, y)$ з дапамогай *ізаклінаў*. Тэрмін увёў Ё.Бэрнулі (1694).

ІЗАЛЯВАНЫ АСАБЛІВЫ ПУНКТ — асаблівы пункт аналітычнай функцыі, які мае наваколле, што не змяшчае іншых асаблівых пунктаў.

ІЗАЛЯВАНЫ ПУНКТ мноства ў тапалагічнай прасторы — такі пункт мноства, што перасячэнне яго нейкага наваколля з самім мноствам складаецца толькі з самога пункта.

ІЗАМАРФІЗМ (ад грэц. isos — роўны, аднолькавы + morphē — форма) — адно з грунтоўных паняццяў сучаснай матэматыкі. Узнікла спачатку ў межах *алгебры*, але хутка распаўсюдзілася ва ўсе раздзелы матэматыкі.

Паняцце І. натуральна ўзнікае ў сістэмах аб'ектаў з зададзенымі на іх аперацыямі ці дачыненнямі. Разгледзім, напрыклад, сістэму R усіх рэчаісных лікаў з аперацыяй складання $x = x_1 + x_2$ і сістэму R_+ дадатных лікаў з аперацыяй множання $y = y_1 y_2$. Калі адлюстраваць R у R_+ з дапамогай адпаведнасці $y = a^x$, $a > 1$, то суме $x = x_1 + x_2$ будзе адпавядаць здабытак $y = y_1 y_2$ лікаў $y_1 = a^{x_1}$ і $y_2 = a^{x_2}$. Зараз з адвольнага выказвання пра складанне лікаў з R можна атрымаць адпаведнае выказванне пра множанне лікаў з R_+. У гэтым выпадку кажуць, што паміж сістэмамі R і R_+ існуе І. і далей дастаткова вывучаць толькі адну з гэтых сістэм.

Тэрмін І. усталяваўся канчаткова ў матэматыцы пасля навуковых прац Э.Нётэр (1918). Прыватныя выпадкі І. — паняцці *гомеамарфізму* і *аўтамарфізму*.

ІЗАМЕТРЫЧНАЕ АДЛЮСТРАВАННЕ — тое, што *ізаметрыя*.

ІЗАМЕТРЫЧНЫЯ ПАВЕРХНІ — паверхні, паміж якімі існуе *біектыўнае адлюстраванне*, якое захоўвае даўжыні дугаў адпаведных крывых паміж адпаведнымі пунктамі. Названае адлюстраванне ёсць ізаметрычнае ў дачыненні да індукаваных метрыкаў на паверхнях. Гэтае адлюстраванне характарызуецца таксама тым, што захоўвае першую квадратовую форму паверхні. Гэта азначае, што вытворнае адлюстраванне датычных прастораў захоўвае скалярны здабытак вектараў. І.п. маюць у адпаведных пунктах аднолькавую гаўсаву крывізну. Геадэзічныя лініі на такіх паверхнях узаемна адпаведныя. Паверхні, ізаметрычныя плоскасці (ці яе абсягу), называюцца разгортвальнымі. Прыклады такіх паверхняў — цыліндры і конусы. Паверхні з нязменнай дадатнай (адмоўнай) гаўсавай крывінёй ёсць лакальна ізаметрычныя сферы (псеўдасферы).

ІЗАМЕТРЫЯ, ізаметрычнае адлюстраванне — *біектыўнае адлюстраванне* $f: X \to Y$ метрычнай прасторы (X, ρ) на метрычную прастору (Y, ρ) такое, што $\rho(x, y) = \rho'(f(x), f(y))$ для кожных пунктаў $x, y \in X$. У выпадку існавання І. $f: X \to Y$ метрычныя прасторы X і Y называюць ізаметрычнымі. І. $f: X \to X$ называецца ізаметрычным пераўтварэннем або рухам прасторы X. Рух метрычнай лінейнай прасторы (маецца на ўвазе, што метрыка ўзгодненая з лінейнай структурай) — заўсёды афіннае пераўтварэнне. У прыватнасці, кожны рух f прасторы $\mathbf{R}^n$ з эўклідавай метрыкай

$$d(x, y) = \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right]^{1/2}$$

вызначаецца формулай

$$f(x) = Ax + b,$$

дзе $b \in \mathbf{R}^n$, A — артаганальная матрыца парадку n. І. $f: X \to B$, дзе $B \subset Y$, называецца ізаметрычным укладаннем прасторы X у прастору Y. Праблему ізаметрычных укладанняў рыманавых прастораў даследаваў, у прыватнасці, акад. Ц.Бурстын.

ІЗАПЕРЫМЕТРЫЧНАЯ ЗАДАЧА — класічная задача *варыяцыйнага злічэння*. Сутнасць І.з. палягае ў мінімізацыі функцыянала

$$J_0(y) = \int_{x_1}^{x_2} f_0(x, y, y')\,dx$$

пры абмежаваннях

$$J_i(y) = \int_{x_1}^{x_2} f_i(x, y, y')\,dx = c_i,$$

дзе f_i: $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $i = \overline{1, m}$, а таксама некаторых краявых умовах.

І.з. зводзіцца да *Лагранжа задачы* ў новых зменных z_i, якія задавальняюць дыферэнцыяльныя раўнанні

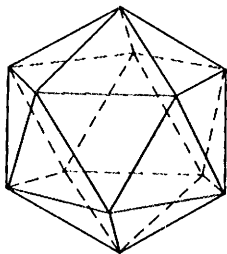
$$z_i' = f_i(x, y, y'),\ i = \overline{1, m},$$

і межавыя ўмовы

$$z_i(x_1)=0,\ z_i(x_2)=c_i,\ i=\overline{1,\ m}.$$

Многія І.з. былі вядомыя яшчэ ў старажытнай Грэцыі: знаходжанне многавугольнікаў найбольшай плошчы з зададзеным перыметрам (адсюль назоў І.з.), знаходжанне замкнёнай крывой зададзенай даўжыні, якая абмяжоўвае найбольшую плошчу, і г.д. Сістэматычныя даследаванні І.з. пачаліся ў канцы 17 — на пачатку 18 ст. і звязаны з імёнамі Я.Бэрнулі і Л.Ойлера.

ІКАСА́ЭДР (ад грэц. eikosi — дваццаць + hedra — аснова, грань) — тып *правільнага мнагагранніка* з 20 гранямі, 30 кантамі, 12 вяршынямі (у кожнай зыходзяцца па 5 кантаў). Калі a — даўжыня канта І., то аб'ём роўны $v=5/12a^3(3+\sqrt{5})\approx$ $\approx 2{,}1817a^3$ (рыс.). Мяркуецца, што назоў дадзены Тэатэтам (4 ст. да н.э.).



ІМАВЕ́РНАСНАЯ ПРАСТО́РА, поле імавернасцяў — трыяда (Ω, F, P), дзе Ω — прастора, замкнёная ў дачыненні да тэарэтычна-мноствавых аперацый, $F-\sigma$ — алгебра падмностваў Ω, P — імавернасная мера (неадмоўная злічальна-адытыўная функцыя) на F. Пункты мноства Ω называюцца элементарнымі падзеямі, само Ω — прасторай элементарных падзей. Падмноствы мноства Ω, якія належаць F, называюцца падзеямі.

Не заўсёды простым з'яўляецца пытанне пра існаванне І.п., якая задавальняе тыя або іншыя спецыяльныя патрабаванні. Мае месца тэарэма Калмагорава пра ўзгодненыя размеркаванні: няхай кожнаму ўпарадкаванаму конечнаму набору $t_1, \ldots, t_n$ элементаў мноства T адпавядае размеркаванне $P_{t_1,\ldots,t_n}$ на барэлевых мноствах эўклідавай прасторы $\mathbf{R}^n$ і няхай выкананы наступныя ўмовы ўзгаднення:

1) $P_{t_1,\ldots,t_n}(I_{y_1,\ldots,y_n})=P_{t_{\alpha 1},\ldots,t_{\alpha n}}(I_{y_{\alpha 1},\ldots,y_{\alpha n}})$ для ўсіх $(y_1, \ldots, y_n)\in \mathbf{R}^n$, дзе

$$I_{y_1,\ldots,y_n}=\{x=(x_1,\ldots,x_n):x_i\le y_i;\ i=1,\ldots,n\},$$

$\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ — адвольнае перастаўленне лікаў $1, \ldots, n$;

2) $P_{t_1,\ldots,t_n}(I_{y_1,\ldots,y_{n-1}},\infty)=P_{t_{\alpha_1},\ldots,t_{\alpha_{n-1}}}(I_{y_{\alpha_1},\ldots,y_{\alpha_{n-1}}})$.

Тады на найменшай барэлевай σ-алгебры F падмностваў здабыткаў $R^T=\{x=\{x_t\},\ t\in T,\ x_t\in R^1\}$, у дачыненні да якога вымерныя ўсе каардынатныя функцыі $t(x)=x_t$, існуе размеркаванне P такое, што для кожнага конечнага падмноства $t_1, \ldots, t_n$ мноства T і адвольнага n-мернага барэлевага мноства B праўдзіцца роўнасць

$$P_{t_1,\ldots,t_n}(B)=P((t_1(x),\ldots,t_n(x))\in B).$$

ІМАВЕ́РНАСНЫ АЎТАМА́Т — абстрактны аўтамат, у якога хоць бы адна з вызначальных функцый імавернасная (гл. *Аўтамат*).

ІМАВЕ́РНАСНЫ ПРАЦЭ́С, стахастычны працэс, выпадковы працэс — працэс, плынь якога залежыць ад выпадку і для якога вызначана імавернасць той або іншай яго плыні. Прыклады І.п.: *броўнава руху працэс*, працэс цёку току ў электрычным ланцугу, які суправаджаецца неўпарадкаванымі флюктуацыямі сілы току і напругі, распаўсюджванне радыёхваляў пры наяўнасці выпадковых заміранняў радыёсігналу, а таксама працэсы, што сустракаюцца ў геафізіцы, біяфізіцы і эканоміцы.

З гледзішча матэматыкі І.п. можна азначыць як сям'ю выпадковых велічыняў ξ_t, дзе $t\in T\subseteq R$. Калі $\xi_1\in R^1$, то І.п. называецца аднамерным, калі $\xi_1\in R^k$, $k>1$, то мнагамерным або вектарным. У выпадку, калі t прымае адвольныя значэнні з якога-небудзь інтэрвала рэчаіснай восі, кажуць, што ёсць працэс з неперыўным часам. Калі t прабягае цэлыя значэнні — працэс з дыскрэтным часам (выпадковая паслядоўнасць, часавая паслядоўнасць).

Заданне размеркавання імавернасцяў у бясконцамернай прасторы магчымых варыянтаў працякання І.п. ξ_t патрабуе выкарыстання спецыяльнага матэматычнага апарату. Шырокі клас размеркаванняў для І.п. можа быць ахарактарызаваны сукупнасцю канцамерных размеркаванняў вектараў $(\xi_{t_1},\ldots,\xi_{t_n})$, якія адпавядаюць усялякім конечным падмноствам $(t_1, \ldots, t_n)$ значэнняў аргумента t. Аднак заданне гэтых размеркаванняў недастаткова для вызначэння імавернасцяў падзей, якія залежаць ад значэнняў ξ_t на бясконцым мностве значэнняў t, г.зн. не вызначае адназначна І.п. ξ_t.

ІМАВЕ́РНАСЦЬ матэматычная — лікавая характарыстыка магчымасці з'яўлення якой-

ных умовах, якія могуць паўтарацца неабмежаваную колькасць разоў. Як катэгорыя навуковага пазнання І. адлюстроўвае асаблівы тып сувязяў паміж з'явамі, характэрнымі для масавых працэсаў. Лікавае значэнне І. у некаторых выпадках можна знайсці, выкарыстоўваючы *імавернасцяў класічнае азначэнне*.

У больш складаных выпадках азначэнне І. вымагае статыстычнага падыходу. Напрыклад, калі пры 100 стрэлах стралок пацэліў у мішэнь 39 разоў, то можна думаць, што для яго І. трапляння ў мішэнь пры дадзеных умовах прыблізна роўная 4/10. Па І., вызначаных класічным або статыстычным спосабам, можна знайсці, у адпаведнасці з правіламі тэорыі імавернасцяў, новыя І. Напрыклад, І. таго, што ў стралка будзе хоць бы адно траплянне з чатырох стрэлаў, роўная $1-(1-0{,}4)^4\approx$ $\approx 0{,}87$. Гэты вынік можна праверыць статыстычна, і калі спробы пацэліць у мішэнь хоць бы пры адным стрэле з чатырох будуць паўтарацца шмат разоў, то ён будзе мець поспех прыблізна ў 87% выпадкаў.

І. выражае якасную сувязь паміж выпадковым і неабходным. Разглядаючы сувязь І. з частасцю, трэба браць пад увагу наступнае. Пры канцай колькасці n паўтарэнняў зададзеных умоў і колькасці выпадкаў m, у якіх дадзеная падзея настае, частасць $\frac{m}{n}$ звычайна мала адрозніваецца ад І. p. Чым большая колькасць паўтарэнняў, тым радзей трапляюцца значныя адхіленні частасці $\frac{m}{n}$ ад p.

У тэорыі І. у якасці аксіём фармулююцца тыя ўласцівасці І., якія на дадзеным этапе неабходныя для развіцця навукі. Аднак ні гэтыя аксіёмы, ні класічны падыход, ні статыстычны падыход не даюць вычарпальнага азначэння рэальнага зместу паняцця І., яны з'яўляюцца толькі вядомымі набліжэннямі да ўсё больш поўнага яго раскрыцця.

ІМАВЕ́РНАСЦЯЎ КЛАСІ́ЧНАЕ АЗНАЧЭ́ННЕ — прыватны выпадак азначэння *імавернасцяў*. Няхай кожнае выпрабаванне завяршаецца адной і толькі адной з роўнамагчымых падзей $\{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_N\}$. Гэтыя падзеі называюцца в ы н і к а м і   в ы п р а б а в а н н я. Няхай падзея A складаецца са спрыяльных для яе вынікаў $\{\omega_{i1}, \omega_{i2}, ...$ $..., \omega_{in}\}$. Тады імавернасць падзеі A вызначаецца формулай $P(A)=\frac{n}{N}$, што выражае класічнае азначэнне імавернасці, адпаведна якому імавернасць якой-небудзь падзеі A роўная тасунку колькасці n вынікаў, спрыяльных для A, да колькасці N усіх «роўнамагчымых» вынікаў. І.к.а. зводзіць паняцце «імавернасць» да паняцця «роўнамагчымасць», якое застаецца без яснага азначэння. Роўнамагчымасць звычайна вынікае з меркаванняў сіметрыі і аднароднасці.

ІМАВЕ́РНАСЦЯЎ ТЭО́РЫЯ — матэматычная навука, якая вывучае матэматычныя мадэлі выпадковых эксперыментаў, г.зн. такіх, вынікі якіх неадназначна вызначаюцца ўмовамі эксперыменту (кіданне гульнёвага кубіка, выбар экзаменацыйнага білета і інш.). Асноўны аб'ект вывучэння І.т. — паслядоўнасці і сем'і выпадковых велічыняў. І.т. будуецца на аснове *мностваў тэорыі* і тэорыі *меры*. Гэты падыход распрацаваны А.Калмагоравым і лічыцца агульнапрынятым. Шмат якія фундаментальныя тэарэмы І.т. даказалі расійскія матэматыкі: П.Чабышоў, А.Маркаў, А.Ляпуноў, С.Бернштэйн, А.Калмагораў, А.Хінчын, Ю.Ліннік. І.т. выкарыстоўваецца ў статыстычнай фізіцы, матэматычнай статыстыцы, імавернаснай логіцы, а таксама ў біялогіі, вайсковай справе (тэорыя стралянняў), астраноміі (тэорыя памылакназіранняў), тэхніцы і ў іншых галінах.

Зыходныя паняцці І.т. — паняцці выпадковай падзеі і яе *імавернасці*. Вынік выпадковага эксперыменту называецца э л е м е н т а р н а й   п а д з е я й ω. Сукупнасць усіх элементарных падзей называецца *верагоднай падзеяй* Ω, а падзея, якая не змяшчае ніводнай элементарнай падзеі, — *немагчымай падзеяй*. Падзея, якая палягае ў тым, што адбудзецца хоць бы адна з падзей A або B, г.зн. падзея, якая складаецца з элементарных падзей, якія належаць хоць бы адной з падзей A або B, называецца а б'я д н а н н е м   п а д з е й A і B і абазначаецца $A+B$ або $A\cup B$. Падзея, якая складаецца з элементарных падзей, якія належаць і падзеі A, і падзеі B, называецца п е р а с я ч э н н е м   п а д з е й A і B і абазначаецца $A\cdot B$ або $A\cap B$. Падзея, дадатковая да A, называецца п р о ц і л е г л а й і абазначаецца $\bar{A}$. Прыклад: кідаецца гульнёвы кубік $\Omega=$ $=(1, 2, 3, 4, 5, 6)$. Падзея A: «Выпадзе цотная грань»; B: «Выпадзе лік, большы за два». Тады $A=(2, 4, 6)$, $B=(3, 4, 5, 6)$, $A\cdot B=(4, 6)$, $A+B=$ $=(2, 3, 4, 5, 6)$, $\bar{A}=(1, 3, 5)$, $\bar{B}=(1, 2)$.

Няхай A — нейкая падзея, якая можа з'явіцца ў выніку пэўнага эксперыменту, што праводзіўся N разоў. Абазначым праз N_A колькасць эксперыментаў, у якіх адбылася падзея A. Велічыня N_A/N называецца ч а с т а с ц ю з'яўлення падзеі A у N эксперыментах. У многіх назіраных эксперымен-

тах частасць наводзіць сябе такім чынам, быццам існуе ліміт N_A / N, калі $N \to \infty$. Будзем лічыць, што гэты ліміт існуе і называецца частаснай імавернасцю падзеі A: $P(A) = \lim_{N\to\infty} N_A / N$. Гэтая імавернасць мае ўласцівасці: 1) $P(\Omega) = 1$; 2) $P(A) \geq 0$; 3) $P(A+B) = P(A) + P(B)$, калі $A \cdot B = \varnothing$.

Калі Ω складаецца з n роўнамагчымых элементарных падзей, то імавернасць кожнай элементарнай падзеі будзе роўная $1/n$, а $P(A) = \frac{m}{n}$, дзе m — колькасць элементарных падзей, з якіх складаецца падзея A. Імавернасць, вызначаная па гэтай формуле, называецца класічнай імавернасцю.

Калі эксперымент палягае ў тым, што з абсягу G выбіраецца пункт, прычым выбар пункта з адвольнага, загадзя зададзенага абсягу A не мае перавагі перад выбарам пункта з іншага адвольнага абсягу з мерай (даўжыня, плошча, аб'ём), роўнай меры абсягу A, то імавернасць $P(A) = $ (мера A) / (мера G) называецца геаметрычнай імавернасцю.

Няхай нейкі эксперымент ажыццяўляецца N разоў. Абазначым праз M колькасць эксперыментаў, у якіх адбылася падзея B, а M_A — колькасць той часткі, дзе адбылася падзея A. Тады ліміт M_A / M, калі $N \to \infty$, называецца ўмоўнай імавернасцю падзеі A пры ўмове, што адбылася падзея B (абазначаецца $P(A/B)$). Калі $M = N_B$, $M_A = N_{AB}$, то

$$P(A|B) = \lim_{N\to\infty} \frac{M_A}{M} = \lim_{N\to\infty} \frac{N_{AB}}{N_B} =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{N_{AB}|N}{N_B|N} = \frac{P(AB)}{P(B)}. \qquad (1)$$

Калі з'яўленне падзеі B не ўплывае на з'яўленне падзеі A (гэта бывае, калі эксперымент складаецца з двух незалежных эксперыментаў, напрыклад кіданне двух гульнёвых кубікаў) і падзея A звязаная з першым эксперыментам (г.зн. па выніках першага эксперыменту можна вызначыць, адбудзецца падзея A або не), а падзея B звязаная з другім эксперыментам, то $P(A \mid B) = P(A)$. У гэтым выпадку з (1) атрымліваем

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B), \qquad (2)$$

а падзеі A і B называюцца незалежнымі.

У І.т. мяркуецца, што імавернасная мадэль эксперыменту зададзеная, яе называюць яшчэ *імавернаснай прасторай* (Ω, F, P), дзе Ω — мноства ўсіх элементарных падзей, F — мноства падзей, якое мае ўласцівасці: а) $\Omega \in F$; б) калі $A, B \in F$, то $A + B \in F$, $A \cdot B \in F$, $\bar{A} \in F$, $\bar{B} \in F$; в) калі $A_1, A_2, \ldots \in F$, то $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F$; P — імавернасць, г.зн. рэчаісная функцыя $P = P(A)$, $A \in F$, якая мае ўласцівасці частаснай імавернасці. Каб была магчымасць атрымаць больш змястоўныя вынікі, дадаюць уласцівасць: калі $A_1, A_2, \ldots \in F$ і $A_i \cdot A_j = \varnothing$, $i \neq j$, то

$$P\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Імавернасць P вызначана не на ўсіх падзеях, а толькі на нейкім мностве F, якое можа не супадаць з мноствам усіх падзей. Геаметрычная імавернасць вызначана толькі на мноствах, якія маюць меру.

Задача І.т. палягае ў тым, каб на імавернасцях адных («простых») падзей знайсці (метадамі матэматычнай статыстыкі) імавернасці іншых («складаных») падзей. Гэта можна зрабіць, напрыклад, праз *поўнай імавернасці формулу*

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B/A_i),$$

дзе $A_i \cdot A_j = \varnothing$, $i \neq j$, $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ або, пры тых жа ўмовах, праз *Баеса формулу*

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)}.$$

Паколькі ў матэматыцы зручней працаваць з лікамі, чым з падзеямі, то ў І.т. уводзяцца *выпадковыя велічыні* ξ, h, ..., г.зн. рэчаісныя функцыі элементарных падзей, якія трэба браць такімі, каб існавала *размеркавання функцыя* $F_\xi(x) = P(\omega : \xi(\omega) \leq x)$. Важнасць гэтай функцыі палягае ў тым, што з яе дапамогай адназначна вызначаюць імавернасці падзей $(\omega : \xi(\omega) \in B)$, дзе B — барэлева мноства (атрымліваецца з інтэрвалаў як іх канцаў або злічальнае мноства перасячэнняў, аб'яднанняў і дапаўненняў). У І.т. уводзяцца лікавыя характарыстыкі выпадковых велічыняў; асноўная з іх — матэматычнае спадзяванне E_ξ выпадковай велічыні ξ, якое вызначаецца праз інтэграл Лебэга

$$E_\xi = \int \xi(\omega) P(d\omega) = \int x dF_\xi(x).$$

На практыцы E_ξ ёсць ліміт сярэдняга значэння выпадковай велічыні ξ, вылічанай у N эксперыментах, калі $N \to \infty$. Формула $Eg(\xi) = \int g(x)\, dF_\xi(x)$.

дазваляе атрымліваць розныя лікавыя характарыстыкі выпадковай велічыні, такія, як *дысперсія, моманты* розных парадкаў і інш.

Важную ролю ў І.т. пры ацэнцы характарыстык выпадковай велічыні (функцыі размеркавання, матэматычнага спадзявання і інш.) маюць розныя віды *збежнасці выпадковых паслядоўнасцяў*.

Для даследавання сумаў незалежных выпадковых велічыняў выкарыстоўваецца апарат характарыстычных функцый выпадковай велічыні $f(t)$: $f_\xi(t) = E\exp(it\xi) = E\cos t\xi + iE\sin t\xi$. Характарыстычныя функцыі дазваляюць замяніць даследаванне функцый размеркавання сумаў незалежных выпадковых велічыняў праз даследаванне здабытку функцый гэтых велічыняў, што з'яўляецца больш простым. Характарыстычныя функцыі зручныя пры даследаванні сумаў залежных выпадковых велічыняў.

Апарат утваральных функцый $\varphi_\xi(z) = Ez^\xi$, калі выпадковая велічыня ξ неадмоўная цэлалікавая, дазволіў даследаваць *галінавальныя працэсы*, якія з'яўляюцца матэматычнымі мадэлямі ядзерных рэактараў, розных папуляцый. Важнае значэнне ў дастасаваннях маюць лімітавыя тэарэмы (*вялікіх лікаў закон, вялікіх лікаў узмоцнены закон, цэнтральная лімітавая тэарэма*). Гэтыя тэарэмы, а таксама няроўнасці паміж характарыстычнымі функцыямі і функцыямі размеркавання, напрыклад, дазваляюць з адвольнай загадзя зададзенай дакладнасцю ацэньваць па значэннях выпадковай велічыні яе функцыю размеркавання і розныя лікавыя характарыстыкі гэтай выпадковай велічыні. І.т. — аснова тэорыі выпадковых працэсаў, інфармацыі, надзейнасці, масавага абслугоўвання, аптымальных развязанняў, матэматычнай статыстыкі і інш.

Сістэматычныя даследаванні па І.т. пачаліся ў Беларусі ў сярэдзіне 70-х гг. пад кіраўніцтвам Г.Мядзведзева. Ім, яго вучнямі і шэрагам іншых матэматыкаў Беларусі атрыманы значныя вынікі па І.т. і матэматычнай статыстыцы. Ацэнены параметры выпадковых працэсаў і палёў (Г.Мядзведзеў), распрацавана тэорыя рабаснай статыстычнай класіфікацыі (Ю.Харын), атрыманы грунтоўныя вынікі па тэорыі выпадковых працэсаў, іх аптымізацыі і тэорыі масавага абслугоўвання (А.Дудзін, Ю.Малінкоўскі, М.Матальыцкі, І.Хамічкоў, М.Труш), лімітавых тэарэмах (Б.Залескі, М.Лазаковіч), кластэр-аналізу мнагамерных назіранняў (Я.Жук).

ІМІТАЦЫЙНАЯ МАДЭЛЬ — метад даследавання складаных сістэм, заснаваны на перакладзе на машынную мову апісання гэтых сістэм. Спецыяльныя праграмы, якія абслугоўваюць І.м., генеруюць розныя рэалізацыі ўваходнага сігналу $x(t)$; апрацоўваюць гэты сігнал у адпаведнасці з уведзеным у камп'ютар апісаннем самой складанай сістэмы; атрымліваюць выходны сігнал $y(t)$, вывучэнне якога дае інфармацыю пра паводзіны складанай сістэмы.

ІМПЛІКАЦЫЯ (ад лац. implicatio — сплячэнне, пераплячэнне) — аперацыя матэматычнай логікі, што, зыходзячы з выказванняў A і B, утварае новае выказванне $A \Rightarrow B$ («калі A, то B»), якое ёсць няпраўда, калі і толькі калі A — праўда, а B — няпраўда. Табліца праўдзівасці імплікацыі мае выгляд

A	B	$A \Rightarrow B$
П	П	П
П	Н	Н
Н	П	П
Н	Н	П

Выказванне A называецца ў м о в а й выказвання $A \Rightarrow B$, B — яго в ы с н о в а й.

ІНВАЛЮЦЫЯ (ад лац. involutio — згінанне, згортванне) — пераўтварэнне, квадрат якога роўны тоеснаму пераўтварэнню прасторы. Прыклады І. — восевая сіметрыя, спалучэнне на мностве **C** камплексных лікаў, гіпербалічная гамалогія праектыўнай плоскасці. Калі A — алгебра над полем P камплексных або рэчаісных лікаў, то пераўтварэнне $A \to A$, $x \to x^*$ называецца І. пры ўмове выканання аксіём: 1) $(x^*)^* = x$; 2) $(x + y)^* = x^* + y^*$; 3) $(\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*$; 4) $(x \cdot y)^* = y^* \cdot x^*$, дзе $x, y \in A$, $\lambda \in P$, $\bar{\lambda}$ — камплексна спалучаны з λ лік (азначэнне называецца а к с і я м а т ы ч н ы м).

ІНВАРЫЯНТ (франц. invariant — літаральна нязменны) — лік (алгебраічны выраз ці нейкае іншае матэматычнае паняцце), які звязаны з пэўным матэматычным аб'ектам і застаецца нязменным для вызначаных класаў яго пераўтварэнняў. Месцазнаходжанне адрэзка M_1M_2 на плоскасці ў прамавугольнай сістэме каардынат вызначаецца дзвюма парамі лікаў $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$. Пасля пераўтварэння каардынатнай сістэмы (паралельны перанос ці паварот восяў) пункты M_1 і M_2 будуць мець іншыя каардынаты (x_1', y_1') і (x_2', y_2'), аднак

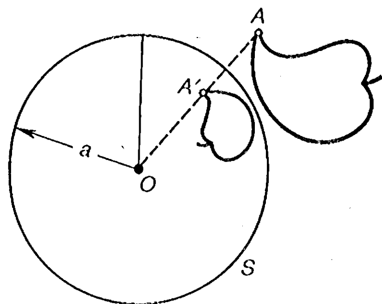
$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (x_1' - x_2')^2 + (y_1' - y_2')^2,$$

таму выраз $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$ ёсць І. гэтых пераўтварэнняў прамавугольных каардынат. Паняцце І. дае магчымасць вылучыць велічыні, якія характарызуюць нутраныя ўласцівасці аб'екта, што даследуецца. І. узнікаюць пры вывучэнні крывых і паверхняў вышэйшых парадкаў, у тапалогіі, праектыўнай геаметрыі і інш.

ІНВАРЫЯНТНАЯ ПАДГРУПА групы — тое, што *нармальная падгрупа.*

ІНВАРЫЯНТНАЯ ПАДПРАСТОРА вектарнай прасторы — падпрастора U вектарнай прасторы V у дачыненні да пераўтварэння f і такая, што $f(u) \subseteq U$. Калі $\dim V = n$, $\dim U = k$, $0 < k < n$, то існуе базіс, у якім матрыца лінейнага пераўтварэння f мае выгляд $\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$, дзе A_1 і A_2 — матрыцы, парадак якіх адпаведна роўны k і $n-k$. У канцамернай вектарнай прасторы над полем C камплексных лікаў для ўсякага лінейнага пераўтварэння f існуе аднамерная І.п.; у канцамернай вектарнай прасторы над полем R рэчаісных лікаў для ўсякага f існуе аднамерная ці двухмерная І.п.

ІНВЕРСІЯ (ад лац. inversio — пераварочванне; перастаноўка) — пераўтварэнне, якое ставіць у адпаведнасць (рыс.) кожнаму пункту A плоскасці такі пункт A на промні OA, што $OA' \cdot OA = k$, дзе k — некаторы лік. Пункт O называецца цэнтрам ці полюсам І., k — ступенню ці каэфіцыентам І. Простая, на якой знаходзіцца пункт O, пераўтвараецца ў сябе, а кожная іншая — у акружыну, і цэнтр O належыць гэтай акружыне. У дэкартавай сістэме каардынат І. можна задаць формуламі



$$x' = \frac{kx}{x^2 + y^2}; \quad y' = \frac{ky}{x^2 + y^2}.$$

І. захоўвае вуглы паміж лініямі, але мяняе арыентацыю.

ІНДА-АРАБСКІЯ ЛІЧБЫ — традыцыйны назоў дзесяці матэматычных знакаў: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, з дапамогай якіх у *дзесятковай сістэме лічэння* можна запісаць усякі лік. Гэтыя лічбы ўзніклі ў 5 ст. у Індыі, у 10—13 стст. сталі вядомыя ў Еўропе з арабскіх твораў.

ІНДУКЦЫЯ (ад лац. inductio — навядзенне, схіленне) — тое, што *матэматычная індукцыя.*

ІНДЫКАТАР (ад лац. indicator — паказальнік) мноства — тое, што *характарыстычная функцыя* мноства.

ІНДЭКС (ад лац. index) — 1) знак, з дапамогай якога адрозніваюць матэматычныя выразы. Напрыклад, у запісах a_0, b_3, c_k, d_{mn} лікі 0, 3, літары k, mn ёсць І.; 2) І. падгрупы H у групе G — магутнасць мноства левых (правых) сумежных класаў групы G па падгрупе H; абазначаецца $G{:}H$. Калі колькасць сумежных класаў канцая, то H называецца падгрупай канцага індэкса ў G. Перасячэнне канцай колькасці падгрупаў канцага І. само мае канцы І. (тэарэма Пуанкарэ). Праўдзіцца тэарэма Лагранжа: $|G| = |H| \cdot (G{:}H)$. У прыватнасці, калі G — канцая група, то парадак падгрупы ёсць дзельнік парадку групы. Мае месца абагульненне тэарэмы Лагранжа: калі H, K — падгрупы ў G, прычым H мае ў сабе K, то $(G:K) = (G:H) \cdot (H:K)$; 3) І. у тэорыі лікаў — лік, які ўзнікае пры развязанні параўнанняў. Калі p — няцотны просты лік, q — першаісны корань па модулі p, то І. ліку a называецца такі лік $k = \mathrm{ind}\,a$, што $a \equiv q^k (\mathrm{mod}\,p)$. Уласцівасці І.: $\mathrm{ind}\,ab = \mathrm{ind}\,a + \mathrm{ind}\,b \pmod{p-1}$; $\mathrm{ind}\,\frac{a}{b} = \mathrm{ind}\,a - \mathrm{ind}\,b \pmod{p-1}$.

Для зручнага карыстання створаны спецыяльныя табліцы І. для невялікіх модуляў.

ІН'ЕКТЫЎНАЕ АДЛЮСТРАВАННЕ, ін'екцыя, укладанне мноства A у мноства B, узаемна адназначнае адлюстраванне — адлюстраванне $f: A \to B$, пры якім розныя элементы з A маюць розныя вобразы ў B.

ІН'ЕКЦЫЯ (ад лац. injectio — укідванне) — тое, што *ін'ектыўнае адлюстраванне.*

ІНЕРЦЫІ ЗАКОН (ад лац. inertia — бяздзейнасць, нерухомасць) — тэарэма Сільвестра, паводле якой пры прывядзенні *квадратовай фор-*

мы да кананічнага выгляду $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^2, \alpha_i = \pm 1$, у рэчаісным выпадку колькасць каэфіцыентаў +1 і −1 не залежыць ад выбару базіса.

ІНСТЫТУ́Т МАТЭМА́ТЫКІ НАЦЫЯНА́ЛЬНАЙ АКАДЭ́МІІ НАВУ́К БЕЛАРУ́СІ — галоўная навуковая ўстанова, якая займаецца даследаваннямі ў галіне матэматыкі і яе дастасаванняў у Рэспубліцы Беларусь. Створаны 1 чэрвеня 1959 г. на базе дзвюх матэматычных лабараторый і лабараторыі электронных вылічальных машын Інстытута фізікі і матэматыкі АН БССР.

Да 1965 г. меў назоў Інстытут матэматыкі і вылічальнай тэхнікі, з 1965 г. — Інстытут матэматыкі. З'яўляецца галоўнай матэматычнай установай, якая каардынуе развіццё матэматыкі ў ВНУ і навукова-даследчых інстытутах Беларусі. На стану на сярэдзіну 2000 г. у інстытуце працуюць 110 чалавек, з іх 80 навуковых супрацоўнікаў, у тым ліку 20 дактароў і 44 кандыдаты навук. У інстытуце працуюць акадэмікі І.Гайшун (дырэктар з 1993), М.Ізобаў, члены-карэспандэнты В.Гарохавік, Ф.Кірылава, Л.Яновіч. У папярэднія гады тут працавалі акадэмікі Я.Барбашын, М.Ястргін (дырэктар з 1959 да 1977), У.Крылоў, У.Платонаў (дырэктар з 1977 да 1992), У.Спрынджук, Дз.Супруненка, С.Чухінін, члены-карэспандэнты Э.Груда, А.Залескі, Я.Іваноў.

Матэматычныя даследаванні вядуцца ў аддзелах матэматычнай тэорыі сістэм (кіраўнік аддзела акад. І.Гайшун), дыферэнцыяльных раўнанняў (акад. М.Ізобаў), нелінейнага аналізу (чл.-кар. В.Гарохавік), тэорыі лікаў (д-р фізіка-матэматычных навук В.Берннік), алгебры (д-р фізіка-матэматычных навук В.Янчэўскі), лікавых метадаў матэматычнай фізікі (д-р фізіка-матэматычных навук В.Абрашын), стахастычнага аналізу (д-р фізіка-матэматычных навук А.Ягораў), матэматычнай кібернетыкі (канд. фізіка-матэматычных навук У.Сарванаў), паралельных вылічальных працэсаў (д-р фізіка-матэматычных навук П.Сабалеўскі), тэорыі канечных групаў (канд. фізіка-матэматычных навук А.Ядчанка), лікавага мадэлявання (д-р фізіка-матэматычных навук П.Матус), інфарматызацыі (канд. фізіка-матэматычных навук А.Сянько).

Навукоўцамі інстытута распрацаваны тэарэтычныя асновы і метады вылічэння групаў Браўэра арыфметычных мнагастайнасцяў, геаметрычнай тэорыі выяўленняў канцаспароджаных групаў і апісанне ўласцівасцяў элементаў у выяўленнях алгебраічных і канечных групаў. Даследаваны праблемы набліжэння рэчаісных лікаў алгебраічнымі. Вывучаны асноўныя структурныя ўласцівасці дынамічных сістэм кіравання (устойлівасць, кіравальнасць, назіральнасць, стабілізаванасць), пабудаваны алгарытмы аптымізацыі гэтых сістэм. Развіты метады даследавання многапараметрычных дынамічных сістэм (раўнанні ў поўных вытворных, дыскрэтныя і дыферэнцыяльна-дыскрэтныя сістэмы). Распрацаваны асімптатычныя метады вывучэння дыферэнцыяльных сістэм: ацэнкі характарыстычных паказнікаў Ляпунова, узаемнае размеркаванне розных паказнікаў, апісанне мностваў паказнікаў Перона і Боля, будова характарыстычных мностваў сістэм Пфафа, ацэнкі развязкаў Эмдэна—Раўлера. Развіты метад апраксімацый квазідыферэнцавання нягладкіх функцый і адлюстраванняў. Прапанаваны метады набліжанага інтэгравання ў бясконцамерных прасторах, лікавага развязання нелінейных задач матэматычнай фізікі, пабудовы паралельных алгарытмаў, адэкватных рэгулярным архітэктурам многапрацэсарных вылічальных сістэм. Пабудаваны алгарытмы дакладнага і набліжанага развязання экстрэмальных камбінаторных задач.

З 1965 г. інстытут выдае міжнародны штомесячны часопіс "Дыферэнцыяльныя раўнанні".

У інстытуце падрыхтавана звыш 30 дактароў і каля 300 кандыдатаў фізіка-матэматычных навук. Інстытут падтрымлівае актыўныя творчыя сувязі з вядучымі навучальнымі ўстановамі многіх краін свету (Германія, Францыя, Бельгія, Расія, Грузія, Літва, Украіна, Грэцыя, Італія, Польшча, Аўстрыя, Аўстралія, Кітай, ЗША, Вялікабрытанія, Данія, Швейцарыя, Чэхія, Югаславія, Японія, Балгарыя), з'яўляецца арганізатарам шэрагу міжнародных канферэнцый, школаў, сімпозіумаў.

Дасягненні супрацоўнікаў інстытута адзначаны Ленінскай прэміяй (1978), Дзяржаўнымі прэміямі Беларусі (1974, 1978, 1982, 1998), прэміямі Ленінскага камсамола і ЛКСМБ (1970, 1976, 1984, 1987, 1990), а таксама прэміямі НАН Беларусі (1993, 1995, 1999).

ІНТУІЦЫЯНІ́СЦКАЯ ЛО́ГІКА — злічэнне прэдыкатаў, якое апісаў А.Гейтынг у 1930 г. Гэтае злічэнне азначаецца на стандартнай мове прэдыкатаў злічэння, мае ўсе схемы аксіём і правіла вывядзення (modus ponens — $\frac{A, A \supset B}{B}$) злічэння выказванняў, дадаткова квантарныя аксіёмы $\forall xA(x) \supset$ $\supset A(t)$, $A(t) \supset \exists xA(x)$ і два правілы вывядзення

$$\frac{c \supset A(x)}{c \supset \forall x A(x)}, \quad \frac{A(x) \supset c}{\exists x A(x) \supset c},$$

дзе x — зменныя, t — тэрм мовы і c — формула, якая не мае зменнай x у якасці параметра.

ІНТУІЦЫ́ЙНАЯ МАТЭМА́ТЫКА — матэматыка, пры будаванні якой лагічныя сувязі тлумачацца з пазіцый *інтуіцыянізму* спосабам, адрозным ад класічнага. Доказ у І.м. заўсёды звязаны з пэўнай эфектыўнай канструкцыяй, якая не абавязкова патрабуе існавання алгарытму. Аб'ектамі даследавання ў І.м. з'яўляюцца ў першую чаргу канструктыўныя будаванні. Адмова ад разгляду актуальна зададзеных бясконцых мностваў і патрабаванне эфектыўнасці ўсіх будаванняў часам прыводзяць да нязвыклых фактаў (напрыклад, кожная рэчаісная функцыя ў І.м. раўнамерна непарыўная). Сучасная І.м. складаецца з добра распрацаваных раздзелаў інтуіцыйнай тэорыі меры, функцыянальнага аналізу, тапалогіі, дыферэнцыяльных раўнанняў і г.д.

ІНТУІЦЫЯНІ́ЗМ (ад лац. intuitio — сузіранне) — сукупнасць філасофскіх і матэматычных ідэй і метадаў, якія разглядаюць матэматыку як навуку пра разумовыя будаванні. Задавальняецца разумовым будаваннем матэматычных аб'ектаў, разглядаючы іх па-за залежнасцю ад свету рэчаў, у выніку чаго набліжаецца да ідэалістычнага разумення асноў матэматыкі.

ІНТЭГРАВА́ННЕ — аперацыя знаходжання *інтэграла*. Пад І. разумеюць таксама развязанне дыферэнцыяльных раўнанняў. Гл. *Інтэгральнае злічэнне*.

ІНТЭГРАВА́ННЕ ЛІ́КАВАЕ — набліжанае вылічэнне *інтэграла* з дапамогай значэнняў падынтэгральнай функцыі. Маюцца на ўвазе вызначаныя простыя і кратныя інтэгралы, а таксама нявызначаныя. Для вылічэння вызначаных інтэгралаў ужываюцца *квадратовыя формулы*, а ў выпадку кратных інтэгралаў — *кубатурныя формулы*. Для набліжанага вылічэння інтэграла $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)dt$, калі верхняя мяжа інтэгравання ёсць зменная, распрацаваны спецыяльныя метады, бо значэнні $y(x)$ даводзіцца знаходзіць для многіх значэнняў x.

ІНТЭГРАВА́ННЕ ЧА́СТКАМІ — адзін з метадаў вылічэння нявызначанага і вызначанага інтэгралаў. Няхай $u = u(x)$ і $v = v(x)$ — функцыі рэчаіснай зменнай, якія маюць вытворныя, непарыўныя на адрэзку інтэгравання. Тады праўдзяцца формулы І.ч.

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du \text{ і}$$

$$\int_a^b u(x) \cdot dv(x) = u(x) \cdot v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x) \cdot du(x)$$

для нявызначанага і вызначанага інтэгралаў адпаведна.

ІНТЭ́ГРА-ДЫФЕРЭНЦЫЯ́ЛЬНАЕ РАЎНА́ННЕ — раўнанне, якое залежыць ад невядомай функцыі і яе вытворных і змяшчае інтэгральны аператар, што таксама залежыць ад невядомай функцыі і, магчыма, яе вытворных. Часам І.-д.р. можна звесці да інтэгральных ці дыферэнцыяльных раўнанняў.

ІНТЭГРА́Л (ад лац. integer — цэлы) — адно з галоўных паняццяў матэматыкі. Паняцце ўзнікла ў сувязі з патрэбаю знаходзіць функцыі па іх вытворных (*нявызначаны інтэграл*) і вызначаць плошчы, аб'ёмы, работу і г.д. (*вызначаны інтэграл*). Вывучэнне ўласцівасцяў і спосабаў вылічэння гэтых звязаных паміж сабою І. складае задачу *інтэгральнага злічэння*. Далейшае развіццё паняцця І. спрычынілася да ўзнікнення паняцця і н т э г р а л а Л е б э г а.

Няхай дадзена $f: [a, b] \to R$. Падзелім мноства значэнняў y на частковыя адрэзкі пунктамі $\ldots < y_{-2} < < y_{-1} < y_0 < y_1 < y_2 < \ldots$ і абазначым праз M_i мноства ўсіх значэнняў x з адрэзка $[a, b]$, для якіх $y_{i-1} \leq \leq f(x) < y_i$, а $\mu(M_i)$ — меру паводле Лебэга мноства M_i. Інтэгральную суму Лебэга функцыі азначаюць роўнасцю $\sigma = \sum_i \eta_i \, \mu(M_i)$, дзе η_i — адвольны лік з адрэзка $[y_{i-1}; y_i]$. Калі існуе конечны ліміт інтэгральных сумаў пры імкненні да нуля найбольшай з рознасцяў $y_i - y_{i-1}$, то ён называецца в ы з н а ч а н ы м і н т э г р а л а м Л е б э г а ад функцыі f на адрэзку $[a; b]$.

Для інтэгравальнасці паводле Лебэга абмежаванай функцыі неабходна і дастаткова, каб гэтая функцыя была вымернай. Функцыі, якія сустракаюцца ў матэматычным аналізе, амаль заўсёды вымерныя. Гэта азначае, што І. мае агульнасць, дастатковую патрэбам матэматычнага аналізу.

Другое абагульненне вызначанага І. даў Т.Стыльт'ес. Разглядаецца інтэгравальнасць адной функцыі $f: [a; b] \to R$ у дачыненні да другой функцыі $g: [a; b] \to R$. І.Стыльт'еса азначаецца як ліміт

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)[g(x_{k+1})-g(x_k)]$$

і абазначаецца $(S)\int_a^b f(x)dg(x)$. Яшчэ больш агульнае паняцце І. далі А.Данжуа і А.Хінчын.

ІНТЭГРА́Л ДЫФЕРЭНЦЫЯ́ЛЬНАГА РАЎНА́ННЯ — развязак *дыферэнцыяльнага раўнання*. Пад І.д.р. $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$ нераважна разумеюць стасунак выгляду Ф $(x, y) = 0$, які няяўна азначае развязак $y = y(x)$ дадзенага дыферэнцыяльнага раўнання. Роўнасць выгляду Ф $(x, y, C_1, ..., C_n) = 0$, з якой пры адпаведным выбары канстантаў $C_1, ..., C_n$ можна атрымаць усякі развязак дадзенага раўнання, называецца агульным І.д.р. Стасунак выгляду Ф $(x, y, y', ..., y^{(k)}, C_1, ..., ..., C_{n-k}) = 0$, дзе $1 \le k \le n$, называецца прамежкавым І.д.р. У прыватнасці, пры $k = 1$ маем першы І.д.р. Аналагічныя паняцці ўводзяцца для сістэм звычайных дыферэнцыяльных раўнанняў і для раўнанняў з частковымі вытворнымі.

ІНТЭГРА́Л ІМАВЕ́РНАСЦІ, інтэграл памылак — функцыя зменнай $x \in \mathbf{R}$, якая абазначаецца праз erf і азначаецца з дапамогай роўнасці

$$\operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\cdot dt.$$

У тэорыі імавернасцяў часцей за ўсё выкарыстоўваецца функцыя стандартнага нармальнага размеркавання Ф, звязаная з І.і. роўнасцю

$$\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}}\cdot dt = \frac{1}{2}\left[1+\operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right],$$

якая называецца таксама І.і. Гаўса. Яна выражае імавернасць няроўнасці $\xi < x$, дзе ξ — выпадковая велічыня, якая мае нармальнае размеркаванне з матэматычным спадзяваннем 0 і дысперсіяй 1.

ІНТЭГРА́Л ПАМЫ́ЛАК — тое, што *інтэграл імавернасці*.

ІНТЭГРА́Л ТЫ́ПУ КАШЫ́ — абагульненне паняцця *Кашы інтэграла*. Няхай L — кавалкава-гладкі замкнёны ці незамкнёны контур, цалкам размешчаны ў частцы плоскасці; τ — камплексная каардыната яго пунктаў і φ — функцыя пунктаў контура, якая задавальняе ўмовы Гёльдэра. Тады інтэграл

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau,$$

пабудаваны гэтак жа, як і інтэграл Кашы, называецца І.т.К. Функцыя φ называецца яго шчыльнасцю, а $\frac{1}{\tau - z}$ ядром. І.т.К. ёсць функцыя, аналітычная ва ўсёй плоскасці, акрамя пунктаў самога контура L. Ва ўсіх пунктах контура, што не супадаюць з яго канцамі, існуюць лімітавыя значэнні, якія выражаюцца праз шчыльнасць $\varphi(t)$ і інтэграл $\Phi(t)$ па формулах Сахоцкага:

$$\Phi^+(t) = \frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau,$$

$$\Phi^-(t) = -\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau.$$

ІНТЭГРА́ЛЬНАЕ ЗЛІЧЭ́ННЕ — раздзел матэматыкі, у якім вывучаюцца ўласцівасці і спосабы вылічэння *інтэгралаў*, а таксама іх дастасаванні. І.з. цесна звязанае з *дыферэнцыяльным злічэннем*, і разам яны складаюць аснову матэматычнага аналізу. Асноўнымі паняццямі І.з. з'яўляюцца два цесна звязаныя паміж сабою паняцці інтэграла — нявызначанага і вызначанага.

Знаходжанне нявызначанага інтэграла — дзеянне, адваротнае *дыферэнцаванню*. Першаіснай функцыяй для f: $[a, b] \to \mathbf{R}$ называецца такая функцыя F, вытворная якой на адрэзку $[a; b]$ супадае з функцыяй f: $F'(x) = f(x)$. Калі F — нейкая першаісная для f, то ўсякая функцыя выгляду Ф $(x) = F(x) + c$ таксама першаісная. Агульную формулу першаіснай дае нявызначаны інтэграл $\int f(x)dx = F(x) + c$. Усякая непарыўная на некаторым адрэзку функцыя мае на гэтым адрэзку першаісную і, значыць, для яе існуе нявызначаны інтэграл. Але не заўсёды нявызначаны інтэграл ад элементарнай функцыі ёсць элементарная функцыя, напрыклад $\int e^{-x^2}dx$ не выражаецца праз элементарныя функцыі.

Няхай зададзена функцыя f: $[a, b] \to R$. Падзелім адрэзак $[a, b]$ на n частак пунктамі $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$. Абазначым даўжыню частковага адрэзка $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$. Назавем дыяметрам падзелу адрэзка $[a, b]$ велічыню $\lambda(T) = \max_k\{\Delta x_k\}$. Возьмем у кожным частковым адрэзку адвольны пункт ξ_k. Тады сума $\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$ называецца інтэгральнай сумай. Ліміт гэтай сумы, калі $\lambda(T) \to 0$, называецца вызначаным інтэгралам (інтэгралам Рымана) ад функцыі f на адрэзку $[a, b]$ і абазначаецца

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Калі F — першаісная для f на $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

(формула Ньютана—Ляйбніца). Гэтая формула — асноўны сродак вылічэння вызначаных інтэгралаў, і яе часта прымаюць за азначэнне інтэграла. Пры вылічэнні інтэгралаў шырока выкарыстоўваюцца *інтэграванне часткамі* і замена зменных. Існуе шэраг самастойных метадаў вылічэння вызначаных інтэгралаў, не звязаных з пошукам першаісных (метад рэштаў, метад інтэгравання і дыферэнцавання па параметры і інш.). Вызначаны інтэграл мае разнастайныя дастасаванні: знаходжанне даўжынь дугаў крывых, плошчаў, аб'ёмаў, а таксама велічыняў, якія выкарыстоўваюцца ў механіцы, фізіцы і інш.

ІНТЭГРА́ЛЬНАЕ ПЕРАЎТВАРЭ́ННЕ — функцыянальнае пераўтварэнне выгляду

$$F(x) = \int_C K(x,t) f(t)dt,$$

дзе C — концы ці бясконцы контур у камплекснай плоскасці, $K(x, t)$ — ядро І.п. Формулы, якія дазваляюць знайсці функцыю $f(t)$ па вядомай функцыі $F(x)$, называюцца формуламі пераўтварэння. Найбольш вядомыя і вывучаныя І.п. Бохнэра, Вэбэра, Фур'е, Ваерштраса, Ганкеля. Прыватны выпадак апошняга — *сінус-пераўтварэнне* і *косінус-пераўтварэнне.*

ІНТЭГРА́ЛЬНАЯ ГЕАМЕ́ТРЫЯ — тэорыя інварыянтаў (у дачыненні да непарыўных групаў пераўтварэнняў прасторы на сябе) мераў на мноствах. Такімі мноствамі з'яўляюцца падмноствы прасторы, напрыклад мноствы простых, плоскасцяў, геадэзічных, выпуклых паверхняў і г.д.

Асноўная задача, якая развязваецца ў І.г., — увядзенне інварыянтных мераў і іх геаметрычныя дастасаванні. Для ўвядзення інварыянтнай меры знаходзяць спачатку інтэгральны інварыянт дадзенай групы з развязку дыферэнцыяльнага раўнання

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(\xi_h^i(x)F(x)) = 0,\ h = \overline{1,r},$$

дзе x_i — каардынаты пункта n-мернай прасторы, ξ_h^i — каэфіцыент інфінітэзімальнага пераўтварэння групы, r — колькасць параметраў пераўтварэння, $F(x)$ — шуканы інтэгральны інварыянт. Затым знаходзяць такую функцыю ад каардынат пункта прасторы, інтэграл ад якой па нейкім абсягу прасторы не змяняецца пасля пераўтварэння каардынат прасторы дадзенай групай Λ_i. Наступная задача І.г. — увядзенне меры мноства мнагастайнасцяў, якія захоўваюць свой тып пасля якой-небудзь групы непарыўных пераўтварэнняў. У выпадку аднароднай мнагамернай прасторы мера мноства мнагастайнасцяў (такіх, як пункты, простыя, гіперплоскасці, гіперсферы, гіперпаверхні другога парадку) вызначаецца з дакладнасцю да сталага множніка інтэгралам $\int_x dH = [w^1, w^2, ..., w^n]$, дзе w^i — рэлятыўныя кампаненты дадзенай транзітыўнай групы Λ_i. Лінейныя камбінацыі са сталымі каэфіцыентамі гэтых кампанентаў з'яўляюцца левымі часткамі раўнанняў сістэмы Пфафа, якая адпавядае разгледжанаму мноству мнагастайнасцяў.

Існуюць задачы, якія абагульняюць традыцыйнае разуменне І.г. Гэта задачы пераўтварэння функцый, зададзеных на мностве адных геаметрычных аб'ектаў у нейкай прасторы, у функцыі, зададзеныя на мностве іншых геаметрычных аб'ектаў той жа прасторы. Да такіх задач належыць задача пошуку адваротнага пераўтварэння Радона. Няхай у n-мернай афіннай прасторы інтэгральнае пераўтварэнне функцыі $f(x)$ задаецца як інтэграванне яе па гіперплоскасці. Задача пошуку адваротнага пераўтварэння Радона — гэта задача знаходжання $f(x)$ зыходзячы з яе інтэгралаў па гіперпаверхнях. Аналагічна фармулююцца і развязваюцца задачы пошуку функцыі на лінейчатых паверхнях другога парадку ў чатырохмернай камплекснай прасторы, калі вядомыя яе інтэгралы па простых, якія складаюць гэтую паверхню.

ІНТЭГРА́ЛЬНАЯ КРЫВА́Я — графік развязку *дыферэнцыяльнага раўнання* ці сістэмы дыферэнцыяльных раўнанняў.

ІНТЭГРА́ЛЬНАЯ ПАКА́ЗНІКАВАЯ ФУ́НКЦЫЯ — *спецыяльная функцыя* E_i, што пры $x \neq 0$ вызначаецца інтэгралам

$$E_i(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t} dt,$$

які пры $x > 0$ трэба разумець у сэнсе галоўнага значэння. І.п.ф. не з'яўляецца *элементарнай функцыяй.* Яна раскладаецца ў шэраг

$$E_i(x) = C + \ln|x| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!k},$$

дзе $C = 0{,}5772...$ — канстанта Ойлера. Існуе сувязь паміж І.п.ф. і *інтэгральным лагарыфмам*.

ІНТЭГРА́ЛЬНАЯ СУ́МА — сума, з якой пры пэўных умовах з дапамогай лімітавага пераходу атрымліваецца інтэграл.

Разгледзім найпрасцейшы выпадак *вызначанага інтэграла*. Няхай на адрэзку $[a, b]$ дадзена функцыя $y = f(x)$. Падзелім $[a; b]$ пунктамі $a = x_0 < < x_1 < x_n = b$ на n частак і возьмем адвольны лік $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Сума

$$S_n = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + ... + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1})$$

называецца І.с. Гл. таксама *Інтэграл*, *Крывалінейны інтэграл*, *Паверхневы інтэграл*.

ІНТЭГРА́ЛЬНАЯ ТЭАРЭ́МА ЛЯПЛЯ́СА — тэарэма пра набліжанне *біномнага размеркавання* нармальным размеркаваннем. Калі S_n — колькасць поспехаў у n выпрабаваннях Бэрнулі з імавернасцю поспеху p, $0 < p < 1$, то

$$P\left(x_1 < \frac{S_n - np}{\sqrt{np\mu - p}} \le x_2\right) \to \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$$

пры $n \to \infty$ для ўсякіх рэчаісных лікаў x_1 і x_2 ($x_1 < < x_2$), дзе $\Phi(x)$ — функцыя размеркавання стандартнага *нармальнага размеркавання*.

ІНТЭГРА́ЛЬНЫ АПЕРА́ТАР — адлюстраванне $x \to A_x$, калі закон адпаведнасці задаецца з дапамогай *інтэграла*. Раўнанні з І.а. называюцца інтэгральнымі, напрыклад *Вальтэры раўнанні*, *Фрэдгальма раўнанні*.

ІНТЭГРА́ЛЬНЫ КРЫТЭ́Р ЗБЕ́ЖНАСЦІ ш э р а г у — неабходныя і дастатковыя ўмовы, якія звязваюць збежнасць шэрагу і неўласцівага інтэграла. Няхай функцыя $f(x)$ вызначана для ўсіх $x \ge 1$, неадмоўная і спадальная. Шэраг $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ збягаецца, калі і толькі калі збягаецца неўласцівы інтэграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$. З дапамогай І.к.з. лёгка высветліць, што пры $\alpha > 1$ збягаецца ш э р а г Д ы р ы х л е $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}$, а пры $\alpha \le 1$ ён разбягаецца. З дапамогай іншых крытэраў збежнасці гэта зрабіць больш складана.

ІНТЭГРА́ЛЬНЫ ЛАГАРЫ́ФМ — спецыяльная функцыя $\text{li}\,x$, якая вызначаецца інтэгралам

$$\text{li}\,x = \int_0^x \frac{dt}{\ln t},\ x > 0,\ x \ne 1.$$

І.л. нельга падаць у концай форме праз элементарныя функцыі. Для вялікіх x І.л. добра апраксімуе колькасць простых лікаў, якія не перавышаюць x, і таму мае вялікае значэнне ў тэорыі лікаў. Дзель І.л. і функцыі $\frac{x}{\ln x}$ імкнецца да 1 з нарастаннем x.

ІНТЭГРА́ЛЬНЫ СІ́НУС І ІНТЭГРА́ЛЬНЫ КО́СІНУС — *спецыяльныя функцыі*, якія азначаюцца роўнасцямі:

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt,\ x > 0,$$

$$\text{Ci}(x) = -\int_x^{\infty} \frac{\cos t}{t} dt,\ x > 0.$$

Для і н т э г р а л ь н а г а с і н у с а часам выкарыстоўваюць азначэнне

$$\text{Si}(x) = -\int_x^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \text{Si}(x) - \frac{\pi}{2}.$$

І.с. і І.к. не выражаюцца ў концым выглядзе праз элементарныя функцыі; іх можна падаць у выглядзе шэрагаў:

$$\text{Si}(x) = x - \frac{x^3}{3!3} + ... + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!(2k+1)} + ...,$$

$$\text{Ci}(x) = c + \ln x - \frac{x^2}{2!2} + \frac{x^4}{4!4} + ... + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!2k} + ...,$$

дзе $c = 0{,}5772...$ — канстанта Ойлера.

ІНТЭГРА́ЛЬНЫХ СТАСУ́НКАЎ МЕ́ТАД — метад развязання сістэм дыферэнцыяльных раўнанняў з частковымі вытворнымі, заснаваны на набліжанай замене гэтых сістэм сістэмамі звычайных дыферэнцыяльных раўнанняў. Шырокія дастасаванні І.с.м. знайшоў у газавай дынаміцы, дзе з яго дапамогай быў развязаны шэраг задач. Існуюць тры схемы І.с.м.: абсяг інтэгравання падзяляецца лініямі, якія праходзяць паміж паверхняй цела і ўдарнай хваляй; абсяг інтэгравання падзяляецца лініямі, якія праходзяць паміж воссю сіметрыі і межавай характарыстыкай; робіцца падзел на падабсяг дзвюма сем'ямі ліній, якія не перасякаюцца.

ІНТЭГРА́ЛЬНЫЯ РАЎНА́ННІ — раўнанні, якія змяшчаюць невядомыя функцыі пад знакам *інтэграла*. Бываюць лінейныя і нелінейныя. Знаходзяць дастасаванні пры развязанні задач матэматычнай фізікі.

1) Т э о р ы я І. р. Найпрасцейшы тып — л і н е й н а е І. р., у якое невядомая функцыя ўваходзіць у першай ступені; яно запісваецца ў выглядзе

$$\lambda \int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy = f(x)$$

(І. р. п е р ш а г а р о д у) або

$$\varphi(x) + \lambda \int_a^b K(x, y)\varphi(y) = f(x)$$

(І. р. д р у г о г а р о д у). У пададзеных раўнаннях $\varphi(x)$ — невядомая функцыя, $K(x, y)$ — ядро, λ — сталая велічыня, $f(x)$ — вольны складнік. Калі $f(x) = 0$, то І.р. называецца а д н а р о д н ы м. Калі ядро $K(x, y)$ і вольны складнік $f(x)$ непарыўныя, раўнанне называецца І. р. Ф р э д г а л ь м а. Пры

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)\psi_i(y)$$

раўнанне з в ы р о д н а е. У гэтым выпадку яно зводзіцца да сістэмы лінейных алгебраічных раўнанняў. І.р. другога роду можна развязаць *паслядоўных набліжанняў метадам*, калі параметр λ малы, $\lambda(b - a) \max|K(x, y)| < 1$. На аснове тэорыі набліжання функцый кожнае непарыўнае ядро можна падаць у выглядзе звыроднага і малога ядраў. Існуе тэорыя І.р. Фрэдгальма для адвольнага непарыўнага ядра. Тыя значэнні параметра λ, пры якіх аднароднае І.р. мае развязак, адрозны ад трывіяльнага нулявога, называюцца яго ўласнымі значэннямі, а адпаведныя яго развязкі — уласнымі функцыямі. І.р. з сіметрычным ядром $K(x, y) = K(y, x)$ можна падаць у выглядзе сумаў шэрагаў Фур'е па ўласных функцыях. У выпадку ядраў, якія не інтэгруюцца, ці пры бясконцым абсягу інтэгравання ўзнікаюць а с а б л і в ы я (с і н г у л я р н ы я) І.р. Добра вывучаны раўнанні

$$\varphi(t) = \int_L \frac{K(t, \tau)}{t - \tau}\varphi(\tau)d\tau = f(t)$$

— І. р. з я д р о м К а ш ы, дзе L — крывая інтэгравання, t, τ — камплексныя каардынаты;

$$\varphi(x) + \int_0^\infty K(x - t)\varphi(t)dt$$

— І. р. т ы п у з г о р т к і, а таксама іх'абагульненні. Тэорыя нелінейных І.р. складаная і яшчэ мала распрацаваная. Асновы яе заклаў расійскі матэматык А.Ляпуноў.

2) Л і к а в ы я м е т а д ы р а з в я з а н н я І. р. — метады знаходжання набліжаных развязкаў І.р.

Неабходна знайсці набліжаны развязак аднамернага раўнання Фрэдгальма 2-га роду

$$\varphi(x) + \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds + f(x), \qquad (1)$$

дзе $f(x)$ непарыўная на $[a, b]$, λ — лікавы параметр, $K(x, s)$ непарыўная на $a \le x, s \le b$. Калі λ не з'яўляецца ўласным значэннем ядра $K(x, s)$, тады І.р. (1) мае адзіны развязак $\varphi(x)$, непарыўны на $[a, b]$. У гэтых умовах можна атрымаць набліжаны развязак наступнымі спосабамі:

П е р ш ы с п о с а б. Няхай a і b — лікі. Інтэграл у (1) замяняюць інтэгральнай сумай на сетцы $\{s_j\}$, $j = \overline{1, n}$, а зменнай x надаюць значэнні $x_i = s_i$, $i = \overline{1, n}$. Атрымліваецца сістэма лінейных алгебраічных раўнанняў у дачыненні да $\varphi_n(s_j) = \varphi_j$:

$$\sum_{i=1}^{n} A_{ij}\varphi_j = f(x_i), \ i = \overline{1, n}, \qquad (2)$$

дзе $A_{ij} = \delta_{ij} - \lambda c_i K(x_i, x_j)c_j$ — каэфіцыент квадратурнай формулы. Сістэма (2) пры даволі вялікіх n мае адзін развязак.

Д р у г і с п о с а б. Ядро $K(x, s)$ раўнання (1) замяняюць звыродным ядром

$$K_1(x,s) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)b_i(s), \qquad (3)$$

у якім функцыі $\{a_i(x)\}$ лінейна незалежныя. Пры гэтым атрымліваецца набліжанае раўнанне

$$\varphi_n(x) = \lambda \int_a^b \sum_{i=1}^{n} a_i(x)b_i(s)\varphi_n(s)ds + f(x), \qquad 4)$$

якое мае развязак $\varphi_n(s)$ выгляду

$$\varphi_n(x) = \lambda \sum_{i=1}^{n} c_i a_i(x) + f(x), \quad c_i = \int_a^b b_i(s)\varphi_n(s)ds. \quad (5)$$

Для вызначэння канстантаў $\{c_i\}$ будуюць сістэму лінейных алгебраічных раўнанняў.

Т р э ц і с п о с а б. У якасці набліжаных развязкаў бяруць функцыі $\varphi_n(x)$, атрыманыя метадам ітэрацыі па формулах

$$\varphi_{n+1}(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi_n(s)ds + f(x), \varphi_0(x) = f(x),$$

бо паслядоўнасць $\{\varphi_n(x)\}$ раўнамерна збягаецца да шуканага развязку пры $n \to \infty$, калі $|\lambda| < \frac{b - a}{M}$, $M = \max|K(x,s)|$. Гэтая збежнасць мае месца і для пэўных ядраў з інтэгравальнымі асаблівасцямі.

Нелінейныя І.р. 2-га роду звычайна набліжана развязваюць метадам *ітэрацый*. Для атрымання набліжаных развязкаў як лінейных, так і нелінейных І.р. выкарыстоўваюць таксама *Галёркіна метад*.

Аналагічныя метады можна выкарыстоўваць і для атрымання набліжаных развязкаў мнагамерных І.р. Фрэдгальма 2-га роду. Распрацаваныя аналагічныя набліжаныя метады развязання сінгулярных І.р. Калі ў раўнанні (1) λ супадае з адным з уласных значэнняў ядра $K(x, s)$, тады задача знаходжання яго развязкаў некарэктна сфармуляваная. І.р. Фрэдгальма 1-га роду — гэта таксама некарэктна сфармуляваныя задачы (гл. *Некарэктная задача*).

Тэорыя І.р. распрацоўвалася і ў Беларусі акад. Ф.Гахавым і яго школай, а таксама П.Забрэйкам, М.Шэшкам.

ІНТЭГРО́ЎНЫ МНО́ЖНІК — функцыя пэўнага выгляду, якая дазваляе развязаць звычайнае дыферэнцыяльнае раўнанне 1-га парадку

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0. \qquad (1)$$

Менавіта функцыя $\mu = \mu(x, y) \neq 0$, для якой выраз

$$\mu(x, y)(P(x, y)dx + Q(x, y)dy) = dU(x, y)$$

ёсць поўны дыферэнцыял. Калі раўнанне (1) у абсягу D (дзе $P^2 + Q^2 \neq 0$) мае гладкі інтэграл, то яно мае ў D І.м. У якасці І.м. можна ўзяць адвольны непрывіяльны развязак раўнання

$$Q(x, y)\frac{\partial\mu(x, y)}{\partial x} - P(x, y)\frac{\partial\mu(x, y)}{\partial y} =$$

$$= \mu(x, y)\cdot\left(\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}\right).$$

Аднак праінтэграваць гэтае раўнанне ўдаецца толькі ў асобных выпадках.

ІНТЭРВА́Л ЗБЕ́ЖНАСЦІ с т у п е н е в а г а ш э р а г у — інтэрвал рэчаіснай восі, у кожным пункце якога ступеневы шэраг збягаецца, а ў пунктах па-за інтэрваламі (у тым ліку па-за канцамі І.з.) — разбягаецца (гл. *Ступеневы шэраг*).

ІНТЭРВА́Л І СЕГМЕ́НТ (ад лац. intervallum — прамежак, адлегласць; segmentum — адрэзак) — мноствы пунктаў на лікавай восі. І н т э р в а л (а д к р ы т ы п р а м е ж а к) — мноства ўсіх пунктаў x на простай, якія змяшчаюцца паміж пунктамі a і b ($a < x < b$), абазначаецца (a, b). С е г м е н т (а д р э з а к, з а м к н ё н ы п р а м е ж а к) — мноства ўсіх пунктаў на простай, якія знаходзяцца паміж пунктамі a і b разам з гэтымі пунктамі ($a \leq x \leq b$), абазначаецца $[a, b]$. Тэрмін "інтэрвал" ужываюць і ў шырокім сэнсе: інтэрваламі называюць уласны інтэрвал (a, b), бясконцыя (неўласцівыя) інтэрвалы $(-\infty; a)$, $(a; +\infty)$, $(-\infty; +\infty)$. І. і с. — прыватныя выпадкі *прамежкаў лікавых*. Паняцці І. і с. ужываюцца таксама і ў дачыненні да *ўпарадкаваных мностваў*.

ІНТЭРВА́ЛЬНЫ АНА́ЛІЗ — раздзел вылічальнай матэматыкі, які прысвечаны ўліку памылак акруглення пры ажыццяўленні разлікаў на лікавых кампутарах. Паколькі дакладнае выяўленне лічбаў немагчымае ў машыне з концай разраднай сеткай, то вынік кожнага даволі складанага разліку змяшчае памылку, абумоўленую хібнасцямі акруглення зыходных звестак і прамежкавых вынікаў. Для ўліку гэтай памылкі можна кожную велічыню падаць у выглядзе пары лікаў, якія абмяжоўваюць яе зверху і знізу і маюць дакладнае выяўленне на кампутары. Такім чынам кожная велічыня замяняецца пэўным інтэрвалам, які яе змяшчае. Пры выкананні арыфметычных дзеянняў новы інтэрвал вылічаецца з дапамогай спецыяльных аперацый. Аснова І.а. — і н т э р в а л ь н а я а р ы ф м е т ы к а. Няхай G — мноства інтэрвалаў $\{(a, b)\}$. Элементарныя арыфметычныя аперацыі з інтэрваламі I і J азначаюцца наступным чынам: $(*) = \{x*y: x\in I, y\in J\}$, дзе $*\in\{+, -, \cdot, /\}$ (дзяленне магчымае толькі ў тым выпадку, калі інтэрвал, які з'яўляецца дзельнікам, не змяшчае нуль). Мноства G стварае паўгрупу ў дачыненні да складання і множання.

І.а. паспяхова выкарыстоўваецца пры развязанні пэўных матэматычных задач. Аднак скарыстанне метадаў І.а. значна павялічвае аб'ём працы (больш чым удвая), патрабуе ўдвая больш памяці і часу падліку. Акрамя гэтага, у некаторых задачах інтэрвал, які змяшчае канчатковы адказ, часта бывае настолькі вялікім, што практычна не дае развязання задачы. Для пераадольвання апошняй цяжкасці развіваецца І.а. са структурамі тэорыі імавернасцяў, а таксама выкарыстоўваюцца ідэі і паняцці тэорыі н е в ы р а з н ы х (*fuzzy*) мностваў. І.а. мае пэўнае тэарэтычнае значэнне, бо арыфметыка інтэрвалаў істотна адрозніваецца ад арыфметыкі рэчаісных і камплексных лікаў, арыфметыкі матрыц аператараў і г.д.

ІНТЭРПАЛЯЦЫ́ЙНАЯ ФО́РМУЛА — формула для набліжанага вылічэння значэнняў функцыі $f(x)$, заснаваная на замене функцыі, якая набліжаецца, больш простай (у пэўнім сэнсе) функцыяй. Распаўсюджаная л і н е й н а я і н т э р-

п а л я ц ы я. Калі $f(x)$ вызначана на адрэзку $[a, b]$, выбрана сетка $\Delta_n = \{a \le x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$, то І.ф. для лінейнай інтэрпаляцыі мае выгляд

$$L_1(x) = \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}[f(x_{k+1}) - f(x_k)] +$$

$$+ f(x_k), x \in [x_k, x_{k+1}].$$

Сярод кавалкава-многаскладовай інтэрпаляцыі ўжываюцца таксама І.ф. для п а р а б а л і ч н а й і к у б і ч н а й інтэрпаляцыі. Існуюць розныя формулы запісу інтэрпаляцыйных мнагаскладаў Лягранжа (гл. *Лягранжа інтэрпаляцыйная формула*). Пры апрацоўцы вынікаў вымярэння $\{y_k\}$ каэфіцыенты лінейнай камбінацыі $L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ выбіраюцца з патрабавання мінімізацыі сумы $S = \sum_{k=1}^{n}[y_k - L_n(x_k)]^2, m \ge n.$

Такое будаванне называецца і н т э р п а л я ц ы я й с п о с а б а м н а й м е н ш ы х к в а д р а т а ў.

ІНТЭРПАЛЯЦЫ́ЙНЫ ПРАЦЭ́С — працэс будавання паслядоўнасці аператараў $L_n(x, f)$ для розных значэнняў n і дадзенай функцыі. Калі $f(x)$ — непарыўная функцыя на адрэзку $[a, b]$ і пры кожным n дадзены вузлы $\{x_k^{(n)}\}_{k=0}^{n}$, $a \le$ $\le x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < ... < x_n^{(n)} \le b$, то магчыма пабудаваць паслядоўнасць алгебраічных мнагаскладаў $P_n(x, f)$, якія задавальняюць адпаведныя ўмовы інтэрпаляцыі: $P_n(x_k^{(n)}, f) = f(x_n^{(n)})$, $k = 0, 1, ..., n$.

Вузлы інтэрпаляцыі выбіраюцца, каб астача інтэрпаляцыі была на магчымасці найменшая. Калі $f(x)$ адпавядае ўмове Гёльдэра $|f(x_1) - f(x_2)| \le$ $\le M|x_1 - x_2|^{\alpha}$, $0 < \alpha \le 1$, і за вузлы інтэрпаляцыі ўзятыя нулі мнагасклада Чабышова

$$x_k^{(n)} = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\frac{\pi(2k+1)}{2n+2}, \; k = 0, 1, ..., n,$$

то паслядоўнасць адпаведных інтэрпаляцыйных мнагаскладаў раўнамерна збягаецца да функцыі $f(x)$. І.п. для перыядычных функцый грунтуецца на роўнаадддаленых вузлах.

ІНТЭРПАЛЯ́ЦЫЯ (ад лац. interpolatio — змяненне; скажэнне) — спосаб набліжанага (або дакладнага) знаходжання пэўнай велічыні з дапамогай вядомых асобных яе значэнняў ці значэнняў іншых велічыняў, з ёй звязаных. І. функцыі $f(x)$ на адрэзку $[a, b]$ праз яе значэнні ў вузлах x_k сеткі $\Delta_n = \{a \le x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$ мае на ўвазе будаванне іншай функцыі (аператара) $L_n(x, f)$, для якой выконваюцца ўмовы $L_n(x, f) = f(x_k)$, $k = 0, 1, ..., n$. У больш агульнай пастанове задача І. функцыі $f(x)$ палягае ў будаванні $L_n(x, f)$ не толькі з умовы супадзення значэнняў функцый $f(x)$ і $L_n(x, f)$ у вузлах $\{x_n\}$, але і з патрабавання супадзення ў асобных вузлах іх вытворных да нейкага парадку. Звычайна шукаецца ў выглядзе

$$L_n(x, f) = \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i(x),$$

дзе $\{\varphi_i(x)\}$ — якая-небудзь сістэма л і н е й н а н е з а л е ж н ы х ф у н к ц ы й. Выбар сістэмы $\{\varphi_i(x)\}$ вызначаецца ўласцівасцямі таго класа функцый, для якіх патрэбны інтэрпаляцыйныя формулы. Часцей за ўсё карыстаюцца алгебраічнай І., калі $\varphi_i(x) = x^i$.

ІНТЭРПРЭТА́ЦЫЯ (ад лац. interpretatio — пасярэдніцтва) — супастаўленне ўсім зыходным паняццям і дачыненням дадзенай аксіяматычнай тэорыі нейкіх матэматычных аб'ектаў і стасункаў паміж імі. Будаванне праўдзівай І. адной тэорыі ў другой — адзін з метадаў доказу несупярэчлівасці першай тэорыі ў дачыненні да другой. Так была даказаная несупярэчлівасць геаметрыі Лабачэўскага, бо за дзве паслядоўныя І. гэтая праблема была зведзеная да несупярэчлівасці арыфметыкі. Метадам І. можна таксама развязваць пытанні пра незалежнасць сістэмы аксіём.

ІНФАРМА́ТЫКА — навука, якая вывучае законы і метады назапашвання, апрацоўкі і перадачы інфармацыі з дапамогай камп'ютара. І. карыстаецца звесткамі матэматыкі, псіхалогіі, лінгвістыкі і іншых навук і спалучае гэтыя звесткі. У склад І. звычайна ўлучаюць тэорыю аўтаматаў, тэорыю алгарытмаў, тэорыю фармальных моваў і граматык, доказы праўдзівасці праграм, тэорыю складанасці алгарытмаў і г.д. Пранікненне І. ва ўсе сферы жыцця і дзейнасці чалавека цесна звязанае з вытворчасцю і распаўсюджваннем персанальных камп'ютараў. Адрозніваюць І. як навуку, як навучальную дысцыпліну і як галіну народнай гаспадаркі.

ІНФАРМА́ЦЫІ КО́ЛЬКАСЦЬ — мера велічыні ведаў пра тыя або іншыя факты, з'явы і г.д. Звычайна І.к. з'яўляецца інтуіцыйнай і не дае магчымасці колькаснай ацэнкі інфармацыі, таму ацэнка І.к. даецца з дапамогай імавернасных характарыстык. Няхай X і Y — дыскрэтныя прасторы, x_k і y_k — нейкія пункты гэтых прастораў. Няхай на мноствах X і Y зададзена размеркаванне

імавернасцяў $p(x)$ і $p(y)$, а на дэкартавым здабытку $X \times Y$ — $p(x, y)$. Тады І.к., якая змяшчаецца ў з'яве y_i, у дачыненні да x_k вызначаецца паводле формулы

$$I(x_k / y_i) = \log_2 \frac{p(x_k / y_i)}{p(x_k)},$$

дзе $p(x_k / y_k)$ — умоўная імавернасць размеркавання. Найбольш ужывальная адзінка І.к. — б і т. Іншыя адзінкі І.к.: 1 байт (б) = 2^3 бітаў, 1 кілабайт (Кб) = 2^{10} байтаў, 1 мегабайт (Мб) = 2^{10} кілабайтаў, 1 гігабайт (Гб) = 2^{10} мегабайтаў.

ІНФАРМА́ЦЫІ ТЭО́РЫЯ — раздзел інфарматыкі, у якім матэматычнымі метадамі даследуюцца колькасныя ўласцівасці інфармацыі. І.т. дае матэматычнае апісанне і ацэнку якасці перадачы, захавання, выпрацоўкі і класіфікацыі інфармацыі. Узнікненне І.т. звязваюць з імем амерыканскага вучонага К.Шэнана. Асаблівасць І.т. — выкарыстанне статыстычных метадаў. Гэта звязана з тым, што працэс выпрацоўкі інфармацыі вядзе да памяншэння нявызначанасці нашых ведаў у дачыненні да аб'екта. З іншага боку, натуральнай лікавай мерай нявызначанасці пэўнай падзеі ёсць яе імавернасць. У І.т. вылучаюць раздзел тэорыі перадачы інфармацыі, які вывучае аптымальныя і квазіаптымальныя спосабы перадачы інфармацыі па каналах сувязі пры дапушчэнні, што можна ў досыць шырокім дыяпазоне выбіраць метады кадавання паведамленняў у сігналы на ўваходзе ў канал сувязі і метады дэкадавання сігналаў у паведамленні на выхадзе з канала. У І.т. часта ўлучаюць таксама тэорыю пазнавання вобразаў, якая даследуе алгарытмы размеркавання аб'ектаў па пэўных класах. Гэтыя класы апісаны на ўзроўні інтуіцыі і не могуць мець акрэсленага матэматычнага апісання. Алгарытм пазнавання ўлучаюць у сябе працэсы навучання па нейкім спісе загадзя адкласіфікаваных чалавекам аб'ектаў.

ІНФАРМА́ЦЫЯ (ад лац. informatio — тлумачэнне, выкладанне) — змест паведамлення ці сігналу, звесткі, якія разглядаюцца ў працэсе іх перадачы. І. разглядаецца таксама як агульнанавуковае паняцце — яго немагчыма далучыць да якой-небудзь адной галіны ведаў. У *інфарматыцы* І. разглядаюць як канцэптуальна звязаныя паміж сабою звесткі, паняцці, што змяняюць уяўленні пра з'яву ці аб'ект навакольнага свету. Паведамленні перамяшчаюцца ад іх творцаў да карыстальнікаў, бо змяшчаюць у сабе звесткі, якія былі невядомыя карыстальніку. І. падзяляецца на віды: п а в о д л е п а х о д ж а н н я — у нежывой прыродзе, у свеце жывёл і раслін, у чалавечым грамадстве; з а л е ж н а а д с п о с а б у п е р а д а ч ы і ў с п р ы м а н н я — візуальная, гукавая, машынаарыентаваная; п а в о д л е г р а м а д с к а г а п р ы з н а ч э н н я — масавая, спецыяльная, асабістая. І. уласцівыя: атрыбутыўнасць, без якой яна не можа існаваць; прагматычнасць, якая вызначае ступень карыснасці яе для практыкі; дынамічнасць, што паказвае змену яе з цягам часу. Навука, тэхніка, грамадства не могуць развівацца без збору, назапашвання і перапрацоўкі І. з мэтай атрымання новых ведаў. Выкарыстанне для гэтых мэтаў камп'ютара дазваляе паскорыць інфармацыйныя працэсы.

ІНФІ́МУМ (ад лац. infimum — найніжэйшае) — дакладная ніжняя мяжа мноства E рэчаісных лікаў (абазначаецца $\inf E$).

ІНЦЫДЭ́НТНАСЦІ ДАЧЫНЕ́ННЕ — тое, што *інцыдэнтнасць*.

ІНЦЫДЭ́НТНАСЦІ МА́ТРЫЦА — матрыца, якая складаецца з 0 і 1. Характарызуе *інцыдэнтнасць* элементаў. Няхай $A = (A_1, ..., A_m)$ і $B = (B_1, ..., B_n)$ — два наборы аб'ектаў, а $I \subseteq A \times B$ — дачыненне інцыдэнтнасці паміж імі. І.м. для дачынення інцыдэнтнасці — гэта $m \times n$-матрыца M, элемент якой M_{kl} вызначаецца роўнасцямі:

$$M_{kl} = \begin{cases} 1, \text{калі } A_k \text{ і } B_l \text{ інцыдэнтныя}, \\ 0, \text{калі } A_k \text{ і } B_l \text{ неінцыдэнтныя}. \end{cases}$$

Гл., напрыклад, *Граф*.

ІНЦЫДЭ́НТНАСЦЬ (ад. лац. incidens (incidentis) — які трапляе, які натыкаецца), д а ч ы н е н н е і н ц ы д э н т н а с ц і — *бінарнае дачыненне* паміж элементамі мностваў A і B з загаданымі ўласцівасцямі. Паняцце І. уводзіцца дзеля выкарыстання геаметрычнай інтуіцыі пры даследаванні камбінаторных праблем існавання і размяшчэння. Трыяду (A, B, I) называюць сістэмай І. У залежнасці ад спісу загаданых уласцівасцяў сістэмы І. прыводзяць да тых ці іншых камбінаторных канфігурацый. Напрыклад, праблема размяшчэння элементаў у дадзеным наборы k-элементавых мностваў (блокаў) такім чынам, каб кожны элемент быў роўна r разоў у наборы і кожныя два з розных элементаў з'яўляліся роўна ў λ блоках, прыводзіць да блок-схемы.

Іншы прыклад — канцая геаметрыя. Гэта сістэма І., у якой A і B — канцыя мноствы, элементы мноства A называюць п у н к т а м і, мноства B —

простымі, а І. запісваюць у выглядзе "$P \in L$" і чытаюць "пункт P ляжыць на простай L" ці "простая L праходзіць праз пункт P". Пры гэтым мноствы пунктаў, якія ляжаць на розных простых, павінны быць рознымі.

Часта лічыцца, што элементы мноства B — гэта падмноства элементаў з A, а І. ёсць дачыненне прыналежнасці: калі $a \in A$, $b \in B$, то "a і b інцыдэнтныя", значыць $a \in b$ (напрыклад, І. вяршыняў графа, гл. *Граф*).

ІРАЦЫЯНАЛЬНАЕ РАЎНАННЕ — раўнанне, якое змяшчае невядомую велічыню пад знакам радыкала (напрыклад, $\sqrt[3]{x-1}+1=\sqrt{x}$).

ІРАЦЫЯНАЛЬНЫ ВЫРАЗ — алгебраічны выраз, які змяшчае радыкалы, напрыклад $\sqrt{x^4+y}$, $\sqrt[3]{a^2+b^2}$.

ІРАЦЫЯНАЛЬНЫ ЛІК (ад лац. irrationalis — неразумны) — лік, які нельга запісаць у выглядзе m/n пры цэлых ліках m і $n \neq 0$. І.л. раскладваецца ў бясконцы неперыядычны дзесятковы дроб, і гэтая яго ўласцівасць можа быць прынятая за азначэнне І.л. Існаванне І.л. можа быць даказанае як з дапамогай тэарэтычна-мноствавых метадаў, так і з выкарыстаннем індывідуальных якасцяў лікаў. І.л. з'яўляюцца, напрыклад, лікі $\sqrt{2}$, π, lg2, e. І.л. падзяляюцца на *алгебраічныя лікі* і *трансцэндэнтныя лікі.* Ірацыянальнасць ліку π даказаў Ё.Ламбэрт (1766). Да гэтага часу не развязаныя гіпотэзы наконт ірацыянальнасці гэтак званай канстанты Ойлера, ліку $e+\pi$.

ІСНАВАННЯ КВАНТАР — аперацыя ў логіцы, з дапамогай якой ствараюцца новыя выказванні за конт словаў "існуе такая велічыня x, што...". Абазначаецца $\exists x$. Абазначэнне І.к. праз $\exists$ паходзіць ад перавернутай літары Е (першай у англійскім слове exist — "існуе"). Гл. таксама *Квантар*.

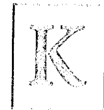
ІСТОТНА АСАБЛІВЫ ПУНКТ — *ізаляваны асаблівы пункт* $z_0 \in \mathbf{C}$ адназначнай аналітычнай функцыі f, для якога не існуе ліміту $\lim_{z\to\infty} f(z)$ (ні концага, ні бясконцага). Напрыклад: пункт ∞ з'яўляецца І.а.п. для функцыі $\exp(z)$. І.а.п. z_0 функцыі f можна ахарактарызаваць таксама тым, што галоўная частка раскладу функцыі f у шэраг Лёрана ў наваколлі пункта z_0 мае бясконца многа ненулявых складнікаў. Калі z_0 — І.а.п. функцыі f, то для кожнага $A \in \mathbf{C}$ існуе такая паслядоўнасць $(z_n)_{n=1}^{\infty}$, што $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ і $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = A$ (тэарэма Сахоцкага). Калі z_0 — І.а.п. функцыі f, то для кожнага $A \in \mathbf{C}$, акрамя, магчыма, аднаго значэння, раўнанне $f(z)=A$ мае бясконца многа развязкаў у кожным наваколлі пункта z_0 (вялікая тэарэма Пікара).

ІТЭРАЦЫЙНЫ АЛГАРЫТМ — *алгарытм*, які рэалізуе ў нейкай тапалагічнай прасторы V паслядоўнасць пунктава-мноствавых адлюстраванняў A_k: $V \to V$, пры дапамозе якіх на пачатковым пункце $u^0 \in V$ вылічваюць паслядоўнасць пунктаў у адпаведнасці з формулай $u^{k+1} = A_k u^k$, $k = 0, 1, \ldots$ І.а. (або метад паслядоўных набліжанняў) выкарыстоўваюць для знаходжання развязкаў аператарнага раўнання $Au=f$, мінімуму нейкага функцыянала або ўласных значэнняў аператара A і г.д. І.а. называецца збежным пры пачатковым набліжанні $u^0 \in V$ да развязку адпаведнай задачы, калі $u^k \to u^*$ пры $k \to \infty$.

ІТЭРАЦЫЯ (ад лац. iteratio — паўтарэнне) — вынік паслядоўнага дастасавання якой-небудзь матэматычнай аперацыі. Так, калі $y = f(x) = f_1(x)$ — нейкая функцыя, то функцыі

$$f_2(x) = f(f_1(x)),$$
$$f_3(x) = f(f_2(x)), \ldots, f_n(x) = f(f_{n-1}(x))$$

называюцца адпаведна другой, трэцяй, ..., n-й І. функцыі $f(x)$. Пры пэўных умовах на функцыю $y = f(x)$ і ўдала падабраным x працэс І. можа быць збежны, што і выкарыстоўваецца ў вылічальнай матэматыцы. Гл. таксама *Ітэрацыйны алгарытм.*



КААПЕРАТЫЎНАЯ ГУЛЬНЯ — гульня, у якой разглядаецца залежнасць выніку толькі ад аб'яднання ўдзельнікаў К.г. у тыя ці іншыя кааліцыі. К.г. — добрая мадэль рынку, схемы выраба́ў, праблемы абгрунтавання падзелу прыбытку, атрыманага ў выніку сумесных дзеянняў, а таксама іншых сацыяльна-эканамічных з'яваў, у якіх прысутнічае кааператыўны пачатак.

КААРДЫНАТЫ (ад лац. con — разам, сумесна + ordinatus — упарадкаваны, вызначаны) — лікі, з дапамогай якіх можна вызначыць месцазна-

ходжанне пункта на плоскасці, на паверхні ці ў прасторы. Гістарычна першыя — астранамічныя і геаграфічныя К. (ш ы р ы н я і д а ў ж ы н я), якія вызначаюць месцазнаходжанне пункта на нябеснай сферы або на паверхні зямнога шара. Найбольш пашырана на плоскасці *дэкартава сістэма каардынат,* у якой кожны пункт $M(x, y)$ мае дзве каардынаты — а б ц ы с у x і а р д ы н а т у y.

Часам бывае зручна мець справу з *косавугольнымі каардынатамі*, калі д з в е восі перасякаюцца не пад прамым вуглом. У такіх К. многія складаныя фігуры апісваюцца больш простымі формуламі. З іншых сістэм К. часта карыстаюцца *палярнымі каардынатамі.* К. на паверхні можна ўвесці з дапамогай спецыяльных крывых — *паралеляў* і *мерыдыянаў* (гл. *Крывалінейныя каардынаты*). А ф і н н ы я, або а г у л ь н ы я, д э к а р т а в ы к а а р д ы н а т ы ў трохмернай прасторы можна атрымаць, калі задаць пункт O і тры вектары $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, якія не знаходзяцца ў адной плоскасці. К. адвольнага пункта M у гэтым выпадку будуць тры лікі x, y, z, вызначаныя адназначным раскладам вектара $\overline{OM}$ па вектарах $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$: $\overline{OM} = x\overline{OA} + y\overline{OB} + z\overline{OC}$. Калі вектары парамі перпендыкулярныя і маюць аднолькавую даўжыню, то атрымліваем п р а м а в у г о л ь н у ю с і с т э м у к а а р д ы н а т. Гл. таксама *Сферычныя каардынаты*, *Цыліндрычныя каардынаты*.

КАБО́Л (cobol — скарэчанне ад ангельскіх словаў common business oriented language) — *праграмавання мова*, прызначаная для апісання алгарытмаў развязання на камп'ютары эканамічных задач. Мова К. распрацаваная ў ЗША, першая версія яе надрукаваная ў 1960 г., стандарт мовы з'явіўся ў 1968 г. Праграмы на К. нагадваюць па форме ангельскі тэкст (у колішнім СССР існаваў расійскі варыянт гэтай мовы).

КАВА́ЛКАВА-ГЛА́ДКАЯ КРЫВА́Я — непарыўная крывая, утвораная канцай колькасцю гладкіх кавалкаў, г.зн. такіх, на кожным з якіх крывая зададзеная раўнаннямі $x = \varphi(t)$, $y = \varphi(t)$, $z = \varphi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, прычым функцыі $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ непарыўныя на $[\alpha, \beta]$ і маюць непарыўныя частковыя вытворныя $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $\chi'(t)$, якія разам не ператвараюцца ў нуль (г.зн. крывая мае ў кожным пункце датычную).

КАВА́ЛКАВА-НЕПАРЫ́ЎНАЯ ФУ́НКЦЫЯ — функцыя $y = f(x)$ на адрэзку $[a, b]$, непарыўная ва ўсіх нутраных пунктах $[a, b]$, з выняткам, магчыма, канцай колькасці пунктаў, у якіх $f(x)$ мае разрыў 1-га роду і, акрамя таго, аднабаковыя ліміты ў пунктах a і b. Функцыя называецца К.-н.ф. на лікавай простай, калі яна К.-н.ф. на ўсякім адрэзку.

КАВА́ЛЬЕРЫ ПРЫ́НЦЫП — дастатковая ўмова роўнасці аб'ёмаў целаў: калі пры перасячэнні двух целаў адвольнай плоскасцю, паралельнай нейкай зададзенай плоскасці, атрымліваюцца сечывы роўнай плошчы, то аб'ёмы целаў роўныя між сабою. Быў вядомы старажытнагрэцкім матэматыкам, аднак абгрунтаваў яго Б.Кавальеры (Геаметрыя, 1635).

КАВАРЫЯЦЫ́ЙНАЯ МА́ТРЫЦА (ад лац. con (cum) — разам, супольна + variare — мяняць) — матрыца спецыяльнага выгляду для некалькіх выпадковых велічыняў, узятых парамі. Калі $\xi = (\xi_1,...,\xi_n)$ — n-мерны выпадковы вектар, то К.м. называецца квадратная матрыца

$$\sum = E[(\xi - E\xi)(\xi - E\xi)^T],$$

дзе $E\xi = (E\xi_1,...,E\xi_n)$ — n-мерны вектар матэматычных спадзяванняў, а кампаненты К.м.

$$\sigma_{ij} = E[(\xi_i - E\xi_i)(\xi_j - E\xi_j)] = \text{cov}\{\xi_i, \xi_j\}, \; i, j = \overline{1, n}.$$

К.м. ёсць сіметрычная неадмоўна вызначаная матрыца. Калі К.м. дадатна вызначана, то ξ мае незвыроднае размеркаванне, у процілеглым выпадку — звыроднае. Калі дысперсіі выпадковых велічыняў $(\xi_1,...,\xi_n)$ роўныя 1, то К.м. для вектара ξ супадае з *карэляцыйнай матрыцай.*

КАГАМАЛО́ГІІ ГРУ́ПАЎ — зыходная канструкцыя гамалагічнай алгебры, якая паказвае, наколькі недакладная паслядоўнасць $x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z$ марфізмаў абэлевай катэгорыі пры ўмове $gf = 0$.

КАДАВА́ННЕ — працэс запісу або пераўтварэння інфармацыі паводле правілаў, што задаюцца пэўным кодам. У ходзе напісання і здзяйснення праграм адбываецца кадаванне адрасоў, звестак, каманд, канструкцый, сімвалаў, праграм, тэкстаў, лікаў, лічбаў. Спосаб кадавання, пры якім інфармацыя ў камп'ютары кадуецца спецыяльнай праграмай, называюць а ў т а м а т ы ч н ы м к а д а в а н н е м. У тэорыі інфармацыі пад кадаваннем разумеюць працэс падачы інфармацыі ў пэўным стандартным выглядзе, што забяспечвае зададзены ўзровень абароны паведамлення ад скажэнняў.

КАЛАКА́ЦЫІ МЕ́ТАД — праекцыйны метад развязання дыферэнцыяльных і інтэгральных раў-

нанняў, у якім набліжаны развязак шукаецца з умоваў задавальнення раўнання ў некаторых зададзеных пунктах. Калі раўнанне лінейнае, то К.м. зводзіць пошук яго развязку да сістэмы лінейных раўнанняў.

КАЛІНІЯ́РНЫЯ ВЕ́КТАРЫ (ад лац. con (cum) — разам, супольна + linia — лінія) — *вектары*, якія ляжаць на адной простай або на паралельных простых. Каб два ненулявыя вектары былі калініярныя, неабходна і дастаткова, каб іх каардынаты былі прапарцыйныя. Нулявы вектар лічыцца калініярным усякаму вектару. Роўнасць $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \boldsymbol{0}$ ёсць неабходная і дастатковая для калініярнасці вектараў $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$. К.в. абазначаюцца $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$.

КАЛМАГО́РАВА КРЫТЭ́Р — статыстычны крытэр, які выкарыстоўваецца для праверкі простай непараметрычнай гіпотэзы H, у дачыненні да якой незалежныя аднолькава размеркаваныя выпадковыя велічыні $(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ маюць зададзеную непарыўную функцыю размеркавання $F(X)$, прычым альтэрнатыўная гіпотэза H двухбаковая: $|EF_n(x) - F(x)| > 0$, дзе $EF_n(x)$ — матэматычнае спадзяванне функцыі эмпірычнага размеркавання $F_n(x)$. Крытычнае мноства К.к. вызначаецца няроўнасцю

$$D_n = \sup_{|x|<\infty} |F_n(X) - F(x)| > \lambda_n$$

і заснаванае на тэарэме, якая даказана А.Калмагоравым у 1933 г.: у выпадку справядлівасці гіпотэзы H_0 размеркаванне статыстыкі D_n не залежыць ад функцыі $F(x)$, прычым калі $n \to \infty$, то

$$P\{\sqrt{n}D_n < \lambda\} \to K(\lambda),\ \lambda > 0,$$

дзе $K(\lambda) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m e^{-2m^2\lambda^2}$.

КАЛЯНДА́РНАЕ ПЛАНАВА́ННЕ — упарадкаванне ў часе зададзенай сукупнасці ўзаемазвязаных работ, дзеянняў, мерапрыемстваў, працэсаў і рэсурсаў, якое накіраванае на дасягненне зададзеных мэтаў.

К.п. уласцівае ўсякаму віду мэтанакіраванай дзейнасці, эфектыўнасць якой у многім залежыць ад якасці развязкаў, што прымаюцца на этапе К.п. Кожны чалавек штодзённа складае каляндарны план сваёй дзейнасці, узгадняючы яго з планамі іншых людзей. Для многіх людзей такія дзеянні становяцца прафесійнымі абавязкамі. Ім даводзіцца распрацоўваць каляндарныя планы работы прадпрыемстваў і ўстаноў, складаць расклады руху цягнікоў і самалётаў, планаваць ваенныя аперацыі, арганізоўваць інфармацыйна-вылічальныя працэсы і г.д. Формы каляндарных планаў вельмі разнастайныя і вызначаюцца ў асноўным ступенню іх інфармацыйнасці і простасцю ўспрыняцця. Пры К.п. і кіраванні складанымі распрацоўкамі, якія ўлучаюць вялікую колькасць узаемазвязаных дзеянняў і патрабуюць шматлікіх выканаўцаў, значных матэрыяльных затрат, найбольш пашыраныя стрэлачныя дыяграмы ці сеткавыя графікі. Пры К.п. прамысловай вытворчасці скарыстоўваюць як графічныя (стужкавыя графікі, хранаграмы, цыклаграмы), так і таблічныя формы выяўлення. У многіх выпадках таблічная форма з'яўляецца агульнапрынятай, даволі наглядна і не патрабуе дастатковых тлумачэнняў (напрыклад, расклады навучальных заняткаў, футбольны каляндар, расклады руху транспартных сродкаў і т.п.). Часавае ўзгадненне ўсяго мноства дзеянняў, спалучаных з дасягненнем зададзеных мэтаў, само па сабе ўжо досыць складаная задача. Калі ж размова ідзе пра стварэнне найлепшага ў тым або іншым сэнсе каляндарнага плана ды яшчэ ў найкарацейшы тэрмін, то складанасць гэтай задачы нязмерна нарастае. У сярэдзіне 1950-х гг. пачаліся сістэматычныя і вельмі інтэнсіўныя даследаванні будовы і аналізу матэматычных мадэляў К.п., а таксама распрацоўкі метадаў выяўлення планавых намераў з выкарыстаннем гэтых мадэляў і сродкаў вылічальнай тэхнікі. Матэматычныя метады К.п. распрацоўваюцца ў асноўным у рамках тэорыі раскладаў.

КАМБІНАТО́РНАЯ АПТЫМІЗА́ЦЫЯ — раздзел матэматычнай тэорыі і метадаў аптымізацыі, у якім даследуюцца і распрацоўваюцца алгарытмы развязання экстрэмальных задач на канцых мноствах камбінаторнай прыроды (перастаўленні, парадкаванні, падграфы і інш.). Тыповыя прыклады задач К.а. — задачы пра прызначэнні, пра мінімальны каркас, *комівояжора задача.* У першай з іх экстрэмум шукаецца на мностве перастаўленняў, у другой — сярод каркасных дрэваў *графа ўзважанага,* у трэцяй — сярод гамільтанавых маршрутаў поўнага ўзважанага графа. Вялікае значэнне ў развіцці К.а. маюць дасягненні тэорыі алгарытмаў і тэорыі складанасці. Большыя задач К.а. *NP*-цяжкія. Асноўныя кірункі распрацоўкі метадаў развязання задач К.а.: алгарытмы накіраванага перабору магчымых варыянтаў, звядзенне да задач *цэлалікавага праграмавання,* эўрыстычныя працэдуры. Мадэлі і метады К.а. выкарыстоўваюцца ў праектаванні, кіраванні тэхналагічнымі працэсамі, каляндарным планаванні вытворчасці.

КАМБІНАТО́РНАЯ ГЕАМЕ́ТРЫЯ — раздзел матэматыкі, у якім даследуюцца задачы пра ўзаемнае размяшчэнне фігур, пакрыцці геаметрычных целаў фігурамі розных тыпаў, падзел фігур на часткі, апраменьванні мяжы целаў нутранымі ці вонкавымі крыніцамі святла і інш. Пры гэтым патрабуецца выкананне пэўных экстрэмальных уласцівасцяў, якія датычаць пераважнай колькасці геаметрычных аб'ектаў. Напрыклад, для праблематыкі падзелу, калі высветлена пытанне яго існавання, узнікае задача пра падзел фігуры з найменшай колькасцю частак дадзенага тыпу. У задачах апраменьвання мінімізуецца колькасць крыніц святла. Адна са старэйшых задач К.г. — задача пра 13 шароў: чаму роўная найбольшая колькасць аднолькавых матэрыяльных шароў, якія магчыма прыкласці да такога ж шара адначасова? У 17 ст. Ё.Кеплер назваў лік 12, аднак вычарпальны доказ гэтага факта з'явіўся ў сярэдзіне 20 ст.

Прыклад неразвязанай да гэтага часу праблемы — задача Борсука (1933): знайсці найменшы лік m такі, што для ўсякага мноства M дыяметра $d > 0$ з эўклідавай прасторы E існуе пакрыццё M m падмноствамі з дыяметрамі, меншымі за σ. К.Борсук выказаў гіпотэзу, што $m = n + 1$, яна даказаная толькі для $n < 4$. Адзін з найбольш вядомых вынікаў К.г. — тэарэма Хэлі: калі для концай сістэмы F выпуклых мностваў n-мернай афіннай прасторы кожная падсістэма з $n+1$ мностваў мае агульны пункт, то і мноствы ўсёй сістэмы F маюць агульны пункт.

КАМБІНАТО́РНАЯ ТАПАЛО́ГІЯ — раздзел тапалогіі, у якім тапалагічныя ўласцівасці геаметрычных фігур вывучаюцца пры дапамозе іх падзелу на больш простыя фігуры. Для вывучэння мнагастайнасцяў іх падзяляюць на элементарныя кавалкі (сімплексы). Гэты прыём галоўны ў К.т., асновы якой заклаў А.Пуанкарэ.

КАМБІНАТО́РНАЯ ТЭО́РЫЯ ГРУ́ПАЎ — галіна тэорыі групаў, асноўны аб'ект якой — групы, зададзеныя ўтваральнымі і стасункамі, і для якой характэрнае ўжыванне чыста камбінаторных метадаў. У К.т.г. таксама вывучаюцца свабодныя групы, свабодныя канструкцыі, алгарытмічныя праблемы тэорыі групаў і некаторыя блізкія тэмы.

КАМБІНАТО́РНЫ АНА́ЛІЗ, камбінаторыка — раздзел матэматыкі, у якім даследуюцца задачы ўзаемнага размяшчэння (камбінавання) элементаў і частак концага мноства ў адпаведнасці з зададзенымі правіламі. Ідэі камбінаторнага характару маюць вялікае пашырэнне ў матэматыцы. Задачы К.а. вядомыя з глыбокай старажытнасці. Аднак у самастойную навуковую дысцыпліну К.а. пачаў складвацца толькі ў 20 ст. К.а. цесна звязаны з *графаў тэорыяй*, *імавернасцяў тэорыяй* і іншымі галінамі матэматыкі. Яго вынікі скарыстоўваюць у планаванні навуковага эксперыменту, кадаванні інфармацыі, аптымізацыі канструктарскіх і тэхналагічных развязкаў, праграмаванні.

Вылучаюць тры тыпы праблем К.а. У задачах існавання і будовы ставіцца пытанне пра тое, ці існуе камбінацыя частак концага мноства, для якой характэрныя дадзеныя ўласцівасці, і калі так, то патрабуецца пабудаваць адну або ўсе такія камбінацыі. Напрыклад, ці існуе такая сістэма падмностваў (блокаў), што кожная пара элементаў зыходнага мноства змяшчаецца ў гэтых блоках дадзеную колькасць разоў. Такія сістэмы называюцца блок-схемамі. Пры вывучэнні блок-схемаў вялікую ролю адыгрываюць метады алгебры і тэорыі лікаў. Задачы падлікаў узнікаюць тады, калі высветлена пытанне існавання. У іх цікавяцца колькасцю магчымых камбінацый. Найбольш простыя камбінацыі (*размяшчэнні*, спалучэнні, *перастаўленні*) вывучаюцца ў элементарнай камбінаторыцы. Для складаных выпадкаў у К.а. распрацаваны спецыяльныя падыходы: прынцыпы ўлучэння і вылучэння, метад рэкурэнтных судачыненняў, метад стваральных функцый, тэорыя пераліку Пойя. У задачах камбінаторнай аптымізацыі распрацоўваюцца алгарытмы пошуку найлепшых у тым або іншым сэнсе камбінацый сярод дадзеных.

КАМБІНАТО́РНЫЯ ЗАДА́ЧЫ класічныя — задачы выбару і размяшчэння элементаў концага мноства, якія часам маюць у якасці зыходнай нейкую фармулёўку займальнага зместу. Прыклад К.з. — задача будавання магічнага квадрата (вядомы на старажытным Усходзе). Шэраг К.з. разглядаў Л.Ойлер: задача пра 36 афіцэраў, *задача пра каралявецкія (кёнігсбергскія) масты*, *камівояжора задача* і інш.

КАМБІНАТО́РЫКА (ад лац. combinare — злучаць, спалучаць) — тое, што *камбінаторны аналіз*. Раздзел матэматыкі, у якім вывучаюцца камбінацыі, што складаюцца з нейкага концага мноства аб'ектаў адвольнай прыроды.

КАМПАЗІ́ЦЫЯ (ад лац. compositio — складанне) — агульны назоў аперацыі, якая з двух элементаў a і b атрымлівае трэці элемент $c = a * b$.

Напрыклад, К. (ці с у п е р п а з і ц ы я й) дзвюх функцый $f(x)$ і $g(x)$ называецца функцыя $h(x) = f(g(x))$. У матэматычным аналізе і тэорыі імавернасцяў К. (або з г о р т к а й) называюць таксама і іншыя спосабы атрымання з дзвюх функцый $f(x)$ і $g(x)$ трэцяй функцыі $h(x) = f(x) * g(x)$; напрыклад, $h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy$.

КАМПА́КТ (ад лац. compactus — шчыльны, сціснуты) — *кампактная прастора*, якую можна метрызаваць. Прыклады К.: адрэзак, акружына, n-мерны куб, сфера. Падмноства эўклідавай прасторы ёсць К., калі і толькі калі яно замкнёнае і абмежаванае. Замкнёнае падмноства К. ёсць К. Для існавання гомеамарфізму К. у эўклідаву прастору неабходна і дастаткова, каб ён быў конца. Уласцівасць метрызавальнай прасторы быць К. эквівалентная, напрыклад, уласцівасцям: з усякай паслядоўнасці пунктаў прасторы X можна выбраць збежную паслядоўнасць; усякае бясконцае падмноства прасторы X мае ў X хоць бы адзін лімітавы пункт; усякая непарыўная на X функцыя абмежаваная.

КАМПА́КТНАЕ МНО́СТВА — мноства A у тапалагічнай прасторы X такое, што падпрастора $A \subset X$ кампактная. К.м. у аддзяляльнай прасторы — замкнёнае мноства.

КАМПА́КТНАСЦЬ — уласцівасць тапалагічнай прасторы, якая палягае ў тым, што ўсякае яе адкрытае пакрыццё змяшчае концае падпакрыццё. Напрыклад, уласцівасць К. маюць усе замкнёныя абмежаваныя падмноствы эўклідавай прасторы адвольнай концай намернасці. Простая, плоскасць, трохмерная прастора — прыклады некампактных прастораў. Поруч з тэрмінам К. ужываецца б і к а м п а к т н а с ц ь, а тэрмін К. ужываюць у дачыненні да прастораў са злічальнай лакальнай базай. К. тады вызначаецца як уласцівасць усякага бясконцага падмноства мець лімітавы пункт.

КАМПА́КТНАЯ ПРАСТО́РА — тапалагічная прастора, якая мае ўласцівасць *кампактнасці*. Часам кампактнай лічыцца толькі *аддзяляльная прастора*.

КАМПА́КТНЫ АПЕРА́ТАР — аператар $A: X \to Y$, які адлюстроўвае ўсякае абмежаванае мноства ў тапалагічнай вектарнай прасторы Y, замыканне якога кампактнае. Для К.а., якія дзейнічаюць у банахавых прасторах, пабудаваная тэорыя развязальнасці раўнання $x - Ax = y$, цалкам аналагічная канцамернаму выпадку (і якая змяшчае, у прыватнасці, тэорыю інтэгральных раўнанняў з абмежаваным ядром). Непарыўны К.а. называецца ц а л к а м н е п а р ы ў н ы м а п е р а т а р а м.

КАМПАНЕ́НТА з л у ч н а с ц і п р а с т о р ы — злучнае мноства C такое, што для кожнага злучнага мноства C_1 з $C < C_1$ вынікае $C = C_1$. Адвольная прастора выяўляецца ў выглядзе аб'яднання сваіх К.

КАМПАНЕ́НТА ПУ́НКТА — найбольшае злучнае мноства, якое змяшчае гэты пункт (г.зн. аб'яднанне ўсіх злучных мностваў, якія яго змяшчаюць).

КАМПІЛЯ́ЦЫЯ (ад лац. compilatio — прысвойванне) — тое, што *трансляцыя* ў праграмаванні.

КАМПЛАНА́РНЫЯ ВЕ́КТАРЫ (ад лац. com — разам, супольна + planum — плоскасць) — *вектары*, якія ляжаць у адной плоскасці або ў паралельных плоскасцях. Неабходнай і дастатковай умовай кампланарнасці трох вектараў $\boldsymbol{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\boldsymbol{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$, $\boldsymbol{c} = \{c_1, c_2, c_3\}$ з'яўляецца роўнасць

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

КАМПЛЕ́КСНА СПАЛУ́ЧАНАЯ МА́ТРЫЦА — матрыца, якая атрымліваецца з камплекснай матрыцы A, элементамі якой ёсць камплексныя лікі, заменай кожнага элемента на камплексна спалучаны. Матрыца A^*, камплексна спалучаная з транспанаванай матрыцай A^T, называецца э р м і т а в а с п а л у ч а н а й з м а т р ы ц а й A.

КАМПЛЕ́КСНА СПАЛУ́ЧАНЫ ЛІК — гл. *Спалучаны лік*.

КАМПЛЕ́КСНАЯ ПЛО́СКАСЦЬ — плоскасць C з прамавугольнай дэкартавай сістэмай каардынат Oxy, кожны пункт $(x; y)$ якой атаясамляецца з камплексным лікам $z = x + iy$. Вось абцыс Ox на К.п. называюць р э ч а і с н а й в о с с ю, а вось Oy — у я ў н а й в о с с ю. Калі да К.п. дадаць бясконца аддалены пункт $z = \infty$, дык атрымліваецца п а ш ы р а н а я к а м п л е к с н а я п л о с к а с ц ь $\bar{C}$. Часам *камплексныя лікі* называюць пунктамі К.п. або вектарамі, замацаванымі ў пачатку каардынат з канцом у пункце z.

КАМПЛЕ́КСНЫ ЛІК — лік $z = a + ib$, дзе a і b — рэчаісныя лікі, i — *уяўная адзінка*; a называецца рэчаіснай, b — уяўнай часткай К.л. z. Рэчаісныя лікі — прыватны выпадак К.л. (маюць выгляд $a + i0$). К.л. $z = 0 + ib$ $(b \neq 0)$ называецца чыста ўяўным; лікі $a + ib$ і $a - ib$ — камплексна спалучанымі. К.л. уведзены ў сувязі з развязаннем квадратовых і кубічных раўнанняў. Тэрмін К.л. прапанаваў нямецкі матэматык К.Гаўс (1831). К.л. ужываюцца пры матэматычным апісанні розных пытанняў фізікі і тэхнікі (гідрадынаміка, аэрамеханіка, радыёмеханіка і інш.).

Арыфметычныя дзеянні з К.л. выконваюцца паводле формул:

$$(a + ib) \pm (c + id) = (a \pm c) + i(b \pm d),$$

$$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc),$$

$$\frac{c + id}{a + ib} = \frac{ca + db}{a^2 + b^2} + i\frac{da - cb}{a^2 + b^2}.$$

Паводле алгебраічных уласцівасцяў сукупнасць К.л. утварае алгебраічна замкнёнае поле (кожнае алгебраічнае раўнанне ступені $n \geq 1$ мае роўна n каранёў). Кожны К.л. $z = a + ib$ можна пазначыць пунктам плоскасці з каардынатамі a, b (геаметрычная інтэрпрэтацыя К.л.). К.л. z можна запісаць у паказнікавай форме: $z = re^{i\varphi}$ або ў трыганаметрычнай: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, дзе $r = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$ — модуль, $\varphi = \arg z$ — аргумент К.л. z. Такі запіс зручны для выканання з К.л. розных дзеянняў, напрыклад падвышэння да ступені, здабывання кораня. Так, $z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$, $n \in \mathbf{N}$.

КАМПУ́ТАР (анг. computer, ад лац. computare — лічыць, вылічаць) — прылада, якая ажыццяўляе апрацоўку інфармацыі, запісанай у двайковым кодзе.

КАМП'Ю́ТЭР — тое, што *кампутар*.

КАМУТА́НТ групы G, вытворная група G — падгрупа, утвораная ўсімі гэтак званымі камутатарамі элементаў групы G (элементамі выгляду $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$, $a, b \in G$). Звычайна К. групы G пазначаецца $[G, G]$ або G'. Кожная падгрупа, якая ўлучае ў сябе К., — гэта нармальная падгрупа ў G. Фактар-група G / H групы G па нармальнай падгрупе H ёсць абэлева, калі і толькі калі H мае ў сабе К. групы G. Кожны эндамарфізм групы G адлюстроўвае К. у сябе (К. — цалкам характарыстычная падгрупа).

КАМУТАТЫ́ЎНАЕ КО́ЛЦА — колца, у якім для множання выконваецца закон камутатыўнасці ($ab = ba$ для розных элементаў a, b колца).

КАМУТАТЫ́ЎНАСЦЬ (ад лац. commutare — мяняць, змяняць), перастаўляльнасць — закон складання і множання лікаў ($a + b = b + a$, $ab = ba$), паліномаў над камутатыўным колцам, складання матрыц над колцам. Множанне матрыц парадку больш за 1 над полем і кампазіцыя адлюстраванняў мноства X у сябе некамутатыўныя (калі ў X больш за адзін элемент). У агульным выпадку бінарная аперацыя $a*b$ называецца камутатыўнай, калі $a*b = b*a$.

КАМУТАТЫ́ЎНАЯ А́ЛГЕБРА — галіна алгебры, якая вывучае ўласцівасці палёў, камутатыўных колцаў і звязаных з імі аб'ектаў (ідэалаў, модуляў, нармаванняў і г.д.). Атрымала развіццё з задач, якія ўзніклі ў *лікаў тэорыі* і *алгебраічнай геаметрыі*. У 1-й палове 19 ст. К.Гаўс і Э.Кумер выявілі сувязь розных пытанняў тэорыі лікаў з арыфметыкай некаторых пашырэнняў поля рацыянальных лікаў. Выкарыстоўваючы паняцці ідэалаў і простага ідэалу, Э.Кумер, потым Р.Дэдэкінд і Л.Кронэкер паглыбілі тэорыю колцаў цэлых лікаў у палях алгебраічных лікаў. З кожнай алгебраічнай мнагастайнасцю V можна звязаць ідэал усіх мнагаскладаў, якія пераўтвараюцца ў нуль на ўсёй V. Развіццё сучаснай К.а. заснаванае на тэорыі p-адычных лікаў, якая прывяла да вывучэння структуры розных класаў камутатыўных колцаў. Далейшае развіццё ідэй К.а. звязанае з гамалагічнымі метадамі і функтаравым падыходам.

КАМУТАТЫ́ЎНАЯ ГРУ́ПА — тое, што *абэлева група*.

КАНВЕРГЕ́НЦЫЯ (ад лац. convergere — збягацца) — велічыня, адваротная *дывергенцыі*. Ужывалася да канца 19 ст.

КАНГРУЭ́НТНАСЦІ АКСІЁМЫ — аксіёмы эўклідавай геаметрыі.

КАНГРУЭ́НТНАСЦЬ (ад лац. congruens (congruentis) — які супадае) — тэрмін для абазначэння роўнасці адрэзкаў, вуглоў, трохвугольнікаў і іншых фігур і целаў у элементарнай геаметрыі. Уласцівасці К. характарызуюцца аксіяматычна з дапамогай аксіём. Дачыненне К. абазначаецца $\cong$.

КАНГРУЭ́НЦЫЯ ПРО́СТЫХ — мноства простых у трохмернай праектыўнай, афіннай,

эўклідавай прасторы, якія залежаць ад двух параметраў. К.п. можна задаць, калі зафіксаваць нейкую паверхню (апорную паверхню) і ў кожным пункце гэтай паверхні задаць кіроўны вектар простай кангруэнцыі, якая праходзіць праз гэты пункт. Калі на апорнай паверхні зададзеная лінія, то простыя кангруэнцыі, што перасякаюць гэтую лінію, утвараюць *лінеістую паверхню.*

Няхай (u, v) — крывалінейныя каардынаты пунктаў апорнай паверхні. Існуюць дзве аднапараметрычныя сям'і лінеістых паверхняў, якія адпавядаюць лініям u, v; яны называюцца сеткай паверхняў (u, v). Сярод лінеістых паверхняў кангруэнцыі ёсць торсы. У агульным выпадку існуюць дзве сям'і торсаў. Для абсягу гіпербалічных простых кангруэнцыі сетка торсаў рэчаісная, у абсягу эліптычных простых торсы кангруэнцыі ўяўныя, у абсягу парабалічных простых дзве сям'і торсаў супадаюць. Мноства кантаў звароту торсаў складаюць гэтак званую факальную паверхню кангруэнцыі. Такім чынам, у абсягу гіпербалічных простых кангруэнцыі існуюць дзве факальныя паверхні. К.п. у гэтым выпадку складаецца з агульных датычных да дзвюх факальных паверхняў. Пункты, у якіх простая датыкаецца да факальных паверхняў, называюцца фокусамі. У абсягу парабалічных простых дзве факальныя паверхні супадаюць, а ў абсягу эліптычных простых рэчаісных факальных паверхняў няма. Праектыўнае пераўтварэнне адлюстроўвае кангруэнцыю ў кангруэнцыю, а факальныя паверхні — у факальныя паверхні.

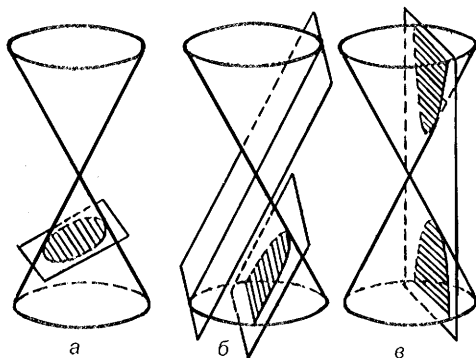
КАНДЭНСАЦЫІ ПУНКТ (ад лац. condensatio — ушчыльненне, згушчэнне) — мноства, пункт мноства X, кожнае наваколле якога змяшчае незлічальнае мноства пунктаў з X. Напрыклад, мноства Z цэлых лікаў не змяшчае ніводнага К.п.; у мностве R рэчаісных лікаў кожны яго лік — К.п.

КАНІЧНАЯ ПАВЕРХНЯ — тое, што *конус.*

КАНІЧНЫЯ СЕЧЫВЫ — лініі, якія атрымліваюцца пры перасячэнні прамога кругавога *конуса* з плоскасцямі, што не праходзяць праз яго вяршыню. Пры розных становішчах сечнай плоскасці і конуса атрымліваецца *эліпс* (рыс., *а*), *парабала* (рыс., *б*), *гіпербала* (рыс., *в*). Калі ў плоскасці выбрана дэкартава сістэма каардынат, то кожнае К.с. вызначаецца раўнаннем 2-й ступені:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Наадварот, калі такое раўнанне мае хоць адзін рэчаісны развязак, то гэтае раўнанне задае адно з К.с. Такім чынам, К.с. вызначаюцца таксама як крывыя 2-га парадку, якія не распадаюцца. К.с.



сустракаюцца ў з'явах прыроды і ў розных галінах навукі: напрыклад, планеты Сонечнай сістэмы рухаюцца па эліпсах, траекторыі штучных спадарожнікаў Зямлі — таксама эліпсы; траекторыя цела, кінутага нахілена да гарызонту, — парабала; гіпербалай вызначаецца графік адваротнай прапарцыйнай залежнасці.

КАНСЕРВАТЫЎНАЕ ПОЛЕ (ад лац. conservativus — які добра захоўвае) — тое, што *патэнцыяльнае поле.*

КАНСТАНТА (ад лац. constans (constantis) — нязменны, сталы), сталая велічыня — нязменная велічыня пры разглядзе матэматычных, фізічных і іншых працэсаў. Нязменнасць велічыні x сімвалічна запісваецца $x = \text{const}$ ці $x = C$. Часта тэрмін К. ужываецца ў завужаным сэнсе як сталая велічыня, якая мае пэўнае лікавае значэнне. К. у матэматычнай логіцы — сімвал фармальнай мовы для абазначэння пэўнага элемента або фіксаванай аперацыі на нейкай структуры, што апісваецца гэтай мовай.

КАНСТРУКТЫЎНАЯ ЛОГІКА — раздзел матэматычнай логікі, які вывучае разважанні пра канструктыўныя аб'екты і канструкцыі. Прыкметнае адрозненне К.л. ад традыцыйнай — адсутнасць закону скасаванага трэцяга $A \vee \neg A$ і закону зняцця падвойнага адмаўлення $\neg\neg A \supset A$. Агульнай прыкметай многіх сістэмаў К.л., якія адлюстроўваюць сутнасць канструктыўнага разумення звязкі $\vee$ і квантара $\exists$, ёсць адавочная рэалізацыя гэтых аб'ектаў: выводнасць $A \vee B$ (адпаведна $\exists x A(x)$) азначае выводнасць адной з формул A, B (адпаведна $A(t)$ для нейкага тэрма t). Класічныя фар-

мальныя сістэмы звычайна агортваюцца адпаведнымі сістэмамі К.л. (з захаваннем уласцівасці выводнасці з гіпотэз дапісваннем падвойнага адмаўлення ¬¬ перад усімі падформуламі). З гэтай прычыны класічная арыфметыка і аналіз ізаморфна агортваюцца адпаведнымі сістэмамі, заснаванымі на К.л.

КАНСТРУКТЫЎНАЯ МАТЭМАТЫКА — навука пра канструктыўныя працэсы, пра магчымасць іх ажыццяўлення і пра вынікі гэтых працэсаў — канструктыўныя аб'екты. У К.м. паняцці канструктыўнага працэсу і канструктыўнага аб'екта азначаюцца, бо звычайна ў К.м. працуюць з канкрэтнымі відамі гэтых паняццяў. Прыклад канструктыўнага аб'екта — слова ў фіксаваным алфавіце. У дадзеным выпадку канструктыўны працэс палягае ў выпісванні гэтага слова літара за літарай. Калі літары замяніць на лічбы 0, 1 і дадаць сюды знак мінуса (–), знак дробу (/), то можна будаваць рацыянальныя лікі, як словы ў алфавіце. Такім чынам, рацыянальныя лікі — гэта канструктыўныя аб'екты. Можна далей пабудаваць канструктыўную тэорыю функцый рэчаіснай зменнай. Паводле адной з тэарэм гэтай тэорыі, кожная канструктыўная функцыя рэчаіснай зменнай непарыўная ўсюды, дзе яна вызначана. Разам з тым тут няма аналагаў класічных тэарэм Ваерштраса і Кантара пра непарыўныя функцыі на сегменце. Усё гэта паказвае глыбокае адрозненне канструктыўнага матэматычнага аналізу ад класічнага. Распрацоўваюцца і многія іншыя раздзелы К. м.: канструктыўных дыферэнцыяльных раўнанняў, канструктыўнага функцыянальнага аналізу і г.д.

КАНСТРУКТЫЎНАЯ ТЭОРЫЯ ФУНКЦЫЙ — тое, што *апраксімацыі тэорыя.*

КАНСТРУКТЫЎНЫ АНАЛІЗ, р э к у р с і ў н ы а н а л і з — паняцце, што аб'ядноўвае розныя плыні ў асновах матэматыкі. У К.а. будаванне тых або іншых тэорый ажыццяўляецца на базе канцэпцый, якія ўлічваюць рэальныя вылічальныя магчымасці ў адрозненне ад класічнага падыходу, заснаванага на тэорыі мностваў. Акрамя таго, у К.а. дадаткова даследуецца пытанне, на якіх зыходных звестках можна эфектыўна знаходзіць тыя або іншыя вылічальныя аб'екты. Вынікі і метады К.а. дазваляюць у многіх выпадках карэктна сфармуляваць алгарытмічныя праблемы аналізу.

КАНТ — 1) К. м н а г а г р а н н і к а — старана яго грані; 2) К. г р а ф а — неўпарадкаваная пара яго вяршыняў; 3) К. *сімплекса* — аднамерныя яго грані.

КАНТАРА АКСІЁМА — адна з аксіём непарыўнасці: кожная паслядоўнасць укладзеных адзін у адзін адрэзкаў, даўжыні якіх імкнуцца да нуля, мае адзіны агульны пункт. К.а. называюць яшчэ п р ы н ц ы п а м у к л а д з е н ы х а д р э з к а ў. Сфармуляваў Г.Кантар (1872). Гл. *Укладзеныя адрэзкі.*

КАНТАРА МНОСТВА — мноства рэчаісных лікаў α, якія можна запісаць у выглядзе

$$\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i 3^{-i},$$

дзе α_i прымае значэнні 0 ці 2. К.м. можна атрымаць і геаметрычна: падзяліць адрэзак [0, 1] на тры роўныя часткі і выкінуць сярэднюю, а потым тое самае зрабіць з кожнай з дзвюх астатніх частак і г.д. К.м. незлічальнае і мае нулявую меру Лебэга.

КАНТАРА ТЭАРЭМА — тэарэма, паводле якой мноства ўсіх падмностваў дадзенага мноства A мае магутнасць, адрозную ад магутнасці A і кожнага падмноства A.

КАНТЫНУУМ (ад лац. continuum — непарыўны) — абазначэнне мностваў аб'ектаў, якія маюць пэўныя ўласцівасці непарыўнасці, а таксама пэўную магутнасць (гл. *Магутнасць кантынуума*).

Сярод такіх мностваў вылучаюцца наступныя: 1) мноства рэчаісных лікаў R, якое ўтварае лікавы К. Уласцівасць непарыўнасці мноства рэчаісных лікаў, упарадкаваных з дапамогай дачынення "менш" ($a < b$), задаюць дзве аксіёмы: паміж адвольнымі лікамі $a, b \in R$, $a < b$, знаходзіцца хоць адзін лік $c \in R$ ($a < c < b$); калі ўсе лікі падзяліць на класы A і B такім чынам, што кожны лік $a \in A$ меншы за кожны лік $b \in B$, то або ў класе A існуе найбольшы лік, або ў класе B — найменшы лік (аксіёма непарыўнасці); 2) К. у т а п а л о г і і — адвольны злучны кампакт, які змяшчае больш як адзін пункт. Паколькі ў n-мернай эўклідавай прасторы кампакт — гэта замкнёнае абмежаванае мноства, то адзіным прыкладам кампакта на лікавай простай з натуральнай тапалогіяй з'яўляецца адрэзак (мноства лікаў, вызначаных няроўнасцямі $a \leq x \leq b$).

КАНТЫНУУМ-ГІПОТЭЗА — сцверджанне: магутнасць кантынуума — першая магутнасць, большая за магутнасць мноства ўсіх натуральных лікаў. Шматлікія спробы даказаць К.-г., выказаную Г.Кантарам (1878), не прывялі да мэты. К.Гё-

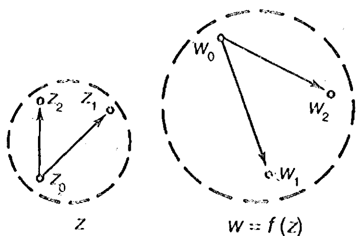
дэль (1936) даказаў, што К.-г. сумесная з нейкай аксіяматычнай сістэмай тэорыі мностваў і, такім чынам, не можа быць абвергнутая традыцыйнымі сродкамі. Амерыканскі матэматык П.Коэн (1963) на аснове знойдзенага ім метаду прымусу даказаў, што і адмаўленне К.-г. ёсць сумеснае з гэтай сістэмай. Такім чынам, К.-г. нельга ні даказаць, ні абвергнуць з дапамогай звычайных метадаў тэорыі мностваў. Такое ж становішча і з абагульненай К.-г., якая сцвярджае, што для бясконцага мноства P першая магутнасць, большая за магутнасць P, ёсць магутнасць усіх падмностваў мноства P.

Паслядоўнікі П.Коэна атрымалі метадам прымусу шмат сцверджанняў, якія высвятляюць ролю К.-г., абагульненай К.-г. і іх сувязь з іншымі прынцыпамі тэорыі мностваў.

КАНТЫНУУМА ПРАБЛÉМА — задача доказу ці абвержання сродкамі тэорыі мностваў сцверджання, якое называецца *кантынуум-гіпотэзай.*

КАНФІГУРÁЦЫЯ (ад лац. configuratio — размяшчэнне) — канцавое мноства пунктаў, простых, плоскасцяў, звязаных паміж сабою дачыненнямі прыналежнасці (інцыдэнтнасці). К. на плоскасці — канцавая сістэма p пунктаў і g простых, размешчаных так, што ўсякі пункт сістэмы інцыдэнтны з адным і тым жа лікам γ простых гэтай сістэмы, а ўсякая простая інцыдэнтная з адным і тым жа лікам π пунктаў гэтай сістэмы. Абазначаецца сімвалам $(p_\gamma g_\pi)$; калі $p = g$, то (p_γ). Лікі p, g, γ, π звязаныя дачыненнямі $p\gamma = g\pi$. Прыклад: К. $(6_2, 4_3)$ — поўны чатырохстароннік — 4 простыя і 6 пунктаў іх перасячэння парамі.

КАНФÓРМАВАЕ АДЛЮСТРАВÁННЕ (ад лац. conformis — падобны) — непарыўнае адлюстраванне, якое захоўвае форму бясконца малых



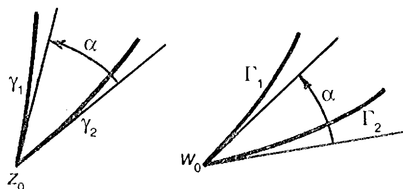
Рыс. 1

фігур. Дакладней: непарыўнае адлюстраванне $\omega = f(z)$ абсягу D $(D \subset C)$ у C называецца К.а. у пункце $z_0 \in D$, калі ў гэтым пункце для яго характэрныя сталасць расцяжэння і захаванне вуглоў.

У л а с ц і в а с ц ь с т а л а с ц і расцяжэння ў пункце z_0 пры адлюстраванні $\omega = f(z)$ (рыс. 1) палягае ў тым, што тасунак $|f(z) - f(z_0)| / |z - z_0| = k(f; z, z_0)$ адлегласці паміж $f(z), f(z_0)$ і адлегласці паміж z, z_0 імкнецца да пэўнага канцавага ліміту:

$$\lim_{z \to z_0} k(f; z, z_0) = k(f; z_0)$$

пры ўмове, што $z \to z_0$ адвольным чынам. Лік $k(f; z_0)$ называецца к а э ф і ц ы е н т а м р а с ц я ж э н н я ў пункце z_0 пры разгляданым адлюстраванні. У л а с ц і в а с ц ь з а х о ў в а н н я (к а н с е р в а т ы з м у) вуглоў у пункце $z_0 \in D$ пры адлюстраванні $\omega = f(z)$ (рыс. 2) палягае ў тым, што ўсякія дзве непарыўныя крывыя γ_1, γ_2 з D, якія перасякаюцца ў пункце z_0 пад нейкім вуглом α, пераводзяцца ў пару непарыўных крывых Γ_1 і Γ_2,



Рыс. 2

якія перасякаюцца ў пункце $\omega_0 = f(z_0)$ пад такім жа вуглом α. Калі $\omega = f(z)$ ёсць К.а. у пункце $z_0 \in D$, то вуглы паміж крывымі ў пункце z_0 пры гэтым адлюстраванні абавязкова захоўваюць сваю абсалютную велічыню, а кірунак іх адліку можа захоўвацца або мяняцца на процілеглы. У першым выпадку $\omega = f(z)$ у пункце z_0 называецца К.а. I роду, у другім — К.а. II роду. Калі функцыя $\omega = f(x) = u(z) + iv(z)$ $(u(z), v(z)$ — рэчаісныя функцыі) задае К.а. I роду ў пункце z_0, дык камплексна спалучаная функцыя $\omega = \overline{f(z)} = u(z) - iv(z)$ задае К.а. I роду і наадварот. Гэтае сцверджанне паказвае, што дастаткова вывучаць толькі К.а. I роду, што звычайна і маюць на ўвазе пад тэрмінам К.а.

Непарыўнае адлюстраванне абсягу D называецца К.а., калі яно канформавае ў кожным (нутраным) пункце гэтага абсягу. Адлюстраванне $\omega = f(z)$ канформавае ў абсягу D канцавай камплекснай плоскасці C, калі і толькі калі $f(z)$ — аналітычная функцыя ў D і $f'(z) \neq 0$ у D.

У тэорыі плоскіх К.а. і яе дастасаваннях прынцыповае пытанне наконт магчымасці аднаніставага і канформава адлюстраваць адзін абсяг на другі, а ў дастасаваннях — пытанне пра магчымасць зрабіць гэта з дапамогаю параўнальна простых функцый.

Прыклады К.а.: ц э л ы я л і н е й н ы я ф у н к ц ы і выгляду $\omega = az + b$, $a \neq 0$ (здзяйсняюць расцяжэнні, павароты і паралельныя пераносы абсягаў); д р о б а в а - л і н е й н ы я ф у н к ц ы і $\omega = (az + b) / (cz + d)$ (адпостроўваюць адзін на адзін кругі, вонкавасць кругоў, паўплоскасці); п а к а з н і к а в а я ф у н к ц ы я $\omega = e^z$ (пераводзіць гарызантальную паласу $0 < \operatorname{Im} z < \pi$ на верхнюю паўплоскасць) і інш.

Першае нетрывіяльнае К.а. з'явілася ў картаграфіі. Гэта былі стэрэаграфічныя праекцыі (вядомыя яшчэ да Пталамея). Л.Ойлер скарыстаў да задач картаграфіі функцыі камплекснай зменнай (1777); К.Гаўс стварыў тэорыю К.а. дзвюхмерных паверхняў (1825); Б.Рыман сфармуляваў і даказаў метадамі фізікі асноўную тэарэму тэорыі К.а. плоскіх адназлучных абсягаў (1851), строгі матэматычны доказ гэтай тэарэмы далі Д.Гільбэрт (блізу 1900), А.Пуанкарэ і К.Каратэадоры.

КАНФО́РМАВАЯ ГЕАМЕ́ТРЫЯ — раздзел *геаметрыі*, у якім вывучаюцца ўласцівасці фігур, не інварыянтныя ў дачыненні да групы канформавых пераўтварэнняў. Няхай E^n — n-мерная эўклідава прастора. Гіперсферу S у гэтай прасторы ў прамавугольнай сістэме каардынат можна задаць раўнаннем

$$s^0 \sum_{i=1}^{n} (x^i)^2 - 2\sum_{i=1}^{n} s^i x^i - 2s^{n+1} = 0.$$

Лікі $s^0, s^1, \ldots, s^{n+1}$ называюцца п о л і с ф е р ы ч н ы м і к а а р д ы н а т а м і г і п е р с ф е р ы S. Пункты прасторы — гэта гіперсферы нулявога радыуса. Каардынаты пунктаў, відавочна, праўдзяць раўнанне

$$(S,S) = \sum_{i=1}^{n} (s^i)^2 + 2s^0 s^{n+1} = 0. \qquad (1)$$

Лінейныя пераўтварэнні полісферычных каардынат, якія захоўваюць роўнасць (1), называюцца к а н ф о р м а в ы м і п е р а ў т в а р э н н я м і.

С к а л я р н ы м з д а б ы т к а м гіперсфер $P(p^0, \ldots, p^{n+1})$ і $Q(q^0, \ldots, q^{n+1})$ называецца лік

$$(P,Q) = \sum_{i=1}^{n} p^i q^i + p^0 q^{n+1} + p^{n+1} q^0.$$

Вугал φ паміж гіперсферамі P і Q вызначаецца з роўнасці

$$\cos\varphi = \frac{(P,Q)}{\sqrt{(P,P)(Q,Q)}}.$$

Відавочна, што канформавыя пераўтварэнні захоўваюць вуглы паміж гіперсферамі. К а н ф о р м а в а я п р а с т о р а — гэта эўклідава прастора, якая папаўняецца адным няўласным (бясконца аддаленым) пунктам (гл. *Бясконца аддаленыя элементы*). Асноўнымі геаметрычнымі элементамі К.г. ёсць пункты і гіперсферы. Г і п е р п л о с к а с ц ь — гэта гіперсфера, якая праходзіць праз няўласны пункт; n-мерная паверхня канформавай прасторы — гэта мноства яе пунктаў, якія задавальняюць сістэму раўнанняў

$$x^\alpha = f^\alpha(u^1, \ldots, u^n), \alpha = \overline{0, n+1},$$

дзе x^α — полісферычныя каардынаты пунктаў, u^i $(i = \overline{1, n})$ — параметры. Дыферэнцыяльная геаметрыя паверхняў канформавай прасторы — даволі развітая галіна геаметрыі.

КАНЦАВЫ́ЗНАЧАНАЯ ГРУ́ПА — група, якая вызначана канцым мноствам утваральных і стасункаў (у дачыненні да вызначанага мноства стасункаў).

КАН'ЮНКЦЫ́ЙНАЯ НАРМА́ЛЬНАЯ ФО́РМА — форма, выяўленая як кан'юнкцыя элементарных дыз'юнкцый. Э л е м е н т а р н а й д ы з'ю н к ц ы я й называюць форму выгляду $x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n}$, дзе

$$x_i^{\sigma_i} = \begin{cases} x_i & \text{пры } \sigma_i = 1, \\ \bar{x}_i & \text{пры } \sigma_i = 0. \end{cases}$$

З дапамогай формул алгебры логікі для кожнай формулы можна набудаваць раўназначную ёй К.н.ф.

КАН'Ю́НКЦЫЯ (ад лац. conjunctio) — аперацыя матэматычнай логікі, якая, зыходзячы з выказванняў A і B, утварае новае выказванне $A \wedge B$, якое праўдзіцца, калі і толькі калі праўдзяцца разам выказванні A і B.

Табліца праўдзівасці К. мае выгляд

A	B	$A \wedge B$
П	П	П
П	Н	Н
Н	П	Н
Н	Н	Н

Значэнні выказванняў: П — праўда; Н — няпраўда. К. адпавядае звязванню злучнікам "і". К. абазначаюць таксама $A\&B$ ці $A \cdot B$.

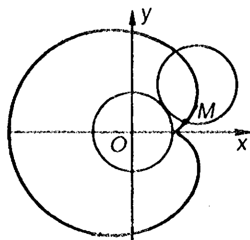
КАРАНЯВА́ННЕ — тое, што *здабыванне кораня*.

КАРДА́НА ФО́РМУЛА — формула для знаходжання каранёў няпоўнага кубічнага раўнання $x^3 + px + q = 0$. Паводле яе

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Калі каэфіцыенты p і q — рэчаісныя лікі, то характар каранёў кубічнага раўнання залежыць ад знака выразу $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$: 1) $\Delta>0$ — тры карані раўнання розныя (адзін рэчаісны, два іншыя — спалучаныя камплексныя); 2) $\Delta=0$ — карані рэчаісныя; 3) $\Delta<0$ — карані рэчаісныя і розныя. Атрымана Дж.Кардана (1545).

КАРДЫЁІДА (ад грэц. kardia — сэрца + eidos — выгляд) — плоская алгебраічная крывая 4-га парадку. Раўнанне ў прамавугольных каардынатах $(x^2 + y^2 - a^2)^2 = 4a^2[(x-a)^2 + y^2]$; у палярных $\rho = 2a(1 - \cos\varphi)$. К. апісваецца (гл. рыс.) пунктам M акружыны радыуса a, які коціцца па акружыне з такім жа радыусам. К. сіметрычная ў

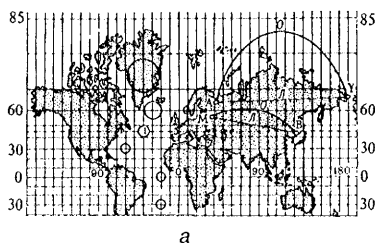


дачыненні да восі Ox. Пункт $(a, 0)$ — пункт звароту 1-га роду. Даўжыня дугі ад гэтага пункта да пункта M: $l = 16a \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{4}$; даўжыня ўсёй крывой $16r$; радыус крывіні $R = \frac{8a}{3} \sin \frac{\varphi}{2}$; плошча, абмежаваная К.: $S = 6\pi a^2$. К. — прыватны выпадак Паскаля слімака, сінусоіднай *спіралі*.

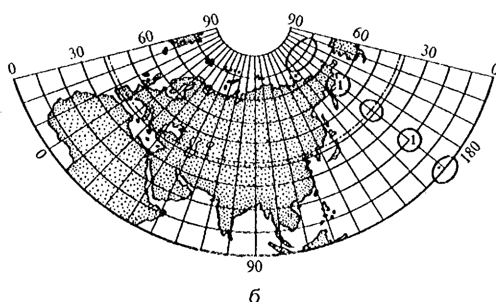
КАРДЫНА́ЛЬНЫ ЛІК (ад лац. kardinalis — галоўны), магутнасць мноства A — уласцівасць, якую мае кожнае мноства B, роўнамагутнае A. Пры гэтым мноствы A і B будуць роўнамагутнымі, калі існуе біектыўнае адлюстраванне $f: A \to B$. К.л. абазначаецца $\bar{\bar{A}}$ (увёў Г.Кантар, 1878), card A, $|A|$.

КА́РТА, крывалінейная сістэма каардынат на мностве M — біектыўнае адлюстраванне гэтага мноства на арыфметычную прастору $\mathbf{R}^n$ або на яе адкрытае падмноства. Лік n называецца памернасцю карты. Калі M — тапалагічная прастора, дадаткова патрабуецца, каб названае адлюстраванне было *гомеамарфізмам* (г.зн. непарыўным разам са сваім адваротным адлюстраваннем). Прыклад К. — прамавугольная дэкартава сістэма каардынат на эўклідавай плоскасці або ў прасторы. Параметрызацыя паверхні таксама вызначае К. на гэтай паверхні. Паняцце К. пачатковае пры азначэнні мнагастайнасці. Увядзенне К. дазваляе пры вывучэнні геаметрычных аб'ектаў карыстацца метадамі алгебры і аналізу.

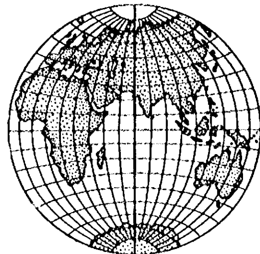
КАРТАГРАФІ́ЧНАЯ ПРАЕ́КЦЫЯ — адлюстраванне паверхні зямнога эліпсоіда або якой-небудзь яе часткі на плоскасць для будавання *карты*. К.п. робіцца ў вызначаным маштабе. Велічыня 1:M вызначае галоўны, ці агульны, маштаб карты. Асноўная характарыстыка К.п. у любым пункце — прыватны маштаб, μ — велічы-



а



б


в

ня, адваротная тасунку бясконца малога адрэзка ds на зямным эліпсоідзе да яго адлюстравання $d\sigma$ на плоскасці: $1/\mu = dsd\sigma$. Тасунак μ/M называецца адносным маштабам або павелічэннем даўжыні, рознасць $\mu/M-1$ — скажэннем даўжыні.

Памяншаючы ўмоўна зямны эліпсоід у M разоў, атрымліваюць яго геаметрычную мадэль — глобус, адлюстраванне якога на плоскасці дае карту наверхні эліпсоіда. У картаграфіі абмяжоўваюцца адлюстраваннем на плоскасць сферы нейкага радыуса R (на адхіленні зямнога эліпсоіда не звяртаюць увагі). Адлюстраванні мерыдыянаў λ =const і паралеляў φ =const у дадзенай К.п. утвараюць картаграфічную сетку. Сеткі К.п. падзяляюцца на групы: цыліндрычныя (рыс., *а*), канічныя (рыс., *б*), азімутаваныя (рыс., *в*), псеўдаканічныя, полiканічныя праекцыі.

КАРЫ́СНАСЦІ ТЭО́РЫЯ — тэорыя, якая вывучае перавагу індывіда ў дачыненні да чаго-небудзь у выглядзе лікавай функцыі. Існаванне функцыі перавагі ў выпадку канцага мноства відавочнае. Калі X — бясконцае мноства, то неабходная і дастатковая ўмова існавання функцыі перавагі — існаванне шчыльнага на перавазе злічальнага падмноства.

КАРЭ́КТНАЯ ЗАДА́ЧА (ад лац. correctus — выпраўлены) — матэматычная задача знаходжання развязку па зыходных звестках v, якія звязаны функцыйнай залежнасцю $x = F(v)$; пры гэтым выконваюцца наступныя ўмовы (умовы карэктнасці): 1) задача мае развязак пры адвольных зыходных звестках з нейкага дапушчальнага мноства (існаванне развязку); 2) кожным зыходным звесткам адпавядае толькі адзін развязак (адназначнасць развязку); 3) развязак задачы непарыўна залежыць ад зыходных звестак (малой змене зыходных звестак адпавядае малая змена развязку), іншымі словамі, развязак устойлівы. Задача, якая не задавальняе хоць бы адну з пералічаных умоў карэктнасці, называецца *некарэктнай задачай* (або некарэктна сфармуляванай).

КАРЭЛЯ́ЦЫІ КАЭФІЦЫЕ́НТ — лікавая характарыстыка ўзаемнай сувязі дзвюх выпадковых велічынь ξ_1 і ξ_2. Вызначаецца паводле формулы

$$\rho = \rho(\xi_1, \xi_2) = \frac{E(\xi_1 - E\xi_1)(\xi_2 - E\xi_2)}{\sqrt{D\xi_1}\sqrt{D\xi_2}},$$

прычым $D\xi_1 \neq 0$, $D\xi_2 \neq 0$. Для незалежных велічынь ξ_1 і ξ_2 маем $\rho = 0$ (адваротнае выказванне ў агульным выпадку не будзе правільным); $|\rho| = 1$, калі і толькі калі

$$\xi_2 = \rho\frac{\sqrt{D\xi_2}}{\sqrt{D\xi_1}}(\xi_1 - E\xi_1) + E\xi_2.$$

Заўсёды $-1 \leq \rho \leq 1$. К.к. сіметрычны ў дачыненні да ξ_1 і ξ_2, а таксама інварыянтны да змены пачатку адліку і маштабу. Калі $\rho = 0$, то кажуць, што ξ_1 і ξ_2 некарэляваныя.

КАРЭЛЯЦЫ́ЙНАЯ МА́ТРЫЦА — матрыца *карэляцыі каэфіцыентаў* некалькіх выпадковых велічынь. Няхай $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — n-мерны выпадковы вектар, кампаненты якога маюць канцы другі момант, прычым $D\xi_1 > 0, \ldots, D\xi_n > 0$. К.м. называецца матрыца $P = (\rho_{ij})$, $i, j = \overline{1, n}$, дзе $\rho_{ij} = \rho(\xi_i, \xi_j)$ — каэфіцыенты карэляцыі, $i, j = \overline{1, n}$; пры гэтым $\rho_{ij} = 1$, калі $i = j$. Уласцівасці К.м. вызначаюцца ўласцівасцямі *каварыяцыйный матрыцы*, якая запісваецца $\sum = BPB$, дзе B — дыяганальная матрыца з дыяганальнымі элементамі $\sqrt{D\xi_1}, \ldots, \sqrt{D\xi_n}$.

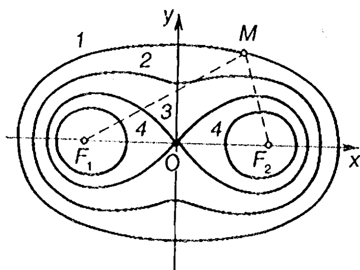
КАРЭЛЯЦЫ́ЙНАЯ ФУ́НКЦЫЯ — характарыстыка выпадковага працэсу. Няхай $\xi(t)$, $t \in T$, — выпадковы працэс, для якога $E\xi^2(t) < \infty$, $t \in T$, дзе T — нейкае параметрычнае падмноства R. Тады функцыя $R(t, s) = E(\xi(t) - E\xi(t))(\xi(s) - E\xi(s))$, дзе $t, s \in T$, называецца К.ф. Калі $\xi(t)$, $t \in T$, — стацыянарны выпадковы працэс, то К.ф. вызначаецца паводле формулы $R(\tau) = E(\xi(t+\tau) - m)(\xi(t) - m)$, дзе m — матэматычнае спадзяванне працэсу $\xi(t)$, а $t, \tau \in$ T.

КАРЭЛЯЦЫ́ЙНЫ АНА́ЛІЗ — сукупнасць метадаў матэматычнай статыстыкі, якія характарызуюць *карэляцыю* паміж выпадковымі велічынямі. З дапамогай К.а. таксама правяраюцца гіпотэзы пра значэнні *карэляцыі каэфіцыента* на падставе яго выбаркавых характарыстык.

КАРЭЛЯ́ЦЫЯ (ад лац. correlatio — судачыненні) — 1) К. у матэматычнай статыстыцы — залежнасць паміж выпадковымі велічынямі, якая не мае ў агульным выпадку строга функцыйнага характару; характарызуецца *карэляцыі каэфіцыентам*. Адрозна ад функцыйнай залежнасці К., як правіла, разглядаецца тады, калі адна велічыня залежыць не толькі ад іншай, але і ад шэрагу выпадковых фактараў. Выпадковыя велічыні называюцца карэляванымі, калі іх каэфіцыент карэляцыі не роўны 0, і некарэля-

в а н ы м і, калі іх каэфіцыент карэляцыі роўны 0; 2) К. у п р а е к т ы ў н а й г е а м е т р ы і — адназначнасць паміж пунктамі і простымі дзвюх праектыўных плоскасцяў, пры якой калініярныя (размешчаныя на адной простай) пункты пераходзяць у простыя аднаго пучка. У прыватнасці, абедзве плоскасці могуць супадаць. Прыклад К. у гэтым выпадку — п а л я р ы т э т — адпаведнасць паміж полюсамі і палярамі авальнай крывой другога парадку. Здабытак дзвюх К. на праектыўнай плоскасці ёсць к а л і н і я ц ы я, г.зн. не з'яўляецца К. Таму сукупнасць усіх К. на праектыўнай плоскасці не ўтварае групы. К. цалкам вызначаная, калі зададзены чатырохвугольнік і адпаведны яму чатырохстароннік.

КАСІ́НІ АВА́Л — плоская алгебраічная крывая 4-га парадку; мноства пунктаў M (рыс.), здабытак адлегласцяў кожнага з якіх ад двух фіксаваных пунктаў $F_1(-c; 0)$ і $F_2(c; 0)$ — сталая велічыня a^2. Раўнанне К.а. у прамавугольных каардынатах:



$$(x^2+y^2)^2-2c^2(x^2-y^2)=a^4-c^4.$$

Форма крывой, сіметрычнай у дачыненні да восяў Ox і Oy, залежыць ад судачынення параметраў a і c. Пры $a \geq c\sqrt{2}$ гэта эліпсападобны авал (крывая *1*), пры $c < a < c\sqrt{2}$ — авал (крывая *2*), пры $a = c$ — *Бэрнулі лемніската* (крывая *3*), пры $a < c$ — два авалы (крывая *4*).

КАСІНУСО́ІДА — графік функцыі $y = \cos x$.

КАСЭ́КАНС — адна з трыганаметрычных функцый. Абазначаецца cosec; $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$. Гл. *Трыганаметрычныя функцыі.*

КАТА́НГЕНС — адна з трыганаметрычных функцый. Абазначаецца ctg; $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$. Гл. *Трыганаметрычныя функцыі.*

КАТА́НГЕНС ГІПЕРБАЛІ́ЧНЫ — гл. *Гіпербалічныя функцыі.*

КАТЭГО́РЫЯ — сукупнасць аднатыповых матэматычных структур і адлюстраванняў паміж гэтымі структурамі. На сукупнасць накладваецца шэраг натуральных дадатковых умоў. Паняцце К. выкарыстоўваецца ў функцыянальным аналізе, алгебраічнай геаметрыі, алгебры і іншых раздзелах матэматыкі.

КА́ТЭТ (ад грэц. kathetos — адвес, перпендыкуляр) — старана прамавугольнага трохвугольніка, якая прылягае да прамога вугла. Прамавугольны трохвугольнік мае два К.

КАШЫ́ ЗАДА́ЧА — адна з асноўных задач тэорыі дыферэнцыяльных раўнанняў, якую ўпершыню вывучаў А.Кашы. Сутнасць К.з. палягае ў пошуку развязку дыферэнцыяльнага раўнання, якое задавальняе гэтак званыя п а ч а т к о в ы я ў м о в ы. К.з. натуральным чынам узнікае пры аналізе працэсаў, што вызначаюцца дыферэнцыяльным законам і пачатковым станам. Ад *краявых задач* К.з. адрозніваецца тым, што абсяг, на якім павінны быць вызначаны шуканы развязак, папярэдне не задаецца. Для дыферэнцыяльных раўнанняў з частковымі вытворнымі пастанова і даследаванне К.з. значна ўскладняюцца, нават калі функцыі, якія ўваходзяць у раўнанне, дастаткова рэгулярныя.

КАШЫ́ ІНТЭГРА́Л — 1) крывалінейны інтэграл другога роду, які мае выгляд

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\tau)}{\tau-z}d\tau,\ z\notin\partial D,$$

дзе ∂D — кавалкава-гладкая мяжа абсягу D, а функцыя f аналітычная ў D і непарыўная ў $D\bigcup\partial D$. Гл. таксама *Кашы інтэгральная формула*; 2) частковы выпадак *Рымана інтэграла.* Няхай $f\in C([a, b])$, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k=\overline{1,n}$, і $\sigma=\sum_{k=1}^{n}f(x_{k-1})\Delta x_k$ — інтэгральная сума. Ліміт $\lim\limits_{\max\Delta x_k\to 0}\sigma$ называецца К.і. ад функцыі f на $[a, b]$ і абазначаецца $\int_a^b f(x)dx$.

КАШЫ́ ІНТЭГРА́ЛЬНАЯ ТЭАРЭ́МА — тэарэма тэорыі аналітычных функцый. Няхай $f(z)$ — адназначная аналітычная функцыя ў абсягу D камплекснай плоскасці, а γ — замкнёная выпрастальная крывая, якая змяшчаецца ў D і якую можна непарыўна дэфармаваць у пункт, не выходзячы

за межы абсягу D. Тады $\int\limits_{\gamma} f(z)dz = 0$. А.Кашы надрукаваў гэтую тэарэму ў 1825 г., а поўны доказ атрымаў Э.Гурса ў 1884 г.

КАШЫ́ ІНТЭГРА́ЛЬНАЯ ФО́РМУЛА — формула, якая дае магчымасць вылічыць значэнні адназначнай аналітычнай функцыі $f(z)$ унутры абсягу D, абмежаванага замкнёнай кавалкава-гладкай жарданавай крывой L, праз яе значэнні на контуры. Няхай $f(z)$ — адназначная аналітычная ў абсягу D функцыя, L — замкнёная кавалкава-гладкая жарданава крывая, якая належыць гэтаму абсягу разам са сваім нутром G. Тады праўдзіцца формула Кашы

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{f(x)}{\tau - z} d\tau \quad (z \in G). \qquad (1)$$

Калі z знаходзіцца па-за крывой L, то

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{f(z)}{\tau - z} d\tau = 0.$$

Калі $f(z)$ — адназначная аналітычная функцыя па-за крывой L, то мае месца К.і.ф. для бясконцага абсягу

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{f(z)}{\tau - z} dz = \begin{cases} f(\infty), & z \in G, \\ -f(z) + f(\infty), & z \in C\overline{G}. \end{cases} \qquad (2)$$

Інтэграл, які стаіць у левай частцы формул (1) і (2), называецца *Кашы інтэгралам.*

КАШЫ́ КРЫТЭ́Р — 1) К.к. р а ў н а м е р н а й з б е ж н а с ц і ш э р а г у: функцыйны шэраг $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,(x \in E)$ раўнамерна збягаецца на мностве E калі і толькі калі для кожнага $\varepsilon > 0$ існуе такі нумар n_ε, што для ўсіх нумароў $n > n_\varepsilon$, $p \ge 0$, і для ўсіх пунктаў $x \in E$ выконваецца няроўнасць $| u_n(x) + \ldots + u_{n+p}(x) | < \varepsilon$; 2) К. к. з б е ж н а с ц і л і к а в а й п а с л я д о ў н а с ц і: паслядоўнасць $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ збягаецца, калі і толькі калі для $\varepsilon > 0$ існуе такі нумар N_ε, што для ўсіх нумароў $n > N_\varepsilon$ і $m \ge 1$ праўдзіцца няроўнасць $|x_n - x_{n+m}| < \varepsilon$.

КАШЫ́ НЯРО́ЎНАСЦЬ — няроўнасць для конпых сумаў, якая мае выгляд

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \le \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

Упершыню даказаў А.Кашы (1821). Інтэгральны аналаг К.н. — *Бунякоўскага няроўнасць.*

КАШЫ́ ПАСЛЯДО́ЎНАСЦЬ — тое, што *фундаментальная паслядоўнасць.*

КАШЫ́ ПРЫКМЕ́ТА з б е ж н а с ц і ш э р а г а ў — дастатковая ўмова збежнасці: лікавы шэраг $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ (дзе $u_n \ge 0$) збягаецца, калі $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$, $l < 1$. Пры $l > 1$ шэраг разбягаецца. Існуюць як збежныя, так і разбежныя шэрагі, для якіх $l = 1$.

КАШЫ́ РАЗМЕРКАВА́ННЕ — непарыўнае размеркаванне імавернасцяў выпадковай велічыні x са шчыльнасцю

$$P(x; \lambda, \mu) = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{\lambda^2 + (x-\mu)^2}$$

і функцыяй размеркавання

$$F(x; \lambda, \mu) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi - \mu}{\lambda},$$

дзе $x \in R$, $\mu \in R$ і $\lambda > 0$ — параметры. К.р. аднавяршынёвае і сіметрычнае ў дачыненні да пункта $x = \mu$, які з'яўляецца *модай* і *медыянай* гэтага размеркавання.

КАШЫ́ ЎМО́ВА — умова для паслядоўнасці $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ элементаў метрычнай прасторы з адлегласцю $d(x, y)$: для кожнага $\varepsilon > 0$ існуе такі нумар N_ε, што для ўсіх нумароў $n > N_\varepsilon$ і адвольнага натуральнага ліку m праўдзіцца $d(x_n, x_{n+m}) < \varepsilon$. У поўнай метрычнай прасторы К.ў. для паслядоўнасці — неабходная і дастатковая ўмова збежнасці. Паслядоўнасць, якая задавальняе К.ў., называецца ф у н д а м е н т а л ь н а й, ці з б е ж н а й у с а б е, або п а с л я д о ў н а с ц ю К а ш ы.

КАШЫ́—БУНЯКО́ЎСКАГА НЯРО́ЎНАСЦЬ — гл. *Бунякоўскага няроўнасць.*

КАШЫ́—КАВАЛЕ́ЎСКАЙ ТЭАРЭ́МА — тэарэма пра існаванне (адзінства) аналітычнага развязку задачы Кашы ў малым, калі функцыі, якія задаюць дыферэнцыяльнае раўнанне або сістэму гэтых раўнанняў і ўсе пачатковыя ўмовы разам з іх нехарактарыстычным носьбітам, аналітычныя. К.–К.т. для сістэмы k дыферэнцыяльных раўнанняў (з частковымі вытворнымі) з k невядомымі функцыямі $u_1(x, x_0), \ldots, u_k(x, x_0)$ выгляду

$$\frac{\partial^m u_i}{\partial x_0^m} = F_i\left(x_0, x, u, \frac{\partial^{m_0+\ldots+m_n} u}{\partial x_0^{m_0} \ldots \partial x_n^{m_n}}\right),$$

дзе $i = 1, \ldots, k$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $u = (u_1, \ldots, u_k)$, $\sum_{j=0}^{m} m_j \le m$, $m_0 < m_1$, $m \ge 1$, фармулюецца наступным чынам: задача Кашы $\left.\frac{\partial^j u_i}{\partial x_0^j}\right|_\sigma = \varphi_{ij}(x)$, $i = 1, \ldots, k$; $j = 0, 1, \ldots, m-1$, дзе $\sigma = \{(x, x_0),\ x_0 = 0, x \in \Omega_0\}$ ёсць носьбіт пачатковых звестак φ_{ij}, заўсёды мае адзіны аналітычны развязак $u\,(x, x_0)$ у нейкім абсягу Ω прасторы зменных x_0, x, які змяшчае Ω_0, калі F_i і φ_{ij} — аналітычныя функцыі ўсіх сваіх аргументаў. Тэарэму даказала С.Кавалеўская (1875).

КАШЫ́—РЫ́МАНА РАЎНА́НІ, Д'Аламбэра—Ойлера раўнанні — раўнанні, якія ўяўляюць сабою неабходныя і дастатковыя ўмовы, пры выкананні якіх **R**-дыферэнцавальныя функцыі камплекснай зменнай ёсць **C**-дыферэнцавальныя. **R**-дыферэнцавальнасць функцыі f аднай камплекснай зменнай $z = x + iy$ (дзе $x, y \in \mathbf{R}$, $i^2 = -1$) азначае, што яе дыферэнцыял можна надаць у выглядзе

$$Df(z)(h) = \frac{\partial f(z)}{\partial z} h + \frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} \bar{h}, \qquad (1)$$

дзе

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right); \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right). \qquad (2)$$

Паняцце **C**-дыферэнцавальнасці азначае, што дыферэнцыял $Df(z)(h)$ павінны быць **C**-лінейнай функцыяй ад прыросту h, г.зн. зводзіцца да выгляду

$$Df(z)(h) = \frac{\partial f(z)}{\partial z} h.$$

Апошні выраз разам з (1) дае камплексную форму К.–Р.р.: $\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} = 0$. Калі абазначыць $\operatorname{Re} f(z) = u\,(x, y)$, $\operatorname{Im} f(z) = v\,(x, y)$ і выкарыстаць (2), можна атрымаць рэчаісную форму К.–Р.р.:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Існаванне канцай вытворнай

$$f'(z) = \lim_{h \to 0, h \in \mathbf{C}} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

раўназначнае **C**-дыферэнцавальнасці функцыі f у пункце z; і ў гэтым выпадку вытворная $f'(z)$ роўная $\frac{\partial f(z)}{\partial z}$ і роўная вытворнай па кожным кірунку ад f у пункце z. Аналітычнасць функцыі f у пункце $z \in \mathbf{C}$ можна азначыць як яе **C**-дыферэнцавальнасць у нейкай акрузе пункта z. Адсюль вынікае фундаментальнае значэнне К.–Р.р. для тэорыі *аналітычных функцый.*

КАШЫ́—РЫ́МАНА ЎМО́ВЫ — умовы на рэчаісную $u = u(x, y)$ і ўяўную $v = v(x, y)$ часткі функцыі камплекснай зменнай $w = f(z) = u + iv$, $z = x + iy$ такія, каб яна мела вытворную ў пункце $z_0 = x_0 + iy_0$ (як функцыя камплекснай зменнай z). Для выканання К.–Р.ў. неабходна і дастаткова, каб u і v былі дыферэнцавальныя ў пункце (x_0, y_0) як функцыі рэчаісных зменных x і y і ў гэтым пункце праўдзілася К.–Р. ў.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Гл. *Кашы—Рымана раўнанне.*

КАЭФІЦЫЕ́НТ (ад лац. coefficiens — які садзейнічае) — лікавы множнік пры літарным выразе, вядомы множнік пры той ці іншай ступені невядомага або сталы множнік пры зменнай велічыні. Напрыклад, у аднасклада $-\frac{3}{4}a^2b^3$ К. ёсць $-\frac{3}{4}$; у раўнанні $x^2 + 2px + q = 0$ К. пры x^2 ёсць 1, а пры x — $2p$. У формуле даўжыні акружыны $l = 2\pi r$ К. ёсць 2π; у раўнанні простай $y = kx + b$ лік k, які вызначае тангенс вугла нахілу простай да восі Ox, называецца вуглавым К.

КВАДРАВА́ЛЬНЫ АБСЯ́Г — абсяг, які мае пэўную плошчу. Адметная уласцівасць К.а. — магчымасць акрэсліць каля яго і ўмежыць у яго многавугольнікі такім чынам, каб рознасць іх плошчаў была адвольна малой. У гэтым выпадку паміж лікавымі значэннямі плошчаў усіх акрэсленых і ўмежаных многавугольнікаў існуе толькі адзін лік, які называецца плошчай К. а. Для квадравальнасці абсягу неабходна і дастаткова, каб яго мяжа мела плошчу, роўную нулю. Існуюць абсягі, якія не задавальняюць гэтую ўмову і называюцца неквадравальнымі абсягамі.

КВАДРА́Т (ад лац. quadratus — чатырохвугольнік) — 1) роўнабаковы *прамавугольнік* (правільны чатырохвугольнік); 2) К. ліку a — здабытак $a \cdot a = a^2$ (назоў звязаны з тым, што такі здабытак вызначае плошчу квадрата, бок якога роўны a); 3) К. скалярны — гл. *Скалярны здабытак.*

КВАДРАТАВÁННЕ — падвышэнне да другой ступені (да квадрата).

КВАДРÁТНАЯ МÁТРЫЦА — *матрыца*, у якой колькасць слупкоў роўная колькасці радкоў.

КВАДРАТÓВАЕ АДХІЛÉННЕ, квадратовая памылка, квадратовая хібнасць — разглядаецца для велічыняў $x_1, x_2, \ldots, x_n$ у дачыненні да a: квадратовы корань з выразу $(x_1 - a)^2 + (x_2 - a)^2 + \ldots + (x_n - a)^2$. Найменшае значэнне К.а. маем для $a = \bar{x}$, дзе $\bar{x}$ — сярэдняе арыфметычнае велічыняў $x_1, x_2, \ldots, x_n$. К.а. ужываюць як меру якасці статыстычных ацэнак і называюць у такім разе квадратовай памылкай. У тэорыі імавернасцяў К.а. σ_x выпадковай велічыні азначаецца як корань з дысперсіі $\sqrt{Dx}$. У матэматычнай статыстыцы К.а. — мера якасці ацэнак (называецца квадратовай памылкай — хібнасцю).

КВАДРАТÓВАЕ ПРАГРАМАВÁННЕ — раздзел *выпуклага праграмавання*, прысвечаны тэорыі і метадам развязання задач мінімізацыі выпуклых квадратовых функцый на мноствах, якія задаюць сістэмы лінейных няроўнасцяў і роўнасцяў. Існуе закончаная тэорыя К.п. і распрацаваны лікавыя метады развязання задач К.п. (у тым ліку тыпу *сімплекс-метаду*), якія прыводзяць да развязання праз концую колькасць крокаў (ітэрацый).

Рэальныя задачы тэхніка-эканамічнага зместу, матэматычнымі мадэлямі якіх з'яўляюцца задачы К.п., нешматлікія. Аднак задачы К.п. узнікаюць як дапаможныя пры развязанні розных задач *матэматычнага праграмавання*. Так, у адным з варыянтаў метаду магчымых кірункаў для лікавага развязання задач нелінейнага праграмавання праблему выбару кірунку спуску на кожнай ітэрацыі зводзяць да развязання задачы К.п. Задачы безумоўнай мінімізацыі квадратовых функцый, а таксама задачы К.п. з абмежаваннямі простага тыпу (напрыклад, калі абмежаваннямі з'яўляюцца ўмовы неадмоўнасці зменных) узнікаюць у выніку скарыстання метаду рэгулярызацыі для развязання няўстойлівых (некарэктных) задач лінейнага праграмавання і метадаў штрафных функцый для развязання задач *лінейнага праграмавання*.

КВАДРАТÓВАЕ РАЎНÁННЕ — алгебраічнае раўнанне 2-й ступені. Агульны выгляд К.р. $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$. У полі камплексных лікаў К.р. мае два развязкі, якія выражаюцца ў радыкалах праз каэфіцыенты гэтага раўнання:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Калі дыскрымінант $D = b^2 - 4ac$ дадатны, то абодва карані К.р. рэчаісныя і розныя; пры $D < 0$ — камплексныя (камплексна-спалучаныя) лікі, пры $D = 0$ раўнанне мае кратны развязак $x_1 = x_2 = -b/2a$. Развязкі і каэфіцыенты К.р. звязаныя стасункамі: $x_1 + x_2 = -b/a$, $x_1 x_2 = c/a$ (*Віета формулы*).

КВАДРАТÓВАЕ СЯРЭ́ДНЯЕ значэнне — вызначаецца для n велічыняў $x_1, \ldots, x_n$ як велічыня S, роўная квадратоваму кораню з сярэдняга арыфметычнага іх квадратаў:

$$S = \sqrt{\frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{n}}.$$

КВАДРАТÓВАЯ ПАМЫ́ЛКА — тое, што *квадратовае адхіленне*.

КВАДРАТÓВАЯ РЭ́ШТА па модулі m — лік a, для якога мае месца параўнанне $x^2 \equiv a \pmod{m}$ пры якім-небудзь цэлым x (лік m — дзельнік рознасці $x^2 - a$). Калі параўнанне не праўдзіцца ні пры якім x, то лік a называецца квадратовай нярэштай, напрыклад, калі $m = 11$, то лік $a = 3$ ёсць К.р., бо пры $x = 5$ праўдзіцца параўнанне $x^2 \equiv 3 \pmod{11}$. Лік 2 — квадратовая нярэшта, бо не існуе такога ліку x, які задавальняе $x^2 \equiv 2 \pmod{11}$. Для вывучэння К.р. па простым модулі p, які не дзеліць a, выкарыстоўваецца *Лежандра сімвал* $\left(\frac{a}{p}\right)$, што роўны ліку 1, калі лік a ёсць К.р., і -1, калі a — квадратовая нярэшта. Абагульненнем сімвала на складовыя лікі m з'яўляецца *Якобі сімвал* $\left(\frac{a}{m}\right)$. Асноўная тэарэма пра К.р. — закон узаемнасці: калі p і q — няцотныя простыя лікі, то

$$\left(\frac{p}{q}\right) \cdot \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}.$$

Закон узаемнасці К.р. мае шматлікія абагульненні ў тэорыі алгебраічных лікаў.

КВАДРАТÓВАЯ ФÓРМА — аднародны паліном 2-й ступені ад n зменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ над полем K выгляду $f = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j$, дзе $b_{ij} \in K$. Калі характарыстыка поля K ёсць $\mathrm{char} K \neq 2$, то К.ф. запісваецца ў выглядзе

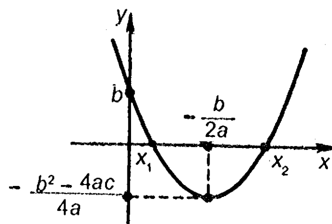
$$f=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j, \qquad (1)$$

дзе $a_{ij}=a_{ji}$ $(i,j=\overline{1,n})$. Сіметрычная матрыца $A=(a_{ij})$ называецца матрыцай К.ф. Пераход да іншай сістэмы каардынат (іншага базіса) прыводзіць да замены зменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ у К.ф. новымі зменнымі $y_1, y_2, \dots, y_n$, якія лінейна выражаюцца праз $x_1, x_2, \dots, x_n$. Матрыца К.ф. (1) у новай сістэме каардынат мае выгляд $\widetilde{A}=C^TAC$, дзе $C=(c_{ij})$ — матрыца пераходу ад старога базіса да новага $x_i=\sum_{i=1}^{n}c_{ij}y_j$. Для кожнай К.ф. існуе базіс, у якім яе матрыца дыяганальная і $f=b_{11}x_1^2+\dots+b_{nn}x_n^2$. Такі выгляд К.ф. называецца кананічным. Базіс, у якім К.ф. набывае кананічны выгляд, не адзіны, але колькасць ненулявых b_{ii} у кананічным выглядзе не залежыць ад выбару базіса і называецца рангам К.ф. Над полем камплексных лікаў К.ф. можна пераўтварыць да кананічнага выгляду, у якім для $a_{ii}\neq 0$ маем $a_{ii}=1$, $i=\overline{1,n}$; над полем рэчаісных лікаў — да выгляду, у якім для $a_{ii}=0$ выконваецца $a_{ii}=\pm 1$, $i=\overline{1,n}$. Такі выгляд К.ф. называецца нармальным. У выпадку поля рэчаісных лікаў колькасць каэфіцыентаў, роўных +1 і −1, не залежыць ад выбару базіса (закон інерцыі).

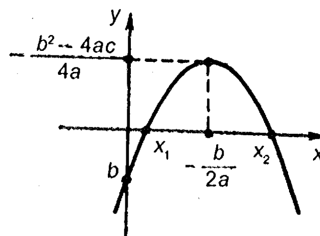
КВАДРАТО́ВАЯ ФУ́НКЦЫЯ — функцыя выгляду $y=ax^2+bx+c$. Гл. *Квадратовы трохсклад.*

КВАДРАТО́ВАЯ ХІ́БНАСЦЬ — тое, што *квадратовае адхіленне.*

КВАДРАТО́ВЫ ТРО́ХСКЛАД — мнагасклад 2-й ступені ax^2+bx+c, дзе $a\neq 0$. К.т. над полем камплексных лікаў можна раскласці на лінейныя множнікі: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, дзе x_1, x_2 — развязкі *квадратовага раўнання* $ax^2+bx+c=0$. Лікі x_1, x_2 называюцца таксама развязкамі К.т. і нулямі квадратовай функцыі $y=f(x)=ax^2+bx+c$. Графік (рыс. 1, 2) квадратовай функцыі ёсць *парабала* з вяршыняй у пункце $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$. Простая $x=-\frac{b}{2a}$ — вось сіметрыі парабалы. Галіны парабалы пры $a>0$ накіраваныя ўверх, а пры $a<0$ — уніз. У пункце $x=-\frac{b}{2a}$ дасягаецца экстрэмум $y=-\frac{b^2-4ac}{4a}$ (пры $a<0$ максімум, а пры $a>0$ мінімум). Для



Рыс. 1



Рыс. 2

квадратовай функцыі камплекснай зменнай $w=az^2+bz+c$ з камплекснымі каэфіцыентамі a, b, c захоўваюцца ўсе формулы, якія маюць месца для квадратовай функцыі рэчаіснай зменнай з рэчаіснымі каэфіцыентамі. У прыватнасці, мае месца формула

$$az^2+bz+c=a\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

Таму кожная квадратовая функцыя ёсць суперпазіцыя функцыі z^2 і лінейных функцый. Функцыя z^2 і адваротная да яе функцыя $\sqrt{z}$ шырока выкарыстоўваюцца пры *канформавых адлюстраваннях.*

КВАДРАТУ́РА (ад лац. quadratura — наданне квадратнай формы) — 1) пабудова квадрата, роўнавялікага дадзенай фігуры; 2) вылічэнне плошчы ці інтэграла (гл. *Інтэгральнае злічэнне*).

КВАДРАТУ́РА КРУ́ГА — задача пра дакладнае будаванне квадрата, роўнавялікага зададзенаму кругу (роўныя плошчы). Пад К.к. разумеюць таксама задачу вылічэння плошчы круга з пэўным набліжаннем. Матэматыкі старажытнай Грэцыі спрабавалі развязаць задачу пра дакладную К.к. з дапамогай лінейкі і цыркуля. У канцы 19 ст. было даказана, што ў такім разе яна не развязальная (нельга пабудаваць адрэзак $x=\sqrt{\pi r^2}$, бо *лік* $\sqrt{\pi}$ трансцэндэнтны). Існуюць набліжаныя і механічныя спосабы развязання К.к.

КВАДРАТУ́РНАЯ СУ́МА — тое, што *квадратурная формула.*

КВАДРАТУ́РНАЯ ФО́РМУЛА — набліжаная формула для вылічэння вызначанага інтэграла:

$$\int_a^b p(x)f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} c_k f(x_k).$$

Падынтэгральная функцыя ў левай частцы роўнасці запісаная ў выглядзе здабытку дзвюх функцый, першая з якіх $p(x)$ лічыцца фіксаванай для пэўнай К.ф. і называецца в а г а в а й ф у н к ц ы я й, функцыя $f(x)$ належыць, напрыклад, класу неперыўных функцый. Параметры $\{x_k\}$ называюцца в у з л а м і К.ф., лікі $\{c_k\}$ — каэфіцыентамі. Сума, якая ўваходзіць у правую частку формулы, называецца к в а д р а т у р н а й с у м а й. Выкарыстоўваюцца К.ф., заснаваныя на алгебраічнай інтэрпаляцыі (гл. *Гаўса квадратурная формула*), а таксама ў пэўных функцыйных класах. Для вузлоў і каэфіцыентаў многіх К.ф. складзеныя табліцы.

КВА́ДРЫКА — мноства пунктаў n-мернай афіннай прасторы A_n (звязанай з вектарнай прасторай V_n над полем $\mathbf{R}$), каардынаты якіх у афінным рэперы $\{0; e_1, e_2, ..., e_n\}$ — гэта развязкі раўнання

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=1}^{n} a_ix_i + a = 0,$$

дзе $a_{ij}, a_i, a \in \mathbf{R}$, $i, j = \overline{1, n}$; матрыца $A = \{a_{ij}\}$ сіметрычная і ненулявая. Афіннымі інварыянтамі К. з'яўляюцца, напрыклад, яе цэнтры, асімптатычныя кірункі, дыяметральныя гіперплоскасці. Існуе канцае мноства класаў афінна эквівалентных К. A_n — гэта так званая афінная класіфікацыя К. Метрычная класіфікацыя К. у эўклідавай прасторы E_n змяшчае бясконцае мноства эўклідава эквівалентных К. Найбольш пашыраны выпадак — К. $A_2(E_2)$ і $A_3(E_3)$, якія называюцца адпаведна л і н і я м і і п а в е р х н я м і другога парадку. Да мноства К. A_3 належаць, напрыклад, эліпсоід, гіпербалоіды, парабалоіды, цыліндры, конус, да A_2 — эліпс, гіпербала, парабала.

КВАЗІЛІНЕЯРЫЗА́ЦЫЯ

КВАЗІЛІНЕЯВА́ННЕ — спосаб развязання нелінейных задач шляхам звядзення іх да паслядоўнасці лінейных задач. Метад К. выкарыстоўваецца пры развязанні *краявых задач* для звычайных дыферэнцыяльных раўнанняў і раўнанняў матэматычнай фізікі, пры развязанні варыяцыйных, дыферэнцыяльна-рознасцевых задач і г.д. Звычайна К. здзяйсняецца з дапамогай метаду Ньютана, яго абагульненняў і мадыфікацый.

КВАЗІПАРА́ДАК, п а д п а р а д а к — рэфлексіўнае і транзітыўнае бінарнае дачыненне. Гл. таксама *Парадку дачыненне*.

КВАЗІРАЗВЯ́ЗАК — абагульнены развязак некарэктнай задачы, які (пры дастаткова агульных умовах) адрозна ад сапраўднага развязку задавальняе ўмовы карэктнасці паводле Адамара. Няхай X, Y — метрычныя прасторы, $M \subset X$, A — адлюстраванне $A: X \to Y$. К. раўнання $Ax = y$ на мностве M пры зададзеным y з Y называецца элемент $\tilde{x}$ з M, які мінімізуе адхіленне $\rho(Ax, y)$ пры x з M. Калі раўнанне мае на M развязак x_0, то x_0 будзе таксама і К. Бывае зручна падаць залежнасць К. ад y у выглядзе суперпазіцыі $\tilde{x} = A^{-1}p_y$, дзе A^{-1} — адлюстраванне, адваротнае да A (увогуле мнагазначнае), p — аператар метрычнага праектавання ў прасторы X на мноства $N = AM$.

КВА́НТАР (ад лац. quantum — колькі) — агульны назоў логікавых аперацый, якія па *прэдыкаце* $P(x)$ будуюць выказванне, што выражае колькасную характарыстыку мноства праўдзівасці прэдыката $P(x)$. Найбольш ужывальныя К. а г у л ь н а с ц і $\forall x$ ("для ўсякага x") і К. і с н а в а н н я $\exists x$ ("існуе x"). Няхай $P(x)$ — аднамесцавы прэдыкат, вызначаны на мностве M. Выказванне $\forall xP(x)$ праўдзівае, калі $P(x)$ праўдзівае для ўсіх $x \in M$ (мноства праўдзівасці $P(x)$ супадае з усім мноствам M), і няпраўдзівае, калі існуе такое $x_0 \in M$, што $P(x_0)$ няпраўдзівае. Выказванне $\exists xP(x)$ праўдзівае, калі існуе такое $x_0 \in M$, што $P(x_0)$ праўдзівае (мноства праўдзівасці прэдыката $P(x)$ непустое), і няпраўдзівае, калі для ўсіх $x \in M$ $P(x_0)$ няпраўдзівае. Калі разглядаецца прэдыкат $P(x)$ не на ўсім мностве M, на якім ён вызначаны, а толькі на яго частцы, вылучанай умовай $Q(x)$, то карыстаюцца гэтак званымі а б м е ж а в а н ы м і К. $(\exists x)_{Q(x)}$ і $(\forall x)_{Q(x)}$, прычым выказванне $(\exists x)_{Q(x)}P(x)$ раўназначнае $\exists x(Q(x) \wedge P(x))$, а выказванне $(\forall x)_{Q(x)}P(x)$ — выказванню $x\,(Q(x) \Rightarrow$ $\Rightarrow P(x))$. Існуе таксама К. а д з і н а с ц і, які абазначаецца $\exists!$ ("для аднаго і толькі аднаго"). Выказванне $\exists!xP(x)$ раўназначнае выказванню $\exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \Rightarrow (x = y)))$.

КВАНТЫ́ЛЬ (ад лац. quantum — колькі) — адна з лікавых характарыстык размеркавання імавернасцяў. Калі ξ — выпадковая велічыня з функцыяй размеркавання $F(x)$, то К. парадку p, $0 < p < 1$, ёсць такі лік k_p, што $F(k_p) \le p$, $F(k_p + 0) \ge p$. Няхай $F(x)$ — непарыўная строга манатонная функцыя. Тады k_p — адзіны развязак раўнання $F(x) = p$ і k_p — функцыя p, адваротная да функцыі $F(x)$. Калі $F(x)$ — непарыўная функцыя і $p' > p$, то імавернасць няроўнасці $k_p < x < k_{p'}$ роўная $p' - p$. К.

$k_{1/2}$ называецца *медыянай* выпадковай велічыні ξ; К. $k_{1/4}$ і $k_{3/4}$ — квартылямі (адпаведна ніжняй і верхняй); К. $k_{0,1},...,k_{0,9}$ — дэцылямі. Веданне К. для нейкага мноства значэнняў p дае ўяўленні пра размяшчэнне і рассейванне значэнняў выпадковай велічыні і, у прыватнасці, пра выгляд функцыі размеркавання.

КВАТЭРНІЁН — адзін з прыкладаў *гіперкамплексных лікаў*. К. ствараюць чатырохмерную асацыятыўную (але не камутатыўную) алгебру над полем **R** рэчаісных лікаў, і гэта адзіная асацыятыўная некамутатыўная алгебра над **R** без дзельнікаў нуля. Адвольны К. x можна запісаць у выглядзе лінейнай камбінацыі $x = x_0 \cdot 1 + x_1 \cdot i + x_2 \cdot j + x_3 \cdot k$, $x_i \in \mathbf{R}$, дзе 1 — адзінка алгебры К., а множанне астатніх элементаў базіса задаецца наступным чынам: $i \cdot i = -1$, $i \cdot j = k$, $i \cdot k = -j$; $j \cdot i = -k$, $j \cdot j = -1$, $j \cdot k = i$; $k \cdot i = j$, $k \cdot j = -i$, $k \cdot k = -1$. К. узніклі як спроба пабудаваць n-мерны аналаг поля *камплексных лікаў*.

КІБЕРНЕ́ТЫКА — навука пра кіраванне, сувязі і перапрацоўку інфармацыі. Цесна звязаная з матэматыкай і выкарыстоўвае яе апарат і метады. Гл. *Матэматычная кібернетыка*.

КІВАЧА́ ВАГА́ННЯЎ РАЎНА́ННЕ — звычайнае дыферэнцыяльнае раўнанне выгляду $x'' = -a\sin x$, якое апісвае вольныя ваганні матэматычнагаківача — матэрыяльнага пункта, што рухаецца ўздоўж акружыны пад дзеяннем сілы цяжару, размешчанай у вертыкальнай плоскасці. Пры гэтым $a = q/l$, дзе l — радыус акружыны, q — паскарэнне сілы цяжару, накіраванай вертыкальна ўніз, $x(t)$ — вугал адхілення ківача ў момант t ад ніжняга становішча раўнавагі. У выпадках малых ваганняў дакладнае К.в.р. замяняецца набліжаным (лінейным): $x'' = -ax$.

КІРАВА́ННЕ, кіроўная функцыя — функцыя, што ўваходзіць у дыферэнцыяльнае раўнанне, значэнні якой у кожны момант часу можна выбіраць адвольным чынам або адпаведна наяўным абмежаванням. Гл. *Варыяцыйнае злічэнне*, *Аптымальнае кіраванне*.

КІРО́ЎНАЯ СІСТЭ́МА — сістэма, якая мае пэўную структуру з уласцівасцямі інфармацыйнай прыроды. Паняцце К.с. дакладна не акрэсленае і таму трэба мець інтуіцыйнае ўяўленне пра яе. Прыклады К.с.: камп'утар, здольны выконваць дадзены набор элементарных камандаў; хімічная малекула з пэўнай канфігурацыяй атамаў і наборам уласцівасцяў, якія нас цікавяць; шахматная пазіцыя з зададзеным становішчам фігур і наборам дапушчальных хадоў кожнага з гульцоў. Асноўныя задачы тэорыі К.с. грунтуюцца вакол трох праблем: праблема сінтэзу К.с.; праблема эквівалентных пераўтварэнняў К.с.; праблема надзейнасці і кантролю К.с.

КІРО́ЎНАЯ ФУ́НКЦЫЯ — тое, што *кіраванне*.

КІРО́ЎНЫЯ КО́СІНУСЫ вектара — косінусы вуглоў α, β, γ вектара $\boldsymbol{a} = (x;\ y;\ z)$, якія ён утварае адпаведна з восямі Ox, Oy, Oz дэкартавай прамавугольнай сістэмы каардынат. К.к. маюць значэнні

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},\quad \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Гл. таксама *Плоскасць*.

КІРУ́НКАЎ ПО́ЛЕ — абсяг плоскасці, у кожным пункце якога зададзеная простая. Для задання такіх простых дастаткова ведаць тангенс вугла паміж простай і воссю абцыс, таму паняцце К.п. спалучаецца з К.п. датычных пэўнай сям'і крывых, якія запаўняюць дадзены абсяг. У прыватнасці, праз кожны пункт (t, x) абсягу вызначэння $G \subset \mathbf{R}$ правай часткі раўнання $\frac{dx}{dt} = f(t,x)$ можна правесці адрэзкі малой даўжыні з вуглавым каэфіцыентам $f(t, x)$ так, што (арыентаваны) вугал паміж воссю Ot і гэтым адрэзкам роўны $\operatorname{arctg} f(t, x)$. Калі ў абсягу G для раўнання досыць падрабязна выявіць К.п., то на падставе пабудаваных адрэзкаў можна скласці набліжанае ўяўленне пра паводзіны інтэгральных крывых. Гэтае меркаванне пакладзенае ў аснову набліжанага графічнага метаду развязання раўнання — *ізаклінаў метаду*, паводле якога пабудова К.п. здзяйсняецца з дапамогай *ізаклінаў*.

КЛАСІ́ЧНАЯ ГРУ́ПА — група ўсіх аўтамарфізмаў некаторай нулявой (або незвыроднай) паўтаралінейнай формы f на вектарнай прасторы V над целам К.г., г.зн. група ўсіх лінейных пераўтварэнняў прасторы V, для якіх $f(\varphi(x),\varphi(y)) = f(x, y)$.

Вылучаюць серыі К.г.: поўная лінейная група $GL_n(K)$, артаганальная лінейная група $O_n(K,f)$, сімплектычная лінейная група $Sp_n(K,f)$ і ўнітарная лінейная група $U_n(K,f)$. Гэта групы ўсіх аўта-

марфізмаў адпаведна нулявой, білінейнай сіметрычнай і эрмітавай формаў. Да К.г. таксама далучаюць спецыяльную лінейную групу (г.зн. падгрупу ўсіх элементаў групы $GL_n(K)$, вызначнік якіх роўны адзінцы), спецыяльную артаганальную і спецыяльную ўнітарную групы.

КЛЕРО́ РАЎНА́ННЕ — звычайнае дыферэнцыяльнае раўнанне 1-га парадку выгляду

$$y = xy' + f(y'),$$

дзе f — зададзеная дыферэнцавальная функцыя. Упершыню разгледжанае А.Клеро (1734). Агульным развязкам К.р. з'яўляецца сям'я простых

$$y = Cx + f(c)$$

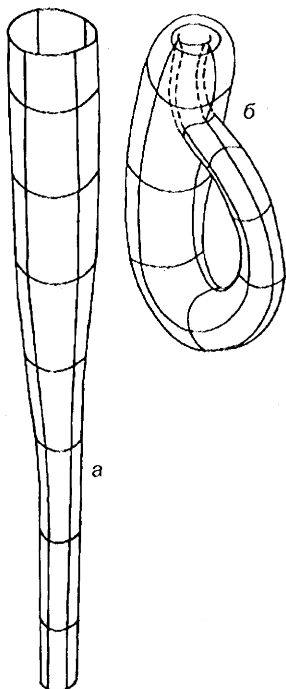
з адвольнай сталай велічынёй C. Існуе і асаблівы развязак К.р.

$$x = -f'(p), y = -pf'(p) + f(p)$$

(p — параметр), які з'яўляецца агінальнай крывой для сям'і простых. К.р. — прыватны выпадак *Лягранжа раўнання.*

КЛЯ́ЙНА БУТЭ́ЛЬКА — тое, што *Кляйна паверхня.*

КЛЯ́ЙНА ПАВЕ́РХНЯ, К л я й н а б у т э л ь к а ў т а п а л о г і і — дзвюхмерная неарыентавальная мнагастайнасць, ойлерава характарыстыка якой роўная нулю. К.п. можна атрымаць так.



Трубу, адкрытую з абодвух канцоў (рыс., *а*), згінаюць і вузейшы яе канец прапускаюць праз сценку, склейваюць абедзве межавыя акружыны, выгнуўшы вонкавую шырокую акружыну ўнутр, а нутраную акружыну — наверх (рыс., *б*). Атрыманая паверхня мае лінію самаперасячэння. К.п. без лініі самаперасячэння можна атрымаць толькі ў чатырохмернай прасторы. К.п. з'яўляецца а д н а б а к о в а й п а в е р х н я й.

КОД (ад анг. code) — канцае злічальнае мноства словаў у пэўным алфавіце. К. выкарыстоўваюцца ў тэорыі кадавання і дэкадавання паведамленняў пры перадачы апошніх па каналах сувязі. Паведамленні, што перадаюцца па каналах сувязі, непазбежна скажаюцца. Пры гэтым скажэнні могуць быць як сістэматычныя, так і выпадковыя. Для выпраўлення скажэнняў і надання паведамленню пачатковага выгляду ўжываюцца розныя К.: з выпраўленнем памылак, з выпраўленнем выпаданняў і дадаткаў і г.д. Асноўны прыём пазбаўлення ад памылак, што могуць з'явіцца ў паведамленні пры яго перадачы, — увядзенне ў паведамленне лішкаў сімвалаў. К. у п р а г р а м а в а н н і — гэта форма, у якой інфармацыя падаецца ў памяць камп'ютара. Найбольш пашыраны код ASCII — амерыканскі стандартны К. абмену інфармацыяй.

КО́ЛЦА — адно з асноўных паняццяў сучаснай алгебры, непустое мноства R, для элементаў якога вызначаныя *бінарныя аперацыі*: складанне +, множанне · (звычайна знак · прапускаецца). Пры гэтым выконваюцца аксіёмы $(a,b,c \in R)$: к а м у т а т ы ў н а с ц ь с к л а д а н н я — $a+b=b+a$; а с а ц ы я т ы ў н а с ц ь с к л а д а н н я — $(a+b)+c=a+(b+c)$; і с н а в а н н е н у л я (існуе элемент $0 \in R$ такі, што $0+a=a$); і с н а в а н н е п р о ц і л е г л а г а э л е м е н т а (калі $a \in R$, то існуе b такі, што $a+b=0$); д ы с т р ы б у т ы ў н а с ц ь м н о ж а н н я ў дачыненні да складання — $a(b+c)=ab+ac$, $(a+b)c=ac+bc$. Пры гэтым R — *абэлева група* ў дачыненні да складання, якая мае найменне адытыўнай групы колца. Калі выконваецца асацыятыўнасць множання $(ab)c = a(bc)$, колца называецца а с а ц ы я т ы ў н ы м, у ім заўсёды $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$; калі існуе элемент $1 \in R$, $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, кажуць, што R — к о л ц а з а д з і н к а й; калі выконваецца камутатыўнасць множання $ab = ba$, то R — к а м у т а т ы ў н а е к о л ц а. Адваротныя элементы колца R утвараюць мультыплікатыўную групу R^* колца R. Аса-

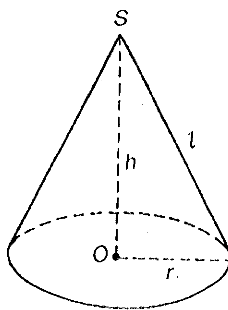
цыятыўнае і камутатыўнае кольца з 1 без дзельнікаў нуля называецца а б с я г а м ц э л а с н а с ц і. Адлюстраванне кольцаў R_1 і R_2 ($\varphi: R_1 \to R_2$) называецца г о м а м а р ф і з м а м, калі $\varphi(a+b)=\varphi(a)+$ $+\varphi(b)$, $\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$. Калі пры гэтым φ — *біекцыя*, то φ называецца і з а м а р ф і з м а м, а R_1 і R_2 — і з а м о р ф н ы м і К. Прыклады К.: мноствы ўсіх цэлых лікаў **Z**; цэлых лікаў, кратных m, $m \in \mathbf{Z}$; рацыянальных лікаў **Q**; рэчаісных лікаў **R**; камплексных лікаў **C**; гаўсавых лікаў $a+bi \in \mathbf{C}$, $a, b \in \mathbf{Z}$; мнагаскладаў з рацыянальнымі, рэчаіснымі або камплекснымі каэфіцыентамі; функцый, непарыўных на пэўным адрэзку лікавай простай; рэчаісных вектараў $\mathbf{R}^n$; кватэрніёнаў **H**; квадратных матрыц парадку n і г.д.

КОМІВАЯЖО́РА ЗАДА́ЧА — адна з найбольш вядомых камбінаторных задач, якая палягае ў наступным: коміваяжор павінны наведаць кожны з дадзеных n гарадоў толькі адзін раз і потым вярнуцца ў горад, з якога пачаў рух. Трэба знайсці найкарацейшы маршрут, калі адлегласці паміж кожнай парай гарадоў зададзеныя. Адна з матэматычных пастановак гэтай задачы выглядае так: у *графе ўзважаным* поўным трэба знайсці гамільтанаў цыкл мінімальнай вагі. Усе вядомыя алгарытмы развязання К.з. экспаненцыйныя і большасць з іх грунтуецца на метадзе "галінаў і межаў". На практыцы часцей за ўсё выкарыстоўваюць эўрыстычныя алгарытмы, якія дазваляюць атрымаць толькі набліжаныя развязкі. К.з. — *NP-цяжкая задача.*

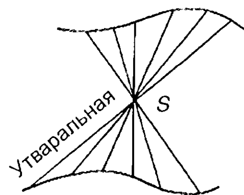
КО́МПЛЕКС (ад лац. complexus — сувязь, спалучэнне) — адно з асноўных паняццяў *камбінаторнай тапалогіі*; для яе мэтаў разглядаюцца геаметрычныя фігуры, падзеленыя на больш элементарныя фігуры. Найпрасцей складаць геаметрычныя фігуры з сімплексаў — з пунктаў, адрэзкаў, трохвугольнікаў і тэтраэдраў (у выпадку трохмернай прасторы). С і м п л е к с н ы К. — концае мноства сімплексаў, размешчаных у нейкай эўклідавай (ці гільбэртавай) прасторы; яны маюць уласцівасці: два сімплексы гэтага мноства або не маюць ніводнага агульнага пункта, або сукупнасць усіх іх агульных пунктаў ёсць агульная грань абодвух сімплексаў. Калі ў К. існуе n-мерны сімплекс і няма сімплексаў большай колькасці вымярэнняў, то К. n-м е р н ы. У клеткавага К. элементы — адвольныя выпуклыя мнагаграннікі ці адвольныя фігуры, гамеаморфныя ім ("к р ы в а л і н е й н ы я" К.). Звычайна разглядаюцца К., якія адпавядаюць у м о в е з а м к н ё н а с ц і: усякая грань сімплекса, які ўваходзіць у гэты К., таксама ўваходзіць у гэты К. Мноства, пададзенае як сума сімплексаў, што ўтвараюць n-мерны К., называецца n-м е р н ы м п а л і э д р а м.

КОНТРАВАРЫЯ́НТНЫ ТЭ́НЗАР — прыватны выпадак r разоў каварыянтнага і s разоў К.т., калі $r=0$. Гл. *Тэнзарнае злічэнне.*

КО́НУС (лац. conus, ад грэц. konos) — 1) у э л е м е н т а р н а й г е а м е т р ы і — цела, утворанае аваротам прамавугольнага трохвугольніка вакол аднаго з яго катэтаў. Аб'ём К. $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$, плошча бакавой паверхні $S=\pi r l$ (гл. рыс. 1); 2) у а н а л і т ы ч н а й г е а м е т р ы і — геаметрычнае месца



Рыс. 1



Рыс. 2

простых (утваральных), якія праходзяць праз зададзены пункт (в я р ш ы н ю) і перасякаюць зададзеную крывую (к і р о ў н у ю) (гл. рыс. 2). Калі кіроўная — акружына, а вяршыня артаганальна праектуецца ў яе цэнтр, тады атрымліваецца к р у г л ы ці п р а м ы к р у г а в ы К.

КО́НЦАЕ ПАШЫРЭ́ННЕ п о л я — пашырэнне поля, якое з'яўляецца канцамернай вектарнай прасторай над ім. Гл. *Поле.*

КО́НЦАЕ ПО́ЛЕ — тое, што *Галуа поле.*

КО́НЦАЯ ГРУ́ПА — група з концай колькасцю элементаў. Гэтая колькасць называецца п а р а д к а м г р у п ы. Гістарычна К.г. — зыходны пункт для фармавання агульных паняццяў абстрактнай тэорыі групаў. Напрыклад, у пачатку 20 ст. была распрацаваная тэорыя лінейных выяўленняў К.г., якая стала вельмі карыснай пры даследаванні абстрактных групаў. Найбольш вывучаныя простыя групы — групы з трывіяльнымі

нармальнымі падгрупамі. Да цяперашняга часу распрацавана складаная класіфікацыйная тэорыя такіх групаў. З дапамогай сучаснай вылічальнай тэхнікі створаны атлас К.г., блізкіх да простых, якія маюць парадак 10^{25}, а часам і больш высокі. Значных поспехаў у даследаванні К.г. дасягнулі беларускія матэматыкі пад кіраўніцтвам акад. С.Чуніхіна і чл.-кар. Л.Шамяткова.

КÓНЦАЯ ГУЛЬНЯ́ — гульня, у якой кожнае з мностваў стратэгій концае.

КÓНЦАЯ МАТЭМА́ТЫКА — навука, якая вывучае концыя дыскрэтныя структуры матэматыкі і яе дастасаванняў, напрыклад концыя графы, концыя аўтаматы, машыны Т'юрынга, пераўтваральнікі інфармацыі. К.м. — частка *дыскрэтнай матэматыкі.*

КÓНЦЫ АЎТАМА́Т — абстрактны аўтамат, усе тры вызначальныя мноствы якога концыя. Гл. *Аўтамат.*

КÓНЦЫХ ПРЫРÓСТАЎ ФÓРМУЛА, Лягранжа формула — адна з асноўных формул дыферэнцыяльнага злічэння, якая выяўляе сувязь паміж прыростам функцыі і яе вытворнай; запісваецца ў выглядзе

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi), \qquad (1)$$

дзе ξ — нейкі лік, падпарадкаваны ўмове $a<\xi<b$. Для праўдзівасці К.п.ф. функцыя $f(x)$ павінна быць непарыўная на $[a, b]$ і дыферэнцавальная ў кожным пункце $\xi\in(a, b)$. Геаметрычны сэнс формулы паказаны на рыс. Ён палягае ў тым, што на крывой $y=f(x)$ знойдзецца пункт $(\xi, f(\xi))$, датычная ў якім паралельная да хорды, што праходзіць праз пункты $(a, f(a))$ і $(b, f(b))$. Формулу (1) часта падаюць у выглядзе

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x+\theta h),$$

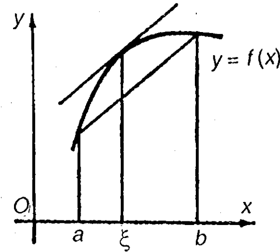
дзе $\theta=\theta(x,h)$ і $|\theta|<1$.

Формула знойдзена Ж.Лягранжам (1797) і з'яўляецца прыватным выпадкам формулы Тэйлара. Яе абагульненні — формула Банэ

$$\begin{vmatrix} f'(\xi) & \varphi'(\xi) & \psi'(\xi) \\ f(a) & \varphi(a) & \psi(a) \\ f(b) & \varphi(b) & \psi(b) \end{vmatrix}=0$$

і формула Кашы

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$



У выпадку функцыі $f(x, y, ..., z)$ многіх зменных К.п.ф. мае выгляд

$$f(x+h, y+k, ..., z+l)-f(x, y, ..., z)=$$

$$=hf'_x(x+\Theta h, y+\Theta k, ..., z+\Theta l)+kf'_y(x+$$

$$+\Theta h, y+\Theta k, ..., z+\Theta l)+...$$

$$...+lf'_z(x+\Theta h, y+\Theta k, ..., z+\Theta l),$$

дзе $0<\Theta<1$, $\Theta\in R$. На выпадак вектарназначных функцый К.п.ф. абагульняецца толькі ў форме няроўнасці.

КÓНЦЫХ РÓЗНАСЦЯЎ ЗЛІЧЭ́ННЕ — раздзел матэматыкі, у якім аргумент мяняецца дыскрэтна ў адрозненне ад дыферэнцыяльнага і інтэгральнага злічэнняў. Вытворныя ў гэтым выпадку — *рознасці концыя.* Няхай функцыя $y=f(x)$ зададзеная ў пунктах $x_k=x_0+kh$ (h — сталая, k — цэлы лік). Тады

$$\Delta y_k=f(x_{k+1})-f(x_k),\ \Delta^2 y_k=\Delta y_{k+1}-\Delta y_k=$$

$$=f(x_{k+2})-2f(x_{k+1})+f(x_k)$$

называюцца рознасцямі першага і другога парадку адпаведна. Па аналогіі будуюцца і рознасці $\Delta^n y_k$ адвольнага парадку. Калі функцыя $f(x)$ мае ў інтэрвале $x_k<x<x_{k+n}$ n-ю вытворную $f^{(n)}(x)$, то $\Delta^n y_k=h^n f^{(n)}(\xi)$, $x_k<\xi<x_{k+n}$. К.р.з. цесна звязанае з агульнай тэорыяй набліжання функцый, выкарыстоўваецца пры набліжаным развязанні дыферэнцыяльных раўнанняў, пры сумаванні функцый і інш.

КÓНЦЫХ ЭЛЕМЕ́НТАЎ МЕ́ТАД — адзін з метадаў лікавага развязання задач матэматычнай фізікі.

КÓРАНЬ — 1) К. (радыкал) ступені n, $n\geq 2$, $n\in\mathbf{N}$, з ліку a (абазначаецца $\sqrt[n]{a}$) — лік x, n-я ступень якога роўная $a(x^n=a)$. Аперацыя

знаходжання К. называецца *караняваннем*; 2) К. а л г е б р а і ч н а г а р а ў н а н н я выгляду $a_0x^n +$ $+ a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ — лік, які пасля падстановы яго замест x пераўтварае раўнанне ў т о е с н а с ц ь. Знаходжанне К. раўнанняў 2, 3, 4-й ступені гл. у арт. *Квадратовае раўнанне*, *Кубічнае раўнанне*, *Біквадратовае раўнанне*. Раўнанні вышэйшых ступеняў развязваюцца рознымі набліжанымі спосабамі лікавага развязання раўнанняў.

КОСАВУГО́ЛЬНЫЯ КААРДЫНА́ТЫ — прыватны выпадак афінных каардынат (агульных дэкартавых) на плоскасці або ў прасторы, калі восі каардынат неперпендыкулярныя адна да адной, а даўжыні базісных вектараў роўныя. Каардынаты x, y пункта плоскасці пры пераходзе ад адной сістэмы каардынат з вуглом ω да другой сістэмы К.к. (з тым жа пачаткам каардынат) змяняюцца па формулах

$$x = \frac{x'\sin(\omega-\alpha)+y'\sin(\omega-\beta)}{\sin\omega},$$

$$y = \frac{x'\sin\alpha + y'\sin\beta}{\sin\omega},$$

дзе x', y' — каардынаты пункта ў новай сістэме К.к. з каардынатным вуглом $\omega' = \beta - \alpha$, α і β — вуглы, якія ўтвараюць восі новай сістэмы К.к. з воссю абцыс зыходнай сістэмы.

КОСАСІМЕТРЫ́ЧНАЯ МА́ТРЫЦА — квадратная матрыца A над кольцам такая, што $A^T = -A$, дзе A^T — *транспанаваная матрыца* да A. Кожная квадратная матрыца B над полем характарыстыкі, няроўнай 2, ёсць сума сіметрычнай і К.м.:

$$B = \frac{1}{2}(B + B^T) + \frac{1}{2}(B - B^T).$$

Ранг К.м. — цотны лік. Ненулявыя карані характарыстычнага паліном рэчаіснай К.м. — цалкам уяўныя лікі. Рэчаісная К.м. падобная да матрыцы $\operatorname{diag}[a_1, a_2, \ldots, a_t, 0, \ldots, 0]$, дзе $a_j = \alpha_j \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, α_j — рэчаісныя лікі, $j = \overline{1, t}$.

КОСАЭРМІ́ТАВА МА́ТРЫЦА — квадратная матрыца A над кольцам R з аўтамарфізмам φ парадку 2 такая, што $A^* = -A$, дзе A^* — матрыца, атрыманая з транспанаванай матрыцы A^T заменай элементаў іх вобразамі пры аўтамарфізме φ. У прыватнасці, калі R — поле камплексных лікаў, К.м. ёсць такая матрыца $A = (a_{ij})$, $i, j = \overline{1, n}$, для элементаў якой выконваюцца роўнасці $a_{ij} = -\bar{a}_{ji}$ ($\bar{a}_{ij}$ — лік, камплексна спалучаны ліку a_{ij}). Усе дыяганальныя элементы і ўласныя значэнні камплекснай К.м. — чыста ўяўныя лікі. Камплексная матрыца A з'яўляецца К.м., калі і толькі калі $B = iA$ — *эрмітава матрыца*.

КО́СІНУС — 1) адна з *трыганаметрычных функцый*; абазначаецца cos; 2) К. в о с т р а г а в у г л а ў прамавугольным трохвугольніку — тасунак катэта, які прылягае да гэтага вугла, да гіпатэнузы. Гл. *Трыганаметрычныя функцыі*.

КО́СІНУС ГІПЕРБАЛІ́ЧНЫ — гл. *Гіпербалічныя функцыі*.

КО́СІНУСАЎ ТЭАРЭ́МА — адна з важных тэарэм геаметрыі: квадрат стараны трохвугольніка роўны суме квадратаў дзвюх іншых яго старон без падвоенага здабытку гэтых старон на косінус вугла паміж імі — $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$, дзе a, b, c — стораны трохвугольніка, α — вугал паміж старанамі a і b.

КО́СІНУС-ПЕРАЎТВАРЭ́ННЕ — пераўтварэнне $F(f)$ цотнай функцыі $f(x)$ выгляду

$$F(f) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t)\cos ut\,dt.$$

КРА́МЭРА ПРА́ВІЛА — правіла развязання вызначанай сістэмы n лінейных раўнанняў з n невядомымі (над адвольным полем). Няхай

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

— сістэма лінейных раўнанняў, вызначнік Δ матрыцы якой адрозны ад нуля. Тады сістэма мае адзіны развязак, які знаходзіцца паводле ф о р м у л К р а м э р а (знойдзены швейцарскім матэматыкам Г.Крамэрам, 1750): $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$, дзе Δ_i — вызначнік матрыцы, якая атрымліваецца з матрыцы сістэмы пры замене i-га слупка слупком вольных складнікаў:

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \ldots & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

КРА́ТА — 1) сукупнасць пунктаў прасторы з цэлымі каардынатамі ў дачыненні да якой-небудзь (не абавязкова прамавугольнай) дэкартавай

сістэмы каардынат; 2) *часткова ўпарадкаванае мноства*, у якім кожнае двухэлементавае падмноства мае як дакладную верхнюю, так і дакладную ніжнюю межы. Прыклады К.: кожнае лінейна ўпарадкаванае мноства M, дзе $\forall a, b \in M$ з умовай $a \le b$, $\sup\{a, b\} = b$, $\inf\{a, b\} = a$; рэчаісныя функцыі, вызначаныя на адрэзку [0, 1] і ўпарадкаваныя ўмовамі $f \le g$, калі $f(t) \le g(t)$ для ўсіх $t \in [0, 1]$, дзе $\sup\{f, g\} = u$, $(u(t) = \max(f(t), g(t))$, $\inf\{f, g\} = v$, $(v(t) = \min(f(t), g(t)))$. Тэрмін К. даволі агульны і таму найбольш значныя вынікі атрыманы для К., падпарадкаваных тым ці іншым дадатковым абмежаванням.

КРА́ТНАЕ натуральнага ліку a — натуральны лік, які дзеліцца на a без астачы. Лік n, які дзеліцца на кожны з лікаў a, b, ..., m, называецца агульным К. гэтых лікаў. З усіх агульных К. двух або некалькіх лікаў адзін (не роўны нулю) з'яўляецца найменшым (*найменшае агульнае кратнае*), астатнія будуць К. гэтага найменшага. Лікі, кратныя двум, — цотныя, астатнія — няцотныя.

КРА́ТНЫ ІНТЭГРА́Л — інтэграл ад функцыі, зададзенай у якім-небудзь абсягу дзвюхмернай прасторы (плоскасці), у трох- ці n-мернай прасторы. Існуюць падвойныя, патройныя і г.д., n-кратныя інтэгралы.

Няхай функцыя $f(x, y)$ зададзена ў нейкім абсягу D плоскасці xOy; абсяг D падзелены на n частковых абсягаў d_i, плошчы якіх роўныя адпаведна s_i; у кожным абсягу выбраны адвольны пункт (ξ_i, η_i) і знойдзена значэнне функцыі ў ім. Калі пры неабмежаваным памяншэнні максімальнага дыяметра частковых абсягаў d_i інтэгральныя сумы $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) s_i$ маюць ліміт, які не залежыць ні ад спосабу падзелу абсягу D, ні ад выбару пунктаў (ξ_i, η_i), то гэты ліміт называецца падвойным інтэгралам ад функцыі $f(x, y)$ па абсягу D і абазначаецца $\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy$. Аналагічна азначаецца патройны інтэграл па трохмерным абсягу і ўвогуле n-кратны інтэграл.

Для існавання падвойнага інтэграла дастаткова, каб абсяг D быў замкнёным *квадравальным абсягам*, а функцыя $f(x, y)$ — непарыўнай у D. Вылічэнне К.і. звычайна зводзяць да паўторнага інтэграла. К.і. маюць шматлікія дастасаванні: з іх дапамогай можна знаходзіць аб'ёмы целаў, іх масы, статычныя моманты, моманты інерцыі і г.д.

КРА́ТНЫ КО́РАНЬ — для мнагаскладу $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ лік c такі, што $P_n(x)$ дзеліцца без астачы на нейкую натуральную ступень двухскладу $(x - c)$. Пры гэтым c называюць коранем кратнасці k, калі $P_n(x)$ дзеліцца на $(x - c)^k$, аднак не дзеліцца на $(x - c)^{k+1}$. Корань мнагасклад $P_n(x)$ кратнасці k з'яўляецца таксама коранем вытворных гэтага мнагасклаadу да $(k - 1)$ парадку ўлучна.

КРА́ТНЫ НУЛЬ — пункт x_0, які з'яўляецца коранем не толькі раўнання $f(x) = 0$, але і раўнанняў $f^{(k)}(x) = 0$, дзе $k = \overline{1, n}$. Гл. таксама *Нуль функцыі*.

КРА́ТНЫ ПО́ЛЮС — выпадак ізаляванага *асаблівага пункта* z_0 аналітычнай функцыі $f(z)$. Калі функцыя $1 / f(z)$ мае ў пункце z_0 нуль кратнасці k, кажуць, што $f(z)$ мае ў гэтым пункце полюс кратнасці k.

КРА́ТНЫ ПУНКТ крывой — тое, што *асаблівы пункт* крывой.

КРА́ТНЫ ШЭ́РАГ — шэраг выгляду

$$\sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \ldots \sum_{n_m=1}^{\infty} u_{n_1 n_2 \ldots n_m} = \sum_{n_1, \ldots, n_m = 1}^{\infty} u_{n_1 n_2 \ldots n_m},$$

які з'яўляецца абагульненнем паняцця звычайнага *шэрагу*. Найбольш вывучаны выпадак $m = 2$. Тады К.ш. называецца *падвойным шэрагам*.

КРАЯВА́Я ЗАДА́ЧА — задача, у якой у дадзеным абсягу G прасторы незалежных зменных $x = (x_1, \ldots, x_n)$ трэба знайсці развязак раўнання $Du = 0$, $x \in G$, калі функцыя u на мяжы (краі) S абсягу G праўдзіць краявую ўмову $Bu = 0, x \in S$, дзе D і B — дадзеныя аператары (дыферэнцыяльныя або інтэгра-дыферэнцыяльныя). Калі аператары D і B лінейныя, то К.з. называецца лінейнай. Вывучаны К.з. для дыферэнцыяльных раўнанняў другога парадку, напрыклад *Дырыхле задача*, *Ноймана задача*, таксама задача пра ўласныя значэнні (*Штурма—Ліўвіля задача*).

КРАЯВЫ́Я ЎМО́ВЫ — гл. *Краявая задача.*

КРО́НЭКЕРА СІ́МВАЛ — функцыя δ_{nm}, якая залежыць ад двух цэлых аргументаў n і m і вызначаецца ўмовай

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1, \text{ калі } n = m, \\ 0, \text{ калі } n \ne m. \end{cases}$$

З дапамогай К.с. часам зручна запісваць розныя аналітычныя выразы. У матэматычную практыку ўпершыню ўвёў Л.Кронэкер (1866).

КРО́НЭКЕРА—КАПЭ́ЛІ ТЭАРЭ́МА — тэарэма, якая дае неабходныя і дастатковыя ўмовы існавання развязку сістэмы m лінейных раўнанняў з n невядомымі над некаторым полем. З каэфіцыентаў a_{ij} і вольных складнікаў b_i сістэмы раўнанняў

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

утвараюць дзве матрыцы

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1m} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1m} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix},$$

якія называюцца адпаведна а с н о ў н а й і п а ш ы р а н а й м а т р ы ц а м і гэтай сістэмы. К.—К.т. фармулюецца так: для таго каб сістэма мела хоць адзін развязак (г.зн. была супольнай), неабходна і дастаткова, каб ранг асноўнай матрыцы быў роўны рангу пашыранай матрыцы сістэмы. Гэты развязак адзіны, калі і толькі калі ранг роўны n. Тэарэма змешчана ў лекцыях Л.Кронэкера (1883—91), А.Капэлі ўпершыню сфармуляваў тэарэму з выкарыстаннем тэрміна "ранг матрыцы".

КРУГ — частка плоскасці, якая абмежаваная акружынай і змяшчае яе цэнтр. Плошча К. вызначаецца з дапамогай формулы $S = \pi r^2$, дзе r — радыус акружыны, $\pi = 3{,}1415926\dots$.

КРУГ ЗБЕ́ЖНАСЦІ — для ступеневага шэрагу $a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots$ мноства пунктаў $|z - z_0| < R$ на камплекснай плоскасці з уласцівасцямі: 1) унутры яго шэраг збягаецца; 2) па-за кругам $|z - z_0| \le R$ шэраг разбягаецца. У пунктах акружыны $|z - z_0| = R$ шэраг можа збягацца і разбягацца. Кожны ступеневы шэраг або збягаецца на ўсёй плоскасці, або мае круг збежнасці концага радыуса, або збягаецца толькі пры $z = z_0$. Унутры К.з. шэраг збягаецца да аналітычнай функцыі. Лік R называецца р а д ы у с а м з б е ж н а с ц і шэрагу і вызначаецца па ф о р м у л е К а ш ы — А д а м а р а $\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$. Калі $z_0 = x_0$ — рэчаісны лік, то частка восі Ox, якая ляжыць унутры К.з., называецца і н т э р в а л а м з б е ж н а с ц і.

КРУГ КРЫВІНІ́ — тое, што *акружына крывіні.*

КРУГАВЫ́Я ФУ́НКЦЫІ — іншы назоў *трыганаметрычных функцый.* Часам К.ф. называюць таксама адваротныя трыганаметрычныя функцыі (хоць гэтае найменне тут менш апраўданае).

КРУЧЭ́ННЕ к р ы в о й — велічыня, якая характарызуе адхіленне крывой ад судатычнай плоскасці. Няхай $r = r(s)$ — натуральная параметрызацыя крывой (даўжынёй дугі), $\Delta\varphi$ — велічыня вугла паміж судатычнымі плоскасцямі крывой у пунктах s і $s + \Delta s$. Абсалютная велічыня К. $|\kappa|$ у пункце s вызначаецца па формуле

$$|\kappa| = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \right|$$

і азначае імгненную хуткасць павароту судатычнай плоскасці.

К. дадатнае, калі судатычная плоскасць паварочваецца паводле правіла правага шруба, і адмоўнае — пры левым павароце. К. знаходзяць па формуле

$$\kappa = \frac{(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''')}{[\mathbf{r}', \mathbf{r}'']^2}.$$

Калі крывіня і К. крывой зададзеныя як функцыі даўжыні дугі, то сама крывая вызначаецца з дакладнасцю да становішча ў прасторы. Крывая, у якой К. роўнае нулю, п л о с к а я.

КРЫВАЛІНЕ́ЙНАЯ СІСТЭ́МА КААРДЫНА́Т н а м н о с т в е — тое, што *карта.*

КРЫВАЛІНЕ́ЙНЫ ІНТЭГРА́Л — інтэграл, узяты па крывой. Адрозніваюць К.і. першага роду (па даўжыні крывой) і другога роду (па каардынатах). Працэй за ўсё К.і. азначыць з дапамогай роўнасцяў, якія зводзяць іх непасрэдна да вызначанага інтэграла Рымана.

Няхай $\mathbf{r}: [a,b] \to \mathbf{R}^n$ $(a < b)$ — параметрызаваная гладкая крывая L, носьбіт якой ляжыць у $\mathbf{R}^n$. Калі f, зададзеная на носьбіце L, — непарыўная скалярная функцыя, то К.і. 1 - г а р о д у ад f па даўжыні крывой L азначаецца так:

$$\int_L f(\mathbf{r})ds := \int_a^b f[\mathbf{r}(t)] \cdot |\mathbf{r}'(t)| dt. \qquad (1)$$

Арыентацыяй на крывой называецца выбар непарыўнага поля датычных вектараў $\pm \mathbf{r}'(t)$. З (1) відавочна, што К.і. 1-га роду не залежыць ад арыентацыі крывой L. У выпадку $\mathbf{R}^3$ маем

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k},$$

і роўнасць (1) можна запісаць у выглядзе

$$\int_L f(x, y, z)ds := \qquad (2)$$

$$:= \int_a^b f[x(t), y(t), z(t)] \cdot \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\,dt.$$

Калі $f(\mathbf{r}) \equiv 1$, інтэгралы (1) і (2) выражаюць даўжыню крывой L. Калі $\vec{F}$, зададзеная на носьбіце L, — непарыўная n-мерная вектар-функцыя, то К.і. 2-га роду ад $\vec{F}$ па крывой L можна азначыць так:

$$\int_L \vec{F} \cdot d\mathbf{r} := \int_a^b \vec{F}[\mathbf{r}(t)] \cdot \mathbf{r}'(t)dt, \qquad (3)$$

дзе над знакам інтэграла знаходзіцца скалярны здабытак вектараў. З (3) відавочна, што пры змене арыентацыі крывой L на процілеглую К.і. 2-га роду мяняе знак. У выпадку $\mathbf{R}^3$ маем

$$\vec{F} = P\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\mathbf{k}$$

і роўнасць (3) набывае выгляд

$$\int_L [P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz] :=$$

$$:= \int_a^b \{P[x(t), y(t), z(t)] \cdot x'(t) +$$

$$+ Q[x(t), y(t), z(t)] \cdot y'(t) +$$

$$+ R[x(t), y(t), z(t)] \cdot z'(t)\}dt. \qquad (4)$$

Калі пад $\vec{F}$ разумеюць сілавое поле, то інтэгралы (3) і (4) выражаюць яго работу пры перамяшчэнні адзінкавай масы па крывой L. Калі крывая L замкнёная, гэтая работа называецца *цыркуляцыяй*.

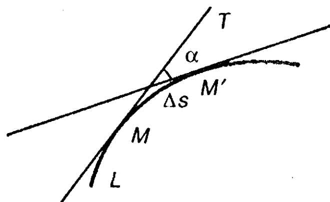
КРЫВАЛІНЕ́ЙНЫЯ КААРДЫНА́ТЫ — каардынаты пункта ў плоскім абсягу, на паверхні, у прасторы, што адрозніваюцца ад прасталінейных (дэкартавых) каардынат. Няхай у абсягу D, які можа супадаць з усёй плоскасцю, вызначаныя дзве гладкія функцыі $u\,(M)$ і $v\,(M)$ пункта M такія, што кожная лінія сям'і $u\,(M) = \text{const}$ перасякаецца з кожнаю лініяй сям'і $v\,(M) = \text{const}$ не больш як у адным пункце. Пара лікаў $(u; v)$ адназначна вызначае пункт M у абсягу D і называецца к р ы в а л і н е й н ы м і к а а р д ы н а т а м і гэтага пункта. Лініі $u\,(M) = \text{const}$ і $v\,(M) = \text{const}$ называюцца к а а р д ы н а т н ы м і л і н і я м і ў сістэме К.к. $\{u, v\}$; яны пакрываюць абсяг D к а а р д ы н а т н а ю с е т к а й, якая з'яўляецца крывалінейнаю.

Каардынатныя лініі ў акрузе кожнага пункта абсяга D — непарыўна дыферэнцавальныя крывыя, якія дапускаюць параметрычнае выяўленне $x = x\,(u, v_0)$, $y = y\,(u, v_0)$ або $x = x\,(u_0, v)$, $y = y\,(u_0, v)$. Калі каардынатныя лініі ўзаемна артаганальныя ў кожным пункце абсягу D, то ў гэтым выпадку К.к. артаганальныя. Артаганальнымі К.к. на плоскасці з'яўляюцца, напрыклад, *палярныя каардынаты*, *парабалічныя каардынаты*, *эліптычныя каардынаты*. Аналагічна ўводзяцца К.к. у абсягу D прасторы як непарыўна дыферэнцавальнае ўзаемна адназначнае адлюстраванне $D \to D'$, што вызначаецца функцыямі $u = u\,(x, y, z)$, $v = v\,(x, y, z)$, $w = w\,(x, y, z)$, у якога існуе непарыўна дыферэнцавальнае адваротнае адлюстраванне $x = x\,(u, v, w)$, $y = y\,(u, v, w)$, $z = z\,(u, v, w)$. Праз кожны пункт M абсягу D праходзіць па адной паверхні з сем'яў $u\,(M) = \text{const}$, $v\,(M) = \text{const}$, $w\,(M) = \text{const}$, якія называюцца к а а р д ы н а т н ы м і п а в е р х н я м і. Лінія парасячэння дзвюх каардынатных паверхняў называецца к а а р д ы н а т н а й л і н і я й. К. к. а р т а г а н а л ь н а я, калі ў кожным пункце абсягу каардынатныя лініі ўзаемна перпендыкулярныя. Артаганальныя К.к. у прасторы — гэта, напрыклад, канічныя каардынаты, *сферычныя каардынаты*, *цыліндрычныя каардынаты*. Сувязь К.к. з дэкартавымі прамавугольнымі каардынатамі ажыццяўляецца праз *Лямэ каэфіцыенты*. К.к. упершыню скарыстаў Я.Бэрнулі (1691), каардынатамі назваў Г.Ляйбніц (1662). К.к. у прасторы і назоў К.к. упершыню ўвёў Г.Лямэ (1833).

КРЫВА́Я — лінія ўвогуле, у прыватнасці простая. Гл. *Лінія*.

КРЫВІ́НІ ЛІ́НІЯ — лінія паверхні, кірунак якой у кожным пункце супадае з адным з галоўных кірункаў паверхні ў гэтым пункце (гл. *Паверхняў тэорыя*). К.л. утвараюць прамавугольную сетку, г.зн. накрываюць паверхню так, што праз кожны пункт (акрамя некаторых асаблівых) праходзяць дзве К.л., якія перасякаюцца пад прамым вуглом. Нармалі да паверхняў у пунктах К.л. утвараюць р а з г о р т в а л ь н у ю п а в е р х н ю. Так, на кожнай паверхні авароту мерыдыяны і паралелі — гэта К.л.; на плоскасці і сферы К.л. ёсць адвольная лінія.

КРЫВІНЯ́ — велічыня, якая характарызуе адхіленне крывой (паверхні) ад простай (плоскасці). Адхіленне дугі (рыс.) MM' крывой L ад датычнай MT у пункце M можна ахарактарызаваць з дапа-



могай гэтак званай с я р э д н я й к р ы в і н і $k_{сяр}$ гэтай дугі, роўнай тасунку велічыні α паміж датычнымі ў пунктах M і M' да даўжыні Δs дугі MM': $k_{сяр} = \frac{\alpha}{\Delta s}$. Лімітавае значэнне К. пры імкненні пункта M' крывой да пункта M (пры $\Delta s \to 0$) называецца к р ы в і н ё й k крывой L у пункце M:

$$k = \lim_{M' \to M} k_{сяр} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\alpha}{\Delta s}.$$

Велічыня $R = 1/k$, адваротная К., звычайна называецца р а д ы у с а м к р ы в і н і крывой L у пункце M. Калі крывая L ёсць графік двойчы дыферэнцавальнай функцыі $f(x)$, то К. гэтай крывой вылічаецца па формуле

$$k = \frac{|f''|}{(1+f'^2)^{3/2}}.$$

Пры даследаванні адхілення паверхні ад плоскасці праз нармаль у пункце M паверхні праводзяць розныя плоскасці. Сечывы паверхні гэтымі плоскасцямі называюцца н а р м а л ь н ы м і с е ч ы в а м і, а К. нармальных сечываў у пункце M — н а р м а л ь н ы м і к р ы в і н я м і паверхні ў гэтым пункце. Максімальная і мінімальная нармальныя К. у дадзеным пункце M называюцца г а л о ў н ы м і к р ы в і н я м і. Калі k_1 і k_2 — галоўныя К., то велічыні $K = k_1 k_2$ і $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ называюцца адпаведна *гаўсавай крывінёй* і сярэдняй крывінёй паверхні ў пункце M. Гэтыя К. паверхні вызначаюць нармальныя К. і таму з'яўляюцца характарыстыкай адхілення паверхні ад плоскасці. У прыватнасці, калі $K = 0$ і $H = 0$ ва ўсіх пунктах паверхні, то паверхня ёсць плоскасць.

Паняцце К. абагульняецца на аб'екты больш агульнай прыроды. Напрыклад, паняцце К. узнікае ў гэтак званых *рыманавых прасторах* як мера адхілення гэтых прастораў ад эўклідавых.

КРЫЖАВА́НЫЯ ПРО́СТЫЯ — простыя ў прасторы, якія не ляжаць у адной плоскасці. К.п. не перасякаюцца. Крытэрам таго, што дзве простыя $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{a}t$, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{b}t$ ёсць К.п., з'яўляецца няроўнасць нулю змяшанага здабытку, г.зн. $(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \neq 0$. Калі $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ — вектары К.п., то косінус вугла паміж імі вызначаецца формулай

$$\cos\varphi = \pm\frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|}.$$

Агульным перпендыкулярам дзвюх К.п. называецца простая, якая перасякае іх і перпендыкулярная да кожнай з іх.

Для ўсякіх К.п. існуе толькі адзін агульны перпендыкуляр. Яго раўнанне мае выгляд

$$\begin{cases} (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}, [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]) = 0, \\ (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{b}, [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]) = 0. \end{cases}$$

Адлегласцю d паміж К.п. называецца даўжыня кавалка агульнага перпендыкуляра да гэтых дзвюх простых, канцы якога ляжаць на іх. Яна вылічаецца як вышыня паралелепіпеда з плошчай асновы $S = |[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]|$ і аб'ёмам $V = |(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})|$, г.зн.

$$d = \frac{|(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})|}{|[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]|}.$$

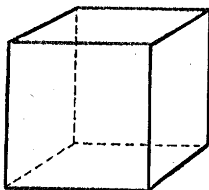
КРЫНІ́ЦА в е к т а р н а г а п о л я — пункт, у якім *дывергенцыя* дадатная.

КРЫТЭ́Р (ад грэц. kriterion) — від тэарэм, у якіх вызначаныя неабходныя і дастатковыя ўмовы праўдзівасці пэўнага сцверджання. Гл. таксама *Эквіваленцыя*.

КРЫШТАЛЯГРАФІ́ЧНАЯ ГРУ́ПА — група самасумяшчэнняў ідэальнага неабмежаванага крышталя (3-перыядычнай сістэмы пунктаў у эўклідавай прасторы E^3). К.г. можа быць таксама азначаная як дыскрэтная група Γ рухаў прасторы E^3 з кампактным фактарам E^3/Γ. Абстрактную характарызацыю К.г. дае т э а р э м а Б і б е р б а х а (1910): К.г. — гэта канцыя пашырэнні свабодных абэлевых групаў рангу, роўнага памернасці прасторы.

Класіфікацыя К.г. заснаваная на наступных фактах: для адвольнага ізамарфізму φ К.г. Γ_1 на К.г. Γ_2 знойдзецца афіннае пераўтварэнне $A: E^n \to E^n$ такое, што $\varphi(\gamma) = A^{-1}\gamma A$ пры $\gamma \in \Gamma_1$; у дадзенай памернасці ёсць толькі канцае мноства неізаморфных К.г. Класіфікацыя К.г. зробленая ў памернасцях 2 (17 групаў, Е.Фёдараў, 1891; эмпірычна ўсе гэтыя групы адкрытыя яшчэ ў старажытным Егіпце) і 3 (230 групаў, Е.Фёдараў, А.Шонфліс, 1891). Класіфікацыя трохмерных К.г. мае вялікае значэнне для фізікі і хіміі крышталяў.

КУБ (ад грэц. kybos) — 1) правільны мнагаграннік, які мае 6 квадратных граняў, 12 кантаў, 8 вяршыняў, у кожнай з якіх сыходзяцца тры ўзаемна перпендыкулярныя канты (гл. рыс.); 2) К. л і-



к у a — трэцяя ступень ліку $a(a\cdot a\cdot a=a^3)$; назоў звязаны з такім жа выразам аб'ёму К. (як геаметрычнай фігуры) з кантам a.

КУБ n-МЕРНЫ — граф Q_n, вяршынямі якога з'яўляюцца ўсе паслядоўнасці $(x_1, x_2, ..., x_n)$ даўжыні n, дзе $x_i=0$ або $x_i=1$; вяршыні $(x_1, x_2, ..., x_n)$ і $(y_1, y_2, ..., y_n)$ сумежныя, калі і толькі калі $x_i=y_i$ дакладна пры адным значэнні i.

КУБАВАЛЬНАЕ ЦЕЛА — цела, што мае аб'ём, які вызначаюць наступным чынам. Няхай дадзена цела T, V_i — лікавае мноства аб'ёмаў умежаных у T мнагаграннікаў, V_α — лікавае мноства аб'ёмаў акрэсленых вакол T мнагаграннікаў. Мноства V_i абмежаванае зверху, мноства V_α абмежаванае знізу. Дакладная верхняя мяжа мноства V_i называецца н і ж н і м аб'ё м а м $\underline{V}$ цела T, дакладная ніжняя мяжа мноства V_α — в е р х н і м аб'ё м а м $\overline{V}$ цела T. Калі верхні аб'ём цела T супадае з яго ніжнім аб'ёмам, то лік $V=\underline{V}=\overline{V}$ называецца а б'ё м а м ц е л а T.

КУБАВАННЕ — падвышэнне да трэцяй ступені (да куба).

КУБАТУРНАЯ ФОРМУЛА — формула для набліжанага вылічэння кратных інтэгралаў

$$J(f)=\int_\Omega p(x)f(x)dx,$$

дзе Ω — пэўны абсяг у эўклідавай прасторы $\mathbf{R}^n$, $x=(x_1, x_2, ..., x_n)$. Падынтэгральная функцыя запісаная ў выглядзе здабытку вагавай функцыі $p(x)$ і функцыі $f(x)$ з нейкага класа, напрыклад, непарыўных функцый і такіх, што інтэграл $J(f)$ існуе. К.ф. называецца набліжаная роўнасць

$$J(f)\approx\sum_{k=1}^{n}C_k f(x_k). \qquad (1)$$

Сума ў правай частцы роўнасці называецца к у б а т у р н а й с у м а й. Пункты $x(k)\in\Omega$ называюцца в у з л а м і, а лікі C_k — к а э ф і ц ы е н т а м і К.ф. $(k=\overline{1, n})$. Адзін са спосабаў будавання К.ф. заснаваны на алгебраічнай інтэрпаляцыі. Пункты $x(k)\in\Omega$ выбіраюцца такімі, каб скарыстаць *Лагранжа інтэрпаляцыйную формулу*. У выніку інтэгравання інтэрпаляцыйнага мнагасклада Лагранжа атрымліваецца К.ф. Пры $n=1$ К.ф. (1) ёсць *квадратурная формула*.

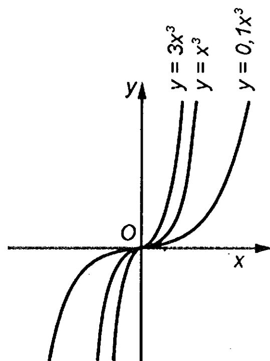
КУБІЧНАЕ РАЎНАННЕ — алгебраічнае раўнанне 3-й ступені. Агульны выгляд К.р.: $ax^3+bx^2+cx+d=0$, дзе a, b, c, d — рэчаісныя ці камплексныя лікі, $a\neq 0$. Калі ў К.р. зменная x замяняецца новай невядомай $y=x+\frac{b}{3a}$, то пасля прывядзення падобных складнікаў раўнанне набывае выгляд $y^3+py+q=0$, дзе

$$p=-\frac{b^2}{2a^2}+\frac{c}{a},\quad q=\frac{2b^3}{27a^3}-\frac{bc}{3a^2}+\frac{d}{a}$$

(н я п о ў н а е К. р.). Карані няпоўнага К.р. можна знайсці паводле *Кардана формулы*, аднак гэта звязана з вялікімі вылічэннямі, таму на практыцы К.р. развязваюцца раскладаннем на множнікі, пошукам каранёў сярод дзельнікаў свабоднага складніка або рознымі набліжанымі метадамі і інш.

Першую спробу знайсці развязак задач, якія зводзяцца да К.р., зрабілі матэматыкі старажытнасці (напрыклад, задачы *падваення куба*, *трысекцыі вугла*). Матэматыкі сярэднявечнага Усходу стварылі развітую тэорыю К.р. у геаметрычнай форме (трактат А.Хаяма "Пра доказы задач алгебры і алмукабалы", блізу 1070). У Еўропе развязак аднаго прыватнага К.р. у трыганаметрычнай форме даў Ф.Віет (1593). Першы развязак у радыкалах аднаго з выпадкаў К.р. знайшоў С.Феро (блізу 1515). Н.Тарталья (1535) разгледзеў два іншыя выпадкі. Гэтыя адкрыцці ў агульным выглядзе надрукаваў Дж.Кардана (1545). Тэрмін К. р. прапанавалі Р.Дэкарт і У.Оўтрэд (1631).

КУБІЧНАЯ ПАРАБАЛА — плоская алгебраічная крывая 3-га парадку (рыс.). Кананічнае раўнанне ў прамавугольных каардынатах $y=x^3$. Сі-



метрычная ў дачыненні да начатку каардынат, у якім мае пункт перагіну з датычнай $y = 0$.

КУБІ́ЧНАЯ ФО́РМА — аднародны мнагасклад трэцяй ступені ад некалькіх зменных, каэфіцыенты якога ёсць элементы з фіксаванага поля (ці кольца) k. Асноўныя кірункі вывучэння К.ф. — арыфметычная і алгебра-геаметрычная тэорыя. Арыфметычная тэорыя бінарных К.ф. — гэта тэорыя кубічных пашырэнняў палёў. Для К.ф. ад трох зменных арыфметычная тэорыя — гэта частка арыфметычнай тэорыі эліптычных крывых. Для такіх К.ф. вядомыя прыклады парушэння *Хасэ прынцыпу.* Алгебра-геаметрычная тэорыя К.ф. вывучае, у прыватнасці, уласцівасці кубічных гіперпаверхняў, будову мноства пунктаў на іх, разглядаюцца таксама пытанні, звязаныя з класічнай тэорыяй інварыянтаў.

КУ́РАНТА КРЫТЭ́Р — неабходная і дастатковая ўмова ўстойлівасці рознасцевых схемаў для задач гіпербалічнага тыпу. У найпрасцейшым выпадку для схемы $y_t + ay_s = 0$, $a > 0$, якая апраксімуе раўнанне пераносу $\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial s} = 0$, К.к. з'яўляецца няроўнасць $\tau \le h / a$, дзе τ і h — крокі часавай і прасторавай сетак адпаведна.

ЛАБАЧЭ́ЎСКАГА ГЕАМЕ́ТРЫЯ — геаметрыя, якая адрозніваецца ад *эўклідавай геаметрыі* тым, што ў *сістэме аксіём геаметрыі* аксіёма паралельнасці Эўкліда замяняецца яе адмаўленнем, а ўсе іншыя аксіёмы захоўваюцца. Аксіёма паралельнасці ў Л.г. фармулюецца наступным чынам: у плоскасці з дадзенай простай праз пункт, які не ляжыць на гэтай простай, можна правесці не менш як дзве простыя, што не перасякаюць дадзеную.

У эўклідавай геаметрыі і ў Л.г. ёсць агульная частка — *абсалютная геаметрыя,* да якой належаць, напрыклад, паняцці перпендыкулярнасці, роўнабаковага трохвугольніка і іх уласцівасці, прыкметы роўнасці трохвугольнікаў, дачыненні "больш" і "менш" паміж старанамі і вугламі трохвугольніка і інш. Адрозніваюцца геаметрыі Эўкліда і Лабачэўскага ў тых геаметрычных будаваннях і сцверджаннях, дзе ўжываецца аксіёма паралельнасці. Найбольш характэрныя з іх наступныя: 1) у плоскасці Лабачэўскага праз дадзены пункт, які не ляжыць на дадзенай простай, можна правесці бясконцае мноства простых, што не перасякаюць дадзеную (сярод іх вылучаюцца дзве, якія называюцца паралельнымі дадзенай у адзін бок і ў процілеглы, астатнія называюцца разбежнымі з дадзенай); 2) сума вуглоў трохвугольніка ў Л.г. меншая за 180° і можа прымаць адвольныя значэнні паміж 0° і 180°; 3) мноства значэнняў плошчаў трохвугольнікаў абмежаванае лікам πR^2, R — фіксаваны дадатны лік, які называецца радыусам крывізні ў Л.г. З гледзішча дыферэнцыяльнай геаметрыі Л.г. ёсць геаметрыя *рыманавай мнагастайнасці* сталай адмоўнай крывіні $k = -\frac{1}{R}$.

ЛАБАЧЭ́ЎСКАГА МЕ́ТАД — метад для адначасовага вылічэння ўсіх каранёў мнагаскладу. Не патрабуе ведання пачатковых набліжанняў каранёў мнагаскладу і мае квадратовую збежнасць у выпадку розных (паводле абсалютнай велічыні) каранёў. Аднак Л.м. лікава няўстойлівы, бо ў працэсе набліжэння хутка назапашваецца вылічальная хібнасць.

ЛАГАРЫ́ТМ — тое, што *лагарыфм.*

ЛАГАРЫТМАВА́ННЕ — тое, што *лагарыфмаванне.*

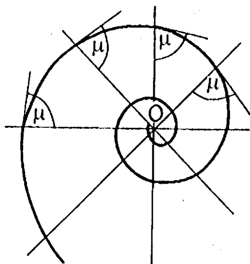
ЛАГАРЫ́ФМ (ад грэц. logos — судачыненні + arithmos — лік), лагарытм — вызначаецца для ліку N ($N > 0$) па аснове a ($a > 0, a \ne 1$) як паказнік m ступені, да якой трэба падвысіць a, каб атрымаць N; абазначаецца $m = \log_a N$. Асноўныя ўласцівасці Л.: $\log_a (NL) = \log_a N + \log_a L$; $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$; $\log_a N^k = k \log_a N$, $k \in \mathbf{R}$. Л. даюць магчымасць зводзіць дзеянні з лікамі да больш простых дзеянняў з Л. гэтых лікаў. Найбольш ужывальныя дзесятковыя ($a = 10$) і натуральныя Л. ($a = e$), якія абазначаюцца адпаведна $\lg N$ і $\ln N$. Гэтыя Л. звязаныя стасункамі $\ln N = M \lg N$, $M = 2{,}30258...$. Наогул сувязь паміж Л. зададзенага ліку пры розных асновах дае формула $\log_a N = \log_a b \cdot \log_b N$. Л. і лагарыфмічныя табліцы ўведзеныя незалежна шатландскім матэматыкам Дж. Нёпэрам (1614, 1619) і швейцарскім матэматыкам І.Бюргі (1620).

ЛАГАРЫФМАВА́ННЕ, л а г а р ы т м а в а н н е — знаходжанне *лагарыфму* лікавага, алгебраічнага або іншага выразу. Л. — адно з двух дзеянняў, адваротных *ступеняванню*.

ЛАГАРЫФМІ́ЧНАЕ РАЎНА́ННЕ — раўнанне, у якім невядомая велічыня знаходзіцца пад знакам лагарыфма або ў аснове лагарыфма. Для развязання Л.р. выкарыстоўваюцца спосабы, заснаваныя на ўласцівасцях лагарыфмічнай функцыі (прывядзенне да лагарыфмаў з роўнымі асновамі, замена зменных, графічныя пабудовы).

ЛАГАРЫФМІ́ЧНАЯ СПІРА́ЛЬ — плоская трансцэндэнтная крывая, якая перасякае ўсе радыусы-вектары пад адным і тым жа вуглом (гл. рыс.). Раўнанне Л.с. у палярных каардынатах мае выгляд

$$\rho = ae^{k\varphi},\ a>0,\ -\infty<\varphi<+\infty.$$



Раўнанне Л.с. можна запісаць наступным чынам: $\ln\frac{\rho}{a} = k\varphi$, адкуль бачна, што палярны вугал (яго велічыня) прапарцыйны лагарыфму радыуса-вектара, вымеранага адзінкай маштабу, роўнай a (адсюль назоў Л.с.), пры гэтым $k = \operatorname{ctg}\mu$. Калі $\mu = \frac{\pi}{2}$, г.зн. пры $k = 0$, крывая — акружына $\rho = a$. Полюс 0 — асімптатычны пункт крывой. Даўжыня дугі паміж пунктамі M_1 (ρ_1, φ_1) і M_2 (ρ_2, φ_2):

$$L = (\rho_2 - \rho_1)\frac{\sqrt{1+k^2}}{k};$$

радыус крывіні

$$R = \rho\sqrt{1+k^2}.$$

Л.с. пераходзіць у сябе пры лінейных пераўтварэннях. Яна належыць да псеўдаспіраляў. Л.с. шырока выкарыстоўваецца ў тэхніцы. Так, у розных інструментах і машынах нажы, якія круцяцца і рэжуць, маюць профіль, акрэслены па дузе Л.с. У выніку гэтага вугал рэзання застаецца сталым. У прыродзе некаторыя ракавіны акрэсленыя па Л.с.; семкі сланечніка размяшчаюцца па дугах, блізкіх да дугаў Л.с. Упершыню Л.с. разглядаў Р.Дэкарт (1638), незалежна ад Р.Дэкарта яе адкрыў Э.Тарычэлі (1644). Уласцівасці Л.с. шырока вывучаў Я.Бэрнулі (1692). Найменне прапанаваў П.Варыньён (1704).

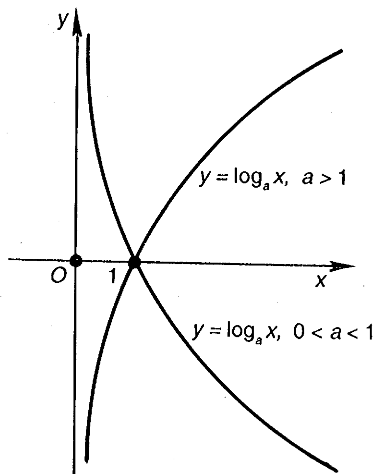
ЛАГАРЫФМІ́ЧНАЯ ФУ́НКЦЫЯ — функцыя $y = \ln x$, адваротная *паказнікавай функцыі* $x = e^y$; значэнне Л.ф., якое адпавядае значэнню аргумента x, называецца н а т у р а л ь н ы м л а г а р ы ф м а м x. Л.ф. — адна з асноўных *элементарных функцый*; праз яе выражаюцца, напрыклад, *ступеневыя функцыі, адваротныя трыганаметрычныя функцыі*, адваротныя гіпербалічныя функцыі.

Л. ф. р э ч а і с н а й з м е н н а й $y = \log_a x$ пры рэчаісных $x > 0$ і $a > 0$ звязаны з Л.ф. $y = \ln x$ (асноўнай) стасункам $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$. Л.ф. $\log_a x$ вызначаная пры $x > 0$, манатонная (нарастае, калі $a > 1$; спадае, калі $0 < a < 1$), няпарыўная, бясконца дыферэнцавальная; пры гэтым

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a},\quad \int \log_a x\,dx = x\left(\log_a x - \frac{1}{\ln a}\right) + C$$

(у прыватнасці, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $\int \ln x\,dx = x(\ln x - 1) + C$).

Графік Л.ф. $y = \log_a x$ сіметрычны графіку паказнікавай функцыі $y = a^x$ у дачыненні да простай $y = x$,



праходзіць праз пункт (1, 0) і асімптатычна набліжаецца да восі Oy (гл. рыс.).

Л.ф. $\omega = \operatorname{Ln} z$ к а м п л е к с н а й з м е н н а й $z = x + iy$ вызначаецца паводле формулы $\operatorname{Ln} z =$

$= \ln|z|+i\operatorname{Arg} z$, дзе $\operatorname{Arg}z$ — мнагазначная функцыя. Л.ф. $\omega = \operatorname{Ln} z$ вызначана для кожнага камплекснага $z \neq 0$ і з'яўляецца мнагазначнай функцыяй: у кожным пункце $z \neq 0$ яна мае бясконцую колькасць значэнняў, якія адрозніваюцца адзін ад аднаго на $2k\pi i$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$.

ЛАГАРЫФМІЧНЫЯ ТАБЛІЦЫ — табліцы лагарыфмаў лікаў; ужываюцца для спрашчэння вылічэнняў. Найбольш распаўсюджаныя табліцы дзесятковых *лагарыфмаў*. Дзесятковыя лагарыфмы лікаў N і 10^kN (k — цэлы лік) адрозніваюцца толькі характарыстыкамі і маюць аднолькавыя мантысы ($\lg 10^kN = k + \lg N$), таму ў табліцах дзесятковых лагарыфмаў дастаткова прывесці толькі мантысы лагарыфмаў цэлых лікаў.

Існуюць табліцы дзесятковых лагарыфмаў з рознай колькасцю знакаў мантыс (часцей 4- і 5-значныя).

У Л.т. часта прыводзяцца табліцы антылагарыфмаў — лікаў, лагарыфмы якіх ёсць дадзеныя лікі, і табліцы гэтак званых гаўсавых лагарыфмаў, наводле якіх вызначаюцца лагарыфмы сумы ці рознасці двух лікаў па вядомых лагарыфмах гэтых лікаў (без прамежкавага вызначэння гэтых лікаў). Л.т. змяшчаюць таксама лагарыфмы трыганаметрычных велічыняў.

Першыя Л.т. склалі незалежна адзін ад аднаго шатландскі матэматык Дж.Нёпэр (1614, 1619) і швейцарскі матэматык І.Бюргі (1620). У Расіі ўпершыню выдадзеныя ў 1703 г. пры ўдзеле Л.Магніцкага. Табліцы гаўсавых лагарыфмаў надрукаваныя ў 1802 г. італьянскім матэматыкам З.Леанэлі; у агульны ўжытак іх увёў нямецкі матэматык К.Гаўс (1812). Са з'яўленнем камп'ютараў і калькулятараў Л.т. паступова страчваюць сваё значэнне.

ЛАГІСТЫКА — тэрмін, які выкарыстоўваецца для абазначэння сістэм логікі, што спрабуюць звесці логікавыя разважанні да фармальных вылічэнняў. У розныя часы пад тэрмінам Л. мелі на ўвазе розныя рэчы, напрыклад у пачатку 20 ст. пад Л. разумелі *матэматычную логіку*.

ЛАГІЧНАЯ ВЫСНОВА — выводзіцца з дадзенага мноства ўмоў. Азначаецца як выказванне, праўдзівае пры кожнай інтэрпрэтацыі нялогікавых сімвалаў (функцый, прэдыкатаў), якая захоўвае праўдзівасць умоў. Калі выказванне A ёсць Л.в. выказвання B, то ўжываюць выразы "B лагічна вымушае A" або "A лагічна вынікае з B".

ЛАКАЛЬНА ВЫПУКЛАЯ ПРАСТОРА — вектарная прастора X, надзеленая сям'ёй паўнормаў $p = \{p_\alpha(x)\}$, г.зн. для ўсякага $x_0 \neq 0$ існуе $p_{\alpha_0}(x_0) \neq 0$. Калі сям'я зводзіцца да адной *паўнормы*, то X — унармаваная прастора. У Л.в.п. існуюць лінейныя непарыўныя функцыяналы (гл. *Хана—Банаха тэарэма*).

ЛАКАЛЬНА КАМПАКТНАЯ ПРАСТОРА — аддзяляльная тапалагічная прастора, кожны пункт якой мае кампактнае наваколле. Усякая Л.к.п. ёсць *рэгулярная прастора*.

ЛАКАЛЬНАЯ ТЭАРЭМА ЛЯПЛЯСА — тэарэма пра асімптатычнае размеркаванне колькасці з'яўленняў падзеі ў *Бэрнулі выпрабаваннях*. Няхай ажыццяўляюцца n незалежных выпрабаванняў Бэрнулі, у кожным з якіх магчыма з'яўленне падзеі A з імавернасцю p. Абазначым праз $P_n(m)$ імавернасць таго, што ў n выпрабаваннях падзея A адбудзецца роўна m разоў. Тады

$$\frac{P_n(m)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}}} e^{-\frac{x_m^2}{2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1,$$

дзе

$$x_m = \frac{m-np}{\sqrt{np(1-p)}}, \quad -\infty < a \le x_n \le b \le +\infty.$$

У агульным выглядзе тэарэма была даказаная П.Ляплясам. Асобны выпадак, калі $p = \frac{1}{2}$, быў разгледжаны раней А.Муаўрам, у сувязі з гэтым часта тэарэма называецца лакальнай тэарэмай Муаўра—Ляпляса.

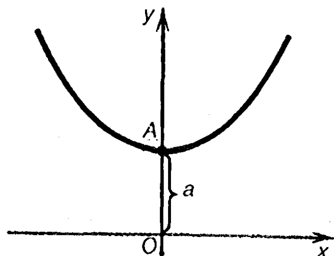
ЛАКАЛЬНЫ МАКСІМУМ І МІНІМУМ — адпаведна найбольшае і найменшае значэнне функцыі ў параўнанні з яе значэннямі ва ўсіх дастаткова блізкіх пунктах. Функцыя $f: x \to R$, зададзеная на тапалагічнай прасторы X, мае ў пункце x_0 лакальны максімум (мінімум), калі існуе такая акруга $U(x_0)$ пункта x_0, што для ўсіх $x \in U(x_0)$ выконваецца няроўнасць $f(x) \le f(x_0)$ ($f(x) \ge f(x_0)$). Пры гэтым функцыя мае ў пункце x_0 строгі лакальны максімум (мінімум), калі для ўсіх $x \in U(x_0) \setminus \{x_0\}$ праўдзіцца $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$). Пункт x_0 называюць адпаведна пунктам лакальнага і строгага лакальнага максімуму (мінімуму) функцыі $f(x)$.

Няхай функцыя $f(x)$ зададзеная ў нейкай акрузе пункта x_0 лікавай восі і мае вытворную $f'(x_0)$. Калі x_0 — пункт лакальнага максімуму (мінімуму)

функцыі f, то $f'(x_0) = 0$. Няхай функцыя f мае ў пункце x_0 m вытворных, прычым $f^{(k)}(x_0) = 0$, $k = \overline{1, m-1}$, $f^{(m)}(x_0) \neq 0$. Тады для таго, каб функцыя мела ў пункце x_0 лакальны максімум (мінімум), неабходна і дастаткова, каб m было цотным і $f^{(m)}(x_0) < 0$ ($f'(x_0) > 0$). Няхай функцыя $f(x^1, ..., x^n)$ зададзеная ў n-мерным наваколлі пункта $x_0 = (x_0^1,...,x_0^n)$ і дыферэнцавальная ў гэтым пункце. Калі x_0 — пункт лакальнага максімуму (мінімуму), то дыферэнцыял $Df(x_0)$ функцыі f у гэтым пункце роўны нулю, што раўназначна роўнасці нулю ў гэтым пункце ўсіх частковых вытворных першага парадку функцыі f. Калі $Df(x_0) = 0$, функцыя f мае ў пункце x_0 непарыўныя частковыя вытворныя другога парадку і яе дыферэнцыял другога парадку ў x_0 — адмоўная (дадатная) квадратовая форма, то x_0 ёсць пункт лакальнага максімуму (мінімуму). Неабходныя і дастатковыя ўмовы максімуму (мінімуму) рэчаісных функцый, зададзеных у абсягах, якія маюць больш складаную структуру, вывучаюцца ў выпуклым аналізе, матэматычным праграмаванні, варыяцыйным злічэнні. Распрацаваны разнастайныя метады лікавага набліжанага вылічэння максімуму і мінімуму шматлікіх класаў функцый.

ЛАНЦУ́Г — тое, што *лінейна ўпарадкаванае мноства.*

ЛАНЦУГО́ВАЯ ЛІ́НІЯ — плоская крывая, раўнанне якой у прамавугольных каардынатах мае выгляд $y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$. Аднародны ланцуг з замацаванымі канцамі пад дзеяннем сілы цяжару набывае форму Л.л. (гл. рыс.). Паверхня, якая атрымліваецца пры авароце Л.л. вакол восі Ox, называецца катэноідам. Тэрмін Л.л. прапанаваў Х.Гюйгенс (1690).



ЛАНЦУГО́ВЫ ДРОБ — тое, што *непарыўны дроб.*

ЛАЦІ́НСКІ КВАДРА́Т — квадратная матрыца n-га парадку, кожныя радкі і слупкі якой ёсць перастановы элементаў канцага мноства S, якое складаецца з n элементаў (пабудаваны на мностве S; лік n называецца п а р а д к а м).

Л.к. існуе для кожнага n; напрыклад, $A = \|a_{ij}\|$, дзе $a_{ij} = i + j - 1 (\mathrm{mod}\, n)$, $i, j = \overline{1,n}$, ёсць Л.к. Для колькасці ліку L_n Л.к. n-га парадку мае месца ацэнка знізу: $L_n \geq n!(n-1)!...2!1!$ Два Л.к., пабудаваныя на адным і тым жа мностве S, называюцца э к в і в а л е н т н ы м і, калі адзін атрымліваецца з другога пры перастанове радкоў і слупкоў і перайменаванні элементаў. Два Л.к. $A = \| a_{ij} \|$ і $B = \| b_{ij} \|$ n-га парадку называюцца а р т а г а н а л ь н ы м і, калі $(a_{ij}, b_{ij}) \neq (a_{kl}, b_{kl})$ пры $(i, j) \neq (k, l)$, $i, j, k, l \in S = \{1, ..., n\}$, дзе (a_{ij}, b_{ij}) — элемент на перасячэнні i-га радка і j-га слупка матрыцы, атрыманай накладаннем двух Л.к. A і B. Некалькі Л.к. аднаго парадку называюцца п а р а м і а р т а г а н а л ь н ы м і, калі кожныя два з іх артаганальныя.

ЛАЦІ́НСКІ ПРАМАВУГО́ЛЬНІК — такая $(r + n)$-матрыца, усякі радок якой ёсць перастанова лікаў 1, 2, ..., n і ў кожным слупку ні адзін з лікаў не паўтараецца. У агульным выпадку $r \leq n$; калі $r = n$, маем *лацінскі квадрат.*

ЛЕБЭ́ГА ІНТЭГРА́Л — адно з абагульненняў паняцця *вызначанага інтэграла*, прапанаванае А.Лебэгам (1901) і заснаванае на распрацаванай ім тэорыі меры. Няхай $f(x)$ — *вымерная функцыя* і абмежаваная ($A < f(x) < B$) на мностве E (у прыватнасці, можа быць $E = [a; b]$). Адрэзак $[A, B]$ падзяляецца пунктамі $y_0, y_1, ..., y_n$ так, што $A = y_0 < y_1 < ... < y_n = B$. Праз E_k абазначаецца мноства з E, на якім $y_k \leq f < y_{k+1}$, праз $m(E_k)$ — яго *Лебэга мера.* Л.і. азначаецца як ліміт (калі ён існуе як концы) сумаў $\sum_{k=0}^{n-1} \eta_k m(E_k)$, дзе $y_k \leq \eta_k < y_{k+1}$ пры імкненні да нуля найбольшай рознасці $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$, $k = \overline{1, n}$. Абазначаецца Л.і. $\int_E f(x)dx$ або $\int_a^b f(x)dx$, калі $E = [a, b]$. Для функцыі $f(x)$, інтэгравальнай на $[a, b]$ у звычайным сэнсе, абавязкова існуе Л.і., значэнне якога роўнае значэнню вызначанага інтэграла. Калі функцыя $F(x)$ мае абмежаваную вытворную $F'(x)$, яна інтэгравальная паводле Лебэга і $F(x) = \int_a^x F'(t)dt + c$, дзе інтэграл разумеем у сэнсе Лебэга. Такім чынам, Л.і. поўнасцю развязвае задачу ўзнаўлення першаіснай па

вядомай абмежаванай вытворнай. Функцыя $f(x)$ называецца **інтэгравальнай паводле Лебэга** (ці **сумавальнай**), калі яна мае концы Л.і. Клас усіх функцый, інтэгравальных паводле Лебэга на множстве E, абазначаецца $L(E)$.

Уласцівасці Л. і.:

1) на множстве, мера якога роўная нулю, усякая функцыя $f(x)$ інтэгравальная паводле Лебэга і

$$\int_E f(x)\,dx = 0;$$

2) калі $f(x) = C$ на множстве E, то

$$\int_E f(x)\,dx = Cm(E);$$

3) вымерная функцыя $f(x)$ інтэгравальная паводле Лебэга, калі і толькі калі інтэгравальны яе модуль $|f(x)|$ і

$$\left|\int_E f(x)dx\right| \le \int_E |f(x)|dx;$$

4) калі $f(x)\in L(E)$, то $cf(x)\in L(E)$ і

$$\int_E cf(x)dx = c\int_E f(x)dx;$$

5) калі $f(x)$, $g(x)\in L(E)$, то $f(x) \pm g(x)\in L(E)$ і

$$\int_E (f(x)\pm g(x))dx = \int_E f(x)dx \pm \int_E g(x)dx;$$

6) калі $f(x)$, $g(x)\in L(E)$ і $f(x) \le g(x)$, то

$$\int_E f(x)dx \le \int_E g(x)dx;$$

7) калі $f(x)\in L(E)$, то $f(x)\in L(E_1)$, дзе E_1 — адвольнае вымернае падмноства з E;

8) калі $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ і $E_i \cap E_j = \varnothing$, $i \ne j$, дзе $E_k (k = \overline{1,\infty})$ — вымерныя множствы, то

$$\int_E f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)dx;$$

9) калі інтэгравальную паводле Лебэга функцыю змяніць на множстве меры нуль, то гэта не зменіць яе інтэгравальнасці, велічыні Л.і. У прыватнасці, калі $f(x) \sim 0$, то $\int_E f(x)\,dx = 0$;

10) калі $f(x) \ge 0$ і $\int_E f(x)dx = 0$, то $f(x) \sim 0$;

11) калі $f(x)\in L(E)$, то для адвольнага $\xi > 0$ існуе $\sigma > 0$ такі, што $\left|\int_e (x)dx\right| < \xi$, дзе e — адвольнае вымернае множства з E такое, што $m(e) < \sigma$. Гэта так званая **абсалютная непарыўнасць** Л.і. Далейшыя абагульненні Л.і. разглядаліся А.Данжуа, О.Перонам, А.Хінчыным.

ЛЕБЭ́ГА МЕ́РА — абагульненае паняцце даўжыні, плошчы, аб'ёму шырокага класа аб'ектаў (дадзенае А.Лебэгам, 1902). Напрыклад, Л.м. для абмежаваных множстваў на плоскасці $m(\Delta)$ адвольнага квадрата Δ лічыцца роўнай яго плошчы. Адвольнае множства A накрываецца концай ці бясконцай колькасцю квадратаў $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n, ...$. Ніжняя мяжа $\inf\sum_{n=1}^{\infty} m(\Delta_n)$, узятая па ўсіх накрыццях, называецца вонкавай (верхняй) мерай $m^*(A)$ множства A. Нутраной (ніжняй) мерай m_*A называецца рознасць $m(\Delta) - m_*(\overline{A})$, дзе Δ — квадрат, які ўлучае множства A, $\overline{A}$ — множства ўсіх пунктаў гэтага квадрата, што не належыць A. Множствы, для якіх вонкавая мера супадае з нутраной, называюцца **вымернымі паводле Лебэга**, агульнае значэнне $m(A)$ — **вонкавай і нутраной мерай** (Л.м. множства A). Геаметрычныя фігуры, у якіх ёсць плошча, маюць Л.м., роўную плошчы. Існуюць вымерныя множствы, што не маюць плошчы. Аналагічна азначаецца мера на простай і ў прасторы. Асноўныя ўласцівасці Л.м.: 1) мера адвольнага множства неадмоўная; 2) мера сумы $A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ концай або злічальнай сістэмы парамі неперасякальных множстваў $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ роўная суме іх мераў $m(A)\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$; 3) мера множства не змяняецца пры яго зрухах як цвёрдага цела. Аналагічнае паняцце для некаторых аб'ектаў разглядалі К.Жардан (1893), З.Барэль (1898).

ЛЕБЭ́ГА ТЭАРЭ́МА — гэты назоў маюць тры тэарэмы, даказаныя А.Лебэгам: тэарэма пра функцыі з абмежаванай варыяцыяй (1904); тэарэма ў метрычнай тэорыі пра паслядоўнасці вымерных функцый (1906); тэарэма ў тэорыі набліжэння функцый (1909).

ЛЕ́ВАЯ ТРО́ЙКА вектараў — такая ўпарадкаваная тройка вектараў ***a***, ***b***, ***c*** (звычайна некампланарных), што з канца трэцяга вектара ***c*** найменшы паварот вектара ***a*** да кірунку вектара ***b*** назіраецца як паварот па руху гадзіннікавай стрэлкі.

ЛЕЖА́НДРА МНАГАСКЛА́ДЫ — мнагасклады, якія вызначаюцца формуламі

$$P_n(x) = \frac{1}{n!2^n}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

пры $n = 0, 1, 2, \ldots$. У прыватнасці,

$$P_0(x) = 1;\ P_1(x) = x;$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1);\ P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x);$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3).$$

Нулі Л.м. рэчаісныя і знаходзяцца ў прамежку $[-1, 1]$. Л.м. утвараюць на $[-1, 1]$ поўную сістэму, і адвольную інтэгравальную функцыю $f(x)$ можна раскладваць па сістэме $P_n(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x),\ \ a_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx.$$

У матэматычную практыку ўвёў А.Лежандр (1785).

ЛЕЖÁНДРА СІ́МВАЛ — сімвал для вывучэння *квадратовых рэштаў*.

ЛЕЖÁНДРА ФУ́НКЦЫІ — функцыі, якія з'яўляюцца развязкамі дыферэнцыяльнага раўнання Лежандра

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + \left(\nu(\nu+1) - \frac{\mu^2}{1-x^2}\right)y = 0 \quad (1)$$

пры адвольных рэчаісных ліках ν і μ. Калі $\mu = 0$, а $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, то абмежаваныя на адрэзку $[-1, 1]$ развязкі раўнання (1) называюцца *Лежандра мнагаскладамі*.

ЛЕКСІКАГРАФІ́ЧНЫ ПАРÁДАК — найбольш пашыраны спосаб увядзення парадку на мностве $x_1 \times x_2 \times \ldots \times x_n$, $n > 1$, дзе $x_1, \ldots, x_n$ — упарадкаваныя мноствы. Лічыцца, што $(x_1, x_2, \ldots, x_n) < (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, калі і толькі калі $x_1 < y_1$ або $x_1 = y_1, \ldots, x_k = y_k$ і $x_{k+1} < y_{k+1}$ для нейкага k, $1 \le k \le n-1$. Такі парадак, як правіла, бярэ ў спадчыну большасць асноўных якасцяў парадкаў на мноствах x_i. Напрыклад, калі ўсе x_i цалкам (ці лінейна) упарадкаваныя, то і $x_1 \times x_2 \times \ldots \times x_n$ будзе цалкам (лінейна) упарадкаваным.

ЛЁМА (ад грэц. lemma — дапушчэнне, меркаванне) — дапаможнае сцверджанне, якое ўжываецца для доказу тэарэм ці іншых сцверджанняў. Тэрмін Л. уведзены старажытнагрэцкімі геометрамі, асабліва часта сустракаецца ў Архімеда.

ЛЕМНІСКÁТА (ад. лац. lemniscata — упрыгожаная стужкамі) — мноства пунктаў плоскасці, здабытак адлегласцяў якіх ад n зададзеных пунктаў (фокусаў) ёсць сталы лік. Л. — алгебраічная крывая парадку $2n$. Калі $n = 1$, то маем акружыну, калі $n = 2$, атрымліваецца *Касіні авал*, прыватны выпадак якога — *Бэрнулі лемніската*.

ЛЁПІТÁЛЯ ПРÁВІЛА — правіла, паводле якога вылічэнне ліміту дзелі функцый (пры наяўнасці нявызначанасцяў выгляду 0/0, ∞/∞) зводзіцца да вылічэння ліміту дзелі іх вытворных. Сутнасць Л.п. у наступным. Няхай рэчаіснзначныя функцыі f і g вызначаныя і дыферэнцавальныя на нейкім інтэрвале (a, b) і $g'(x) \neq 0$ для ўсіх $x \in (a, b)$. Калі

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a+0} g(x) = 0$$

або

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a+0} g(x) = \infty$$

і існуе концы або бясконцы ліміт дзелі вытворных

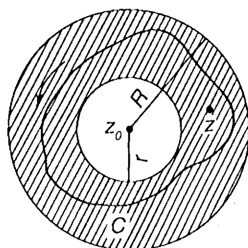
$$\lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

то існуе ліміт дзелі гэтых функцый і праўдзіцца роўнасць

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Гэтае правіла з відавочнымі зменамі застаецца справядлівым у выпадках левабаковага, двухбаковага лімітаў, а таксама калі $x \to +\infty$ або $x \to -\infty$. Пры раскрыцці нявызначанасці Л.п. часам даводзіцца ўжываць некалькі разоў. Л.п. знайшоў Ё.Бэрнулі і паведаміў пра гэта Г.Лёпіталю, які надрукаваў правіла ў 1696 г.

ЛЁРÁНА ШЭРАГ — функцыйны шэраг выгляду $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, дзе z_0 — фіксаваны пункт камплекснай плоскасці **C**, $a_n \in$ **C**. Сукупнасць складнікаў з неадмоўнымі ступенямі ўтварае звычайны ступеневы шэраг, які збягаецца ў нейкім крузе радыуса R. Складнікі з адмоўнымі ступенямі ўтвараюць шэраг, які збягаецца звонку круга радыуса r. Калі $r < R$, то Л.ш. збягаецца ў кольцы



$r < |z - z_0| < R$ (рыс.) да функцыі $f(z)$, аналітычнай у гэтым кольцы, і

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz,\quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

дзе Γ — адвольны замкнёны контур унутры кольца, арыентаваны супраць гадзіннікавай стрэлкі. Па выглядзе раскладу функцый у Л.ш. можна вызначыць характар яе асаблівых пунктаў. Шэрагі носяць імя П.Лёрана, які ў 1843 г. даказаў, што кожную функцыю камплекснай зменнай, аднназначную і аналітычную ў кольцы $r < |z - z_0| < R$, можна раскласці ў гэтым кольцы ў Л.ш.

ЛЁРЭНЦА ГРУ́ПА — мноства пераўтварэнняў чатырохмернай псеўдаэўклідавай *Мінкоўскага прасторы*, якія захоўваюць пачатак каардынат і прасторава-часавы інтэрвал, г.зн. квадратовую форму $ds^2 = -c^2(dt)^2 + (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$. Л.г. — аналаг артаганальных пераўтварэнняў эўклідавай прасторы, але яна мае больш складаную будову: Л.г. складаецца з 4 злучных кампанентаў, яна некампактная. *Лёрэнца пераўтварэнні* — элементы Л.г.

ЛЁРЭНЦА ПЕРАЎТВАРЭ́ННІ — пераўтварэнні, якія даюць сувязь паміж каардынатамі дзвюх інерцыйных сістэм адліку ў *спецыяльнай тэорыі рэлятыўнасці*. Калі сістэма (x, y, z, t) рухаецца з нязменнай хуткасцю V паралельна восі x' сістэмы (x', y', z', t'), Л.п. маюць выгляд

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},\quad y = y',\quad z = z',\quad t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Увёў Г.Лёрэнц.

ЛІ А́ЛГЕБРА над полем K — вектарная прастора G над полем K, у якой зададзеная бінарная аперацыя $(x, y) \to [x, y]$, што адпавядае наступным аксіёмам: 1) $[\lambda x + \mu y, z] = \lambda\,[x, z] + \mu\,[y, z]$; 2) $[x, x] = 0$ пры $x \in G$; 3) $[x, [y, z]\,] + [y, [z, x]\,] + [z, [x, y]\,] = 0$, дзе $\lambda, \mu \in K$, $x, y, z \in G$. Аксіёма 3) называецца тоеснасцю Якобі. Прыклады: 1) G — трохмерная эўклідава прастора, $[x, y]$ — вектарны здабытак вектараў x і y; 2) асацыятыўная алгебра A з новай аперацыяй $[a, b] = ab - ba$ пераўтвараецца ў Л.а.; 3) вектарныя палі на гладкай мнагастайнасці з аперацыяй дужка Пуасона ёсць Л.а.

Л.а. былі ўведзеныя С.Лі ў сувязі са створанай ім тэорыяй *Лі групаў*. Ён супаставіў кожнай групе Лі адпаведную Л.а. так, што амаль усе якасці групы знаходзяць адлюстраванне ў якасцях яе Л.а. Так, гомамарфізму групаў адпавядае гомамарфізм іх Л.а., замкнёнай падгрупе — падалгебра, нармальнай замкнёнай падгрупе — ідэал яе Л.а. і г.д. Такім чынам, вывучэнне групы Лі ў значнай ступені зводзіцца да вывучэння яе Л.а., што звычайна зрабіць нашмат прасцей. Першапачаткова вывучаліся ў асноўным канцамерныя Л.а. над палямі R і C. З узнікненнем тэорыі алгебраічных групаў, дзе таксама ёсць сувязь група — яе Л.а., пачалі вывучаць Л.а. над адвольным полем. Апошнім часам у звязку з некаторымі задачамі матэматычнай фізікі актыўна вывучаюцца бясконцамерныя Л.а. і гэтак званыя супералгебры. Тэорыя Л.а. надзвычай багатая і глыбока распрацаваная, яна мае шматлікія дастасаванні — ад тэорыі лікаў да фізікі мікрасусвету і касмагоніі.

ЛІ ГРУ́ПА — *група*, якая з'яўляецца аналітычнай *мнагастайнасцю* і аперацыі якой задаюцца ў каардынатах *аналітычнымі функцыямі*. Л.г. ёсць, напрыклад, кожная алгебраічная падгрупа групы *аўтамарфізмаў* прастораў $\mathbf{R}^n$ ці $\mathbf{C}^n$. Л.г. маюць шмат дастасаванняў. Так, яшчэ С.Лі заўважыў, што дыферэнцыяльнае раўнанне, інварыянтнае ў дачыненні дастаткова вялікай развязальнай Л.г., інтэгруецца ў квадратурах. Названая ў гонар нарвежскага матэматыка С.Лі, які пачаў даследаваць іх з 1876 г. Гл. *Лі алгебра*.

ЛІ ПРО́СТАЯ А́ЛГЕБРА — *Лі алгебра*, якая не мае ідэалаў, адрозных ад яе самой і нулявога. Класічны вынік, які мае вялікае значэнне, — класіфікацыя канцамерных Л.п.а. над полем **C**. Такія алгебры падзяляюцца на 4 бясконцыя серыі (класічныя алгебры) і 5 асобных алгебраў памернасцяў 14, 52, 78, 133 і 248. Класіфікацыя Л.п.а. мае шматлікія дастасаванні ў алгебры і матэматычнай фізіцы.

ЛІК — адно з галоўных матэматычных паняццяў. Паняцце натуральнага Л. было выклікана патрэбамі пераліку прадметаў і ўзнікла яшчэ ў дагістарычныя часы. Крыніцай узнікнення паняцця абстрактнага Л. з'явілася прымітыўнае лічэнне прадметаў. Буйным крокам наперад было вынаходніцтва індыйцамі сучаснай пазіцыйнай сістэмы злічэння, выкарыстоўваючы якую можна ўсякі натуральны Л. запісаць з дапамогай дзесяці знакаў — *лічбаў*.

Гістарычна першым пашырэннем паняцця Л. з'явілася далучэнне да натуральных Л. дробавых Л., увядзенне якіх звязана з патрэбамі праводзіць вымярэнні. Далейшыя пашырэнні паняц-

ця Л. абумоўленыя ўжо не толькі патрэбамі практыкі, але і вынікамі развіцця матэматыкі. Уврадзенне а д м о ў н ы х Л. было выклікана развіццём алгебры як навукі. Л. цэлыя і дробавыя (дадатныя і адмоўныя) атрымалі агульны назоў *рацыянальных лікаў*. Сума, рознасць, здабытак і дзель (акрамя дзелі пры дзяленні на нуль, якое не мае сэнсу) усякіх двух рацыянальных Л. ёсць таксама рацыянальны Л. Для вывучэння велічыняў, якія непарыўна змяняюцца, спатрэбілася новае пашырэнне Л., пераход да мноства р э ч а і с н ы х Л. Для гэтага да мноства рацыянальных Л. далучаюцца гэтак званыя і р а ц ы я н а л ь н ы я Л. Яшчэ ў старажытнай Грэцыі ў геаметрыі быў адкрыты факт, што не ўсялякія дакладна зададзеныя адрэзкі сувымерныя, напрыклад старана квадрата і яго дыяганаль. Фактычна гэта адпавядае доказу ірацыянальнасці Л. $\sqrt{2}$. Крыніцай узнікнення к а м п л е к с н ы х Л. з'явілася развіццё алгебры. Ідэя камплекснага Л. узнікла ўпершыню ў 16 ст. у працах Дж. Кардана, Р.Бамбелі ў сувязі з развязаннем раўнанняў 2, 3 і 4-й ступеняў. Сукупнасць усіх камплексных Л. валодае, як і сукупнасць рэчаісных і рацыянальных Л., уласцівасцю замкнёнасці ў дачыненні да дзеянняў складання, адымання, множання і дзялення. Больш таго, сукупнасць усіх камплексных Л. валодае ўласцівасцю алгебраічнай замкнёнасці, якая палягае ў тым, што кожнае алгебраічнае раўнанне з камплекснымі каэфіцыентамі мае карані зноў сярод камплексных Л. Сукупнасць рэчаісных і рацыянальных Л. гэтай уласцівасцю не валодае.

Нароўні з асноўнай лініяй развіцця паняцця Л. (натуральныя Л. → рацыянальныя Л. → рэчаісныя Л. → камплексныя Л.) спецыфічныя патрэбы некаторых раздзелаў матэматыкі выклікалі розныя абагульненні паняцця Л. у істотна іншых кірунках. У раздзелах матэматыкі, звязаных з тэорыяй мностваў, важная роля адводзіцца паняццям колькасных і парадкавых т р а н с ф і н і т н ы х Л. У сучаснай тэорыі Л. атрымалі вялікае значэнне гэтак званыя p - а д ы ч н ы я Л., якія атрымліваюцца з рацыянальных Л. папаўненнем па неархімедавай метрыцы.

ЛІК e — лік, роўны ліміту паслядоўнасці $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ пры неабмежаваным нарастанні n. Шматлікія дастасаванні Л. e заснаваныя на найбольш простым запісе паказнікавых і лагарыфмічных функцый, калі за аснову ўзяць Л. e. Трансцэндэнтнасць Л. e даказаў Ш.Эрміт (1873), $e \approx$ $\approx 2{,}718281828459045...$.

ЛІК π — тое, што *Пі*.

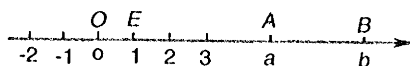
ЛІКАВАЯ ВОСЬ — тое, што *лікавая простая*.

ЛІКАВАЯ ПАСЛЯДОЎНАСЦЬ — адлюстраванне f: $\mathbf{N} \to \mathbf{R}$ (рэчаісная Л.п.) або f: $\mathbf{N} \to \mathbf{C}$ (камплексная Л.п.), дзе $\mathbf{N}$ — мноства ўсіх натуральных лікаў, абазначаецца $x_n = f(n)$. Л.п. запісваюць таксама ў наступных формах: $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$, $(x_n\colon n\in\mathbf{N})$ або $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Л.п. называюць а б м е ж а в а н а й, калі мноства яе элементаў $\{x_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ абмежаванае. Л.п. $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называецца м а н а т о н н а й, калі $\forall m, n\in\mathbf{N}$ выконваецца, прынамсі, адна з наступных чатырох умоваў:

$n > m \Rightarrow x_n > x_m$ (н а р а с т а л ь н а с ц ь),
$n > m \Rightarrow x_n \geq x_m$ (н е с п а д а л ь н а с ц ь),
$n > m \Rightarrow x_n < x_m$ (с п а д а л ь н а с ц ь),
$n > m \Rightarrow x_n \leq x_m$ (н е н а р а с т а л ь н а с ц ь).

Кожная Л.п. складаецца са злічальнага мноства элементаў, якое можа быць канцом, ці наогул з аднаго ліку, напрыклад $x_n = a$, $n = 1, 2, ...$.

ЛІКАВАЯ ПРОСТАЯ, л і к а в а я в о с ь — простая, на якой выяўляюцца рэчаісныя лікі. На простай выбіраюцца два розныя пункты O і E (гл. рыс.). Пункт O называецца п а ч а т к а м а д л і к у, пункт E — а д з і н к а в ы м п у н к т а м, адрэзак OE — м а ш т а б н ы м або а д з і н к а в ы м а д р э з к а м, кірунак ад O да E — д а д а т н ы м к і р у н к а м, ад E да O — а д м о ў н ы м к і р у н к а м.



Калі A і B — два розныя пункты Л.п. і кірунак ад A да B дадатны, то кажуць, што пункт B ляжыць з правага боку ад пункта A, а пункт A — з левага боку ад B. Даўжыня адрэзка OE прымаецца за а д з і н к у в ы м я р э н н я даўжыняў усіх адрэзкаў Л.п.

Кожны рэчаісны лік паказваецца пунктам Л.п.: дадатны лік a — пунктам A, які ляжыць справа ад пункта O, і такім, што даўжыня адрэзка OA роўная a; адмоўны лік $-a$ — пунктам A, які ляжыць злева ад пункта O, і такім, што даўжыня адрэзка OA роўная a; лік нуль — пунктам O. Гэтым задаецца ўзаемна адназначная адпаведнасць паміж мноствам рэчаісных лікаў і мноствам пунктаў Л.п. Таму часта паняцці «лік» і «пункт» не адрозніваюць. Калі пункт A — вобраз ліку a, то лік a называецца д э к а р т а в а й к а а р д ы н а т а й або проста к а а р д ы н а т а й п у н к т а A. Як правіла, пункт A абазначаюць яго каардынатай (на-

прыклад, пункт E абазначаюць лічбай 1). Пры такіх абазначэннях геаметрычная ілюстрацыя рэчаісных лікаў з дапамогай пунктаў Л.п. найбольш зручная. Напрыклад, адлегласць паміж пунктамі O і a роўная $|a|$, даўжыня адрэзка $[a; b]$ роўная $b - a$, сярэдзінай адрэзка $[a, b]$ ёсць пункт $\frac{a+b}{2}$. Мноства рэчаісных лікаў і Л.п. абазначаюцца адной і той жа літарай **R**.

ЛІ́КАЎ ТЭО́РЫЯ — раздзел *матэматыкі*, у якім вывучаюцца колькасныя, якасныя і структурныя ўласцівасці цэлых лікаў, а таксама іх шматлікіх абагульненняў: рацыянальных, алгебраічных, p-адычных лікаў (гл. *Алгебраічны лік, Рацыянальны лік, Лік*) і г.д. Цэлыя лікі, вядомыя са старажытнасці, — адна з самых першых і глыбокіх матэматычных абстракцый.

Яшчэ ў антычныя часы ў Л.т. было атрымана некалькі важных вынікаў: даказана бясконцасць мноства простых лікаў (Эўклід); складзены табліцы простых лікаў з дапамогай *Эратасфена рэшата*; знойдзены алгарытмы для развязку дыяфантавых раўнанняў выгляду $ax + by = c$ і $x^2 + y^2 = z^2$ (Піфагор, Эўклід). Значны ўклад у станаўленне Л.т. як навукі зрабілі П.Фэрма і Л.Ойлер. Не вельмі складанымі, але арыгінальнымі метадамі яны даказалі прынцыповыя тэарэмы: *Фэрма малую тэарэму, Ойлера тэарэму. Фэрма вялікая тэарэма* аказала значны ўплыў на развіццё *алгебраічнай тэорыі лікаў* і *дыяфантавых раўнанняў*. Тоеснасць Ойлера

$$\prod_p (1 - p^{-s})^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s},\ s > 1,$$

складае аснову тэорыі Рымана *дзэта-функцыі*. Вялікае значэнне для станаўлення Л.т. мелі працы Ф.Гаўса. Ён распрацаваў тэорыю *параўнанняў*, якая прывяла да грунтоўных у Л.т. паняццяў *характару* і *трыганаметрычнай сумы*. Пры вывучэнні *квадратовых рэштаў* і *нярэштаў* Ф.Гаўс даказаў гэтак званы квадратовы закон узаемнасці. Матэматычна глыбокім метадам П.Дырыхле даказаў, што ў кожнай прагрэсіі выгляду $nk + l$, $n = 0, 1, 2, ...$, дзе k і l узаемна простыя, змяшчаецца бясконцасць простых лікаў. Для доказу былі ўведзены гэтак званыя *Дырыхле характары*, якія маюць прынцыповае значэнне і ў іншых раздзелах матэматыкі (алгебры, тапалогіі і інш.). Цэлы шэраг праблем узнік у Л.т. пасля прац П.Чабышова, што датычаць асімптатычнага размеркавання *простых лікаў*. Амаль тым жа часам Ж.Ліўвіль даў доказ існавання *трансцэндэнтных лікаў* на падставе тэорыі *дыяфантавых набліжанняў*, якая ў сваю чаргу прывяла да значных вынікаў у дыяфантавых раўнаннях. Праблемы цэлых пунктаў у абсягах, якія маюць шматлікія дастасаванні, атрымалі развіццё ў працах Г.Варанога. Тады ж Д.Гільбэрт даказаў *Варынга праблему*. Важкі ўклад у развіццё Л.т. зрабіў І.Вінаградаў. З дапамогай распрацаванага ім метаду *трыганаметрычных сумаў* была даказаная *Гольдбаха праблема*, значна палепшаны вынікі ў Варынга праблеме і ў размеркаванні простых лікаў. А.Гельфанду і незалежна ад яго Т.Шнайдэру ўдалося атрымаць доказ сёмай праблемы Гільбэрта.

Сучасная Л.т. дасягнула значных поспехаў у тэарэтычных пытаннях і шматлікіх дастасаваннях: тэорыі дыяфантавых набліжанняў (Ф.Рот, В.Шміт), тэорыі трансцэндэнтных лікаў (А.Бэйкер), алгебраічнай тэорыі лікаў (Г.Фальцінгс). Беларускія матэматыкі, школу якіх стварыў акад. У.Спрынджук і якія працуюць у Л.т., распрацавалі агульныя метады тэорыі дыяфантавых набліжанняў і дыяфантавых раўнанняў. Шмат зроблена ў даследаваннях па тэорыі трансцэндэнтных лікаў, дзе даказаныя вядомыя праблемы Малера (У.Спрынджук, 1964) і Бэйкера—Шміта (В.Бернік, 1983). Выдадзена пяць манаграфій (чатыры перакладзеныя за мяжою).

ЛІМІ́Т — адно з базавых паняццяў матэматыкі. Сутнасць Л. палягае ў тым, што некаторая зменная, залежная ад іншай зменнай, пры пэўным змяненні апошняй адвольна блізка набліжаецца да пэўнай канстанты. Паняцце блізкасці ў вызначаным сэнсе асноўнае пры азначэнні Л. У залежнасці ад таго, у якіх прасторах яно ўводзіцца, паняцце Л. набывае канкрэтны сэнс. Аперацыя знаходжання Л. называецца л і м і т а в а н н е м. Адзін з найбольш простых канкрэтных выпадкаў Л. — *ліміт паслядоўнасці*. Дастаткова агульнае паняцце — *ліміт функцыі*. Аднак яно не абымае ўсе наяўныя ў сучаснай матэматыцы паняцці Л. Напрыклад, паняцце Л. інтэгральных сумаў (гл. *Інтэграванне*) не змяшчаецца ў паняцці Л. функцыі.

На паняцці Л. грунтуюцца асноўныя паняцці матэматычнага аналізу: *непарыўнасць, вытворная, дыферэнцыял, інтэграл*.

ЛІМІ́Т ПАСЛЯДО́ЎНАСЦІ — азначаецца для паслядоўнасці $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ элементаў x_n тапалагічнай прасторы X пры $n \to \infty$. Кажуць, што паслядоўнасць $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ з б я г а е ц ц а д а с в а й г о л і м і т у $a \in X$, і пішуць $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, калі для кожнай

акругі $U(a)$ элемента a існуе нумар $N_U \in \mathbf{N}$ такі, што для ўсіх $n \geq N_U$ выконваецца $x_n \in U(a)$. Агульныя ўласцівасці Л.п. гл. у арт. *Ліміт функцыі.*

Збежнасць лікавай паслядоўнасці да ліку a можна азначыць наступным чынам:

$$(\lim_{n\to\infty} x_n = a) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbf{N}\ \forall n \geq n_\varepsilon : |x_n - a| \leq \varepsilon).$$

Справядлівы крытэр Кашы: лікавая паслядоўнасць $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ збягаецца (г.зн. яе ліміт існуе і з'яўляецца нейкім лікам), калі і толькі калі $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon \in \mathbf{N}\ \forall\ n,\ m \geq n_\varepsilon : |x_m - x_n| \leq \varepsilon$. У кожнай абмежаванай паслядоўнасці $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ існуе збежная паслядоўнасць $(x_{n_k})_{n=1}^{\infty}$ (тэарэма Бальцана—Ваерштраса). Паняцце бясконцага Л.п. азначаецца наступным чынам:

$$(\lim_{n\to\infty} x_n = \infty) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall E > 0\ \exists n_E \in \mathbf{N}\ \forall n \geq n_E : |x_n| \geq E). \quad (1)$$

Тады тэарэма Бальцана—Ваерштраса можа быць сфармуляваная так: у кожнай лікавай паслядоўнасці $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ існуе падпаслядоўнасць $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, якая мае ліміт (концы або бясконцы). Для рэчаісных лікавых паслядоўнасцяў, акрамя бяконца вялікіх у сэнсе азначэння (1), існуюць дадатныя і адмоўныя бясконца вялікія паслядоўнасці, якія адпаведна азначаюцца наступным чынам:

$$(\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall E > 0\ \exists n_E \in \mathbf{N}\ \forall n \geq n_E : x_n \geq E),$$

$$(\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall E > 0\ \exists n_E \in \mathbf{N}\ \forall n \geq n_E : x_n \leq -E).$$

Толькі для рэчаісных лікавых паслядоўнасцяў маюць сэнс уласцівасці, звязаныя з няроўнасцямі. Напрыклад, калі $\square n \in N$ выконваюцца няроўнасці $x_n \leq y_n \leq z_n$ і $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a$, то $\exists \lim_{n\to\infty} y_n = a$. У кожнай манатоннай паслядоўнасці існуе ліміт. Класічны прыклад дастасавання гэтай тэарэмы — доказ існавання ліку $e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

ЛІМІТ ФУНКЦЫІ — адно з асноўных паняццяў матэматычнага аналізу. Няхай функцыя f: $E \to Y$ зададзеная на мностве E, якое з'яўляецца падмноствам тапалагічнай прасторы X, а мноства яе значэнняў належыць тапалагічнай прасторы Y (дзейнічае ў тапалагічную прастору Y). Будзем лічыць, што пункт $x_0 \in X$ — гэта пункт дотыку мноства E, г.зн. ва ўсякім яго наваколлі змяшчаецца па меншай меры адзін пункт мноства E. Пункт $a \in Y$ называюць Л.ф. f пры $x \to x_0$, калі для ўсякага наваколля V пункта a у прасторы Y існуе такое наваколле U_0 пункта x_0 у прасторы X, што для адвольнага пункта $x \in E \cap U_0$ яго вобраз $f(x)$ належыць V, г.зн. $f(E \cap U_0) \subset V$. Пры гэтым пішуць $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ або $f(x) \to a$ пры $x \to x_0$.

Калі f — рэчаісная функцыя рэчаіснага аргумента, то азначэнне Л.ф. можна сфармуляваць у тэрмінах няроўнасцяў (паводле Кашы): лік a ёсць Л.ф. f: $E \to \mathbf{R}$ пры $x \to x_0$, дзе x_0 — пункт дотыку мноства $E \subset \mathbf{R}$, калі для адвольнага $\varepsilon > 0$ існуе такое $\sigma > 0$, што для ўсіх значэнняў аргумента x, якія належаць E і задавальняюць няроўнасць $|x - x_0| < \sigma$, выконваецца няроўнасць $|f(x) - a| < \varepsilon$. Існаванне ліміту $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty$ азначае, што для кожнага $\varepsilon > 0$ існуе такое $\sigma > 0$, што для ўсіх $x \in E$, якія задавальняюць няроўнасць $x > \sigma$, выконваецца $|f(x)| > \varepsilon$. Азначэнне ліміту функцыі ў тэрмінах паслядоўнасцяў (паводле Гайнэ) наступнае: функцыя f мае ў пункце x_0 (на бясконцасці) концы ліміт a_0 (бясконцы ліміт), калі і толькі калі для адвольнай паслядоўнасці $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ аргументаў, якая мае лімітам пункт x_0, адпаведная паслядоўнасць $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ значэнняў функцыі збягаецца да a (ёсць бясконца вялікая). У пэўным пункце x_0 функцыя можа мець толькі адзін ліміт.

Калі $f(x)$ мае бясконцы ліміт у пункце (на бясконцасці), яе называюць бясконца вялікай у гэтым пункце (на бясконцасці).

Мае месца крытэр Кашы існавання концага Л.ф.: функцыя f: $E \to \mathbf{R}, E \subset \mathbf{R}^n$ мае ў пункце x_0 концы ліміт, калі для адвольнага $\varepsilon > 0$ інуе такое наваколле U пункта x_0, што для ўсіх $x_1 \in E \cap U$ і $x_2 \in E \cap U$ выконваецца няроўнасць $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Калі існуюць концыя ліміты $\lim_{x\to x_0} f(x)$ і $\lim_{x\to x_0} g(x)$, то праўдзяцца наступныя сцверджанні:

1) для адвольных лікаў λ і μ існуе ліміт лінейнай камбінацыі гэтых функцый, прычым

$$\lim_{x\to x_0}(\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda \lim_{x\to x_0} f(x) + \mu \lim_{x\to x_0} g(x);$$

2) існуе ліміт здабытку гэтых функцый, прычым

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x);$$

3) калі $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$, то існуе ліміт дзелі, прычым

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}.$$

Азначэнне Л.ф. і яго ўласцівасці, пададзеныя для рэчаісных функцый, маюць месца і для камплексназначных функцый камплекснага аргумента.

Асноўны метад знаходжання Л.ф. — метад скасавання галоўных частак функцый у наваколлі зададзенага пункта, што робяць з дапамогай *Тэйлара формулы*. Пры вылічэнні Л.ф., якія прымаюць рэчаісныя значэнні, часта выкарыстоўваюць *Лёпіталя правіла*.

Асаблівую цікавасць пры вывучэнні Л.ф. f: $E \to Y$ пры $x \to x_0$ мае выпадак, калі $x_0 \in E$, наколькі ён прыводзіць да паняцця непарыўнай функцыі. Калі f: $E \to \mathbf{R}$ і $x_0 \in E$, то для таго, каб функцыя f мела ліміт у пункце x_0, неабходна і дастаткова, каб выконвалася роўнасць $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Калі гэтая ўмова мае месца, функцыя f называецца н е п а р ы ў н а й у п у н к ц е x_0. Пададзеная роўнасць заўсёды выконваецца, калі x_0 — ізаляваны пункт мноства E. Таму паняцце Л.ф. і, у прыватнасці, яе непарыўнасці змястоўнае толькі ў выпадку, калі x_0 — лімітавы пункт мноства, на якім зададзеная функцыя.

ЛІМІТАВЫ ПУНКТ м н о с т в а M — пункт x тапалагічнай прасторы $X \supset M$, ва ўсякім наваколлі якога змяшчаецца хоць бы адзін пункт мноства M, які адрозніваецца ад x. Мноства, якое змяшчае ўсе свае Л.п., называецца з а м к н ё н ы м. Сукупнасць усіх Л.п. мноства M называецца в ы т в о р н ы м м н о с т в а м і абазначаецца M'. Калі тапалагічная прастора X задавальняе першую аксіёму аддзяляльнасці (г.зн. для ўсіх яе пунктаў x і y існуе наваколле $V(x)$, якое не змяшчае y), то ў кожным наваколлі Л.п. мноства $M \subset X$ знаходзіцца бясконца шмат пунктаў мноства M, і вытворнае мноства M' замкнёнае. Усякі *дотыку пункт* мноства з'яўляецца яго Л.п. або *ізаляваным пунктам*.

ЛІМІТАВЫ ЦЫКЛ — замкнёная траекторыя ў фазавай прасторы аўтаномнай сістэмы звычайных дыферэнцыяльных раўнанняў, якая ёсць лімітавае мноства хоць бы для адной іншай траекторыі гэтай сістэмы. Л.ц. называецца а р б і т а л ь н а ў с т о й л і в ы м, калі для кожнага $\varepsilon > 0$ знойдзецца $\sigma > 0$, што ўсе траекторыі, якія пачынаюцца ў σ-акрузе Л.ц. пры $t = 0$, не выходзяць з яго σ-акругі пры $t > 0$. Л.ц. адпавядае перыдычны развязак, адрозны ад сталага. З гледзішча фізікі Л.ц. адпавядае перыядычны рэжым або аўтавагание сістэмы. Для адшукання Л.ц. няма рэгулярных метадаў. У найбольш вывучаным выпадку для сістэм 2-га парадку скарыстоўваецца п р ы н ц ы п к о л ц а Б е н д ы к с о н а: калі вектарнае поле сістэмы накіраванае ўнутр (вонкі) кольцападобнага абсягу G і ў G няма асаблівых пунктаў, то ў G ёсць хоць адзін устойлівы (няўстойлівы) Л.ц.

ЛІМІТАВЫЯ ТЭАРЭ́МЫ т э о р ы і і м а в е р н а с ц я ў — агульны назоў шэрагу тэарэм тэорыі імавернасцяў, якія аналізуюць устойлівыя законы ў выніку ўздзеяння вялікай колькасці выпадковых з'яваў. Л.т. з'яўляюцца *Бэрнулі тэарэма*, *Лапляса тэарэма*, *Пуасона тэарэма*. Усе названыя тэарэмы можна разглядаць як прыватныя выпадкі Л.т. пра сумы незалежных выпадковых велічыняў *вялікіх лікаў закону* і *цэнтральнай лімітавай тэарэмы*.

ЛІНДЭМАНА ТЭАРЭ́МА: пры адвольным алгебраічным $\alpha \neq 0$ лік e^{α} трансцэндэнтны. Наколькі $e^{-i\pi} = 1$, то лік π трансцэндэнтны. Гэтым сама Ф. Ліндэман (1882) даў адмоўны адказ у праблеме квадратуры круга. Часам Л.т. называюць і больш агульны факт (т э а р э м а Л і н д э м а н а — В а е р ш т р а с а): няхай $b_1, ..., b_m$ — алгебраічныя лікі, не ўсе роўныя нулю, і $\alpha_1, ..., \alpha_m$ — парамі розныя алгебраічныя лікі, тады $b_1 e^{\alpha_1} + ... + b_m e^{\alpha_m} \neq 0$. З Л.т. можна атрымаць трансцэндэнтнасць значэнняў функцый $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$ пры алгебраічным $z \neq 0$ і значэнняў $\ln z$ пры алгебраічным $z \neq 0, 1$.

ЛІНЕ́ІСТАЯ ГЕАМЕ́ТРЫЯ — раздзел *геаметрыі*, у якім элементамі прастораў з'яўляюцца простыя лініі. Няхай простая ў прасторы задаецца з дапамогай раўнанняў $x = az + p$, $y = bz + q$. Калі каэфіцыенты a, b, p, q лічыць каардынатамі простай, то яны, увогуле кажучы, могуць залежаць ад аднаго, двух або трох параметраў. Адпаведныя гэтым выпадкам сукупнасці простых ствараюць *лінеістыя паверхні*, к а н г р у э н ц ы і і к о м п л е к с ы п р о с т ы х. Іх вывучае Л.г.

ЛІНЕ́ІСТАЯ ПАВЕ́РХНЯ — паверхня, якая ўтвараецца сукупнасцю простых, залежных ад аднаго параметра. Л.п. можна атрымаць рухам простай (у т в а р а л ь н а й) па якой-небудзь лініі (к і р о ў н а й). Прыклад Л.п. — аднапаласцевы гіпербалоід. Л.п. знаходзіць дастасаванне ў тэхніцы (вядомая радыёмачта сістэмы У.Шухава ў Маскве), тэорыі механізмаў.

ЛІНЕ́ЙНА ЎПАРА́ДКАВАНАЕ МНО́СТВА, л а н ц у г — мноства A, на якім вызначана *парадку дачыненне*, г.зн. для кожных элементаў a, $b \in A$ адзін з іх большы за другі або адзін з іх ідзе за другім. Найважнейшы тып Л.ў.м. — *цалкам упарадкаванае мноства*.

ЛІНЕ́ЙНАЕ АДЛЮСТРАВА́ННЕ — адлюстраванне A вектарнай прасторы L у вектарную

прастору M, якое задавальняе ўмовы $A(x+y)=$ $=A(x)+A(y)$ і $A(\alpha x)=\alpha A(x)$, дзе x, y — вектары з прасторы L, α — скаляр з поля K, над якім разглядаюцца прасторы L і M. Л.а. называюць таксама лінейным аператарам або гомамарфізмам прасторы L у прастору M, Л.а. прасторы L у сябе называюць лінейным пераўтварэннем.

Прыклады Л.а.: 1) нулявое Л.а., якое кожнаму вектару з L ставіць у адпаведнасць нулявы вектар з M; 2) артаганальнае праектаванне n-мернай эўклідавай прасторы на адвольную простую ў ёй.

На мностве Л.а. прасторы L у M можна задаць суму $A+B$ Л.а. $A, B: (A+B)x=Ax+Bx$ і здабытак Л.а. і адвольнага элемента α з поля K: $(\alpha A)x=$ $=\alpha(Ax)$. Мноства ўсіх Л.а. з L у M стварае вектарную прастору над полем K у дачыненні да ўведзеных аперацый.

Няхай $A: L\to M$ — нейкае Л.а. Мноства вектараў з M выгляду Ax ёсць падпрастора прасторы M, якую называюць вобразам Л.а. і абазначаюць $A(L)$ ці $\operatorname{Im} A$. Мноства вектараў з L, вобразам якіх з'яўляецца нулявы вектар, называецца ядром Л.а. A і абазначаецца $\operatorname{Ker}A$. Памернасць вобраза Л.а. A называецца рангам Л.а., а памернасць ядра — яго дэфектам. Для адвольнага Л.а. канцамернай вектарнай прасторы L сума яго рангу і дэфекта роўная памернасці L. Біектыўнае Л.а. $A: L\to M$ называецца ізамарфізмам прасторы L на M. Л.а. — ізамарфізм, калі і толькі калі яго ранг роўны памернасці прасторы M, а дэфект роўны нулю. Калі Л.а. — ізамарфізм, то адваротнае да яго адлюстраванне ёсць таксама Л.а.

Калі $A: L\to M$ — Л.а. эўклідавых прастораў, то Л.а. $A^*: M\to L$ называецца спалучаным адлюстраванню A, калі роўныя скалярныя здабыткі $(Ax, y)=(x, A^*y)$ для адвольных x з L і y з M. Кожнае Л.а. канцамерных эўклідавых прастораў мае спалучэнне, якое адназначна вызначаецца.

ЛІНЕЙНАЕ ДЫФЕРЭНЦЫЯЛЬНАЕ РАЎНАННЕ звычайнае — скалярнае дыферэнцыяльнае раўнанне выгляду

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=f(x), \quad (1)$$

дзе $y=y(x)$ — шуканая функцыя, а $y^{(i)}$ — яе i-я вытворная, $i=\overline{1,n}$; каэфіцыенты $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ і вольны складнік $f(x)$ — зададзеныя і непарыўныя на нейкім інтэрвале I рэчаіснай восі функцыі. Калі $f(x)\equiv 0$ на I, то раўнанне (1) называецца аднародным (на I), у процілеглым выпадку — неаднародным. Лік n называецца парадкам раўнання (1).

Л.д.р. маюць наступныя праблематыку і ўласцівасці: 1) для кожнага ліку $x_0\in I$ і вектара $(y_0, \ldots, y_{n-1})\in\mathbf{C}^n$ можна атрымаць развязак *Кашы задачы* раўнання (1): знайсці такія развязкі $y(x)$, што $y(x_0)=y_0$, $y^1(x_0)=y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}$, прычым яны існуюць на ўсім інтэрвале I і адзіныя; 2) мноства Y развязкаў аднародных Л.д.р. — гэта *лінейная прастора* памернасці n над $\mathbf{C}$ або $\mathbf{R}$. Кожны базіс у прасторы Y называецца фундаментальнай сістэмай развязкаў Л.д.р. Крытэр Вроньскага: развязкі $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$ аднароднага раўнання з'яўляюцца фундаментальнай сістэмай развязкаў, калі і толькі калі вызначнік Вроньскага (*враньскіян функцый*)

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

адрозны ад нуля ў якім-небудзь пункце інтэрвала I. Агульны развязак $y_0(c_1, \ldots, c_n)$ раўнання (1) задаецца формулай $y_0=c_1y_1(x)+\ldots+c_ny_n(x)$, дзе c_i, $i=\overline{1,n}$ — адвольныя сталыя; 3) няхай каэфіцыенты аднароднага раўнання сталыя: $p_i(x)=$ $=p_i\in C$, $i=\overline{1,n}$, і няхай $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ — карані кратнасці $n_1, \ldots, n_k$ адпаведна алгебраічнага раўнання n-га парадку $\lambda^n+\lambda^{n-1}p_1+\ldots+p_{n-1}\lambda+p_n=0$ (характарыстычнага раўнання са сталымі каэфіцыентамі). Кожнаму кораню кратнасці n_i адпавядае набор з n_i лінейна незалежных развязкаў аднароднага раўнання са сталымі каэфіцыентамі: $y_{1i}(x)=e^{\lambda_i x}$, $y_{2i}(x)=xe^{\lambda_i x}, \ldots,$ $y_{n_i i}=x^{n_i-1}e^{\lambda_i x}$, а сям'я $Y=\{y_{ji}(x)\}$: $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,n_i}$, утварае фундаментальную сістэму развязкаў; 4) агульны развязак $y(c_1, \ldots, c_n)$ неаднароднага раўнання (1) ёсць сума яго адвольнага частковага развязку і агульнага развязку адпаведнага аднароднага раўнання. Частковы развязак (1) можна знайсці метадам Лягранжа варыяцыі адвольных сталых або часам метадамі *аперацыйнага злічэння*. Існуюць абагульненні Л.д.р. на матрыцавызначаныя функцыі.

ЛІНЕЙНАЕ ІНТЭГРАЛЬНАЕ РАЎНАННЕ — інтэгральнае раўнанне выгляду

$$A(x)\varphi(x)+\int_D K(x,s)\varphi(s)ds=f(x), \; x\in D,$$

дзе A, K, f — зададзеныя функцыі, D — абсяг эўклідавай прасторы, x, s — пункты D, ds — эле-

мент аб'ёму, φ — шуканая функцыя. Развязаць Л.і.р. — адшукаць такую функцыю φ, каб раўнанне праўдзілася для ўсіх $x \in D$ (ці амаль усіх, калі інтэграл паводле Лебэга).

ЛІНЕЙНАЕ ПЕРАЎТВАРЭННЕ вектарнай прасторы — лінейнае адлюстраванне вектарнай прасторы L у сябе. Адлюстраванне $A: L \to L$ называецца Л.п. L, калі кожнаму вектару з L ставіцца ў адпаведнасць вектар Ax з L і маюць месца ўмовы $A(x+y) = Ax + Ay$ і $A(\alpha x) = \alpha Ax$ для адвольных вектараў x, y з L і адвольнага α з поля K, над якім разглядаецца прастора.

Л.п. з'яўляюцца: 1) нулявое Л.п.; 2) тоеснае пераўтварэнне; 3) дыферэнцаванне ў прасторы паліномаў ступені не вышэй за n. Калі A і B — Л.п. прасторы L, то пераўтварэнні $(A+B)$, (αA), $\alpha \in K$ і (AB), дзе здабытак $(A \cdot B)$ задаецца ўмовай $(A \cdot B)x = A(Bx)$, таксама ёсць Л.п. прасторы L. У дачыненні да гэтых аперацый мноства ўсіх Л.п. прасторы L утварае асацыятыўную алгебру з адзінкай, якой будзе тоеснае пераўтварэнне.

Матрыцай Л.п. $A: L \to L$ у базісе $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ прасторы L называецца матрыца A, j-ы слупок якой складаецца з каардынат вектара Ae_j у выбраным базісе. Тоеснае Л.п. мае ў кожным базісе адзінкавую матрыцу, нулявое Л.п. — нулявую матрыцу. Пры пераходзе да іншага базіса $\{e_1', e_2', ..., e_n'\}$ матрыца A Л.п. A змяняецца падобнай матрыцай $B = B^{-1}AS$, дзе S — матрыца пераходу ад базіса $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ да базіса $\{e_1', e_2', ..., e_n'\}$. Дэтэрмінант матрыцы A называецца дэтэрмінантам Л.п. A. Калі $\det A \neq 0$, то Л.п. A называецца незвыродным, у процілеглым выпадку — звыродным. Калі Л.п. незвыроднае, дык яно — ізамарфізм прасторы L на сябе.

Ненулявы вектар $x \in L$ называецца уласным вектарам Л.п. A, калі існуе такі элемент λ з поля K, што праўдзіцца роўнасць $Ax = \lambda x$. Элемент λ пры гэтым называецца ўласным значэннем Л.п. Элемент $\lambda \in L$ з'яўляецца ўласным значэннем Л.п. A, калі і толькі калі λ ёсць корань характарыстычнага палінома $P(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ матрыцы A Л.п. A у нейкім базісе. Палінам $P(\lambda)$ не залежыць ад выбару базіса, і яго называюць характарыстычным паліномам Л.п. A. Матрыца Л.п. A будзе мець дыяганальны выгляд у нейкім базісе, калі і толькі калі гэты базіс складаецца з уласных вектараў Л.п. A. Калі характарыстычны палінам мае n розных каранёў у полі K, дзе n — памернасць прасторы L, то існуе базіс L, які складаецца з уласных вектараў Л.п. A.

ЛІНЕЙНАЕ ПРАГРАМАВАННЕ — раздзел *матэматычнага праграмавання*, у якім даследуюцца задачы пра экстрэмумы лінейных функцый на мноствах, зададзеных сістэмамі лінейных роўнасцяў і няроўнасцяў. У агульным выпадку задача Л.п. фармулюецца наступным чынам: знайсці максімум лінейнай функцыі

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1}$$

на мностве значэнняў $x_1, ..., x_n$, якія адпавядаюць абмежаванням

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_j, \quad i = \overline{1, m}, \tag{2}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \tag{3}$$

дзе c_j, a_{ij} і b_j — зададзеныя лікі.

Задачы Л.п. ёсць матэматычныя мадэлі шматлікіх задач тэхніка-эканамічнага зместу. Такой з'яўляецца, напрыклад, наступная задача планавання работы прадпрыемства. Прадпрыемства можа выпускаць n відаў прадукцыі; прыбытак ад адзінкі прадукцыі віду j, $j = \overline{1, n}$, ёсць c_j. У вытворчасці выкарыстоўваюцца рэсурсы m відаў. Наяўнасць рэсурсу i, $i = \overline{1, m}$, абмежаваная велічынёй b_i. Расход рэсурсу i на вытворчасць адзінкі прадукцыі віду j складае a_{ij}. Патрабуецца вызначыць вытворчую праграму (г.зн. знайсці аб'ёмы выпуску кожнага з відаў прадукцыі) такім чынам, каб ліміты рэсурсаў не былі перавышаны, а сумарны прыбытак быў максімальны. Фармальны запіс гэтых патрабаванняў прыводзіць да задач (1)—(3). Другі характэрны прыклад дастасоўных задач Л.п. — транспартная задача.

Функцыю (1) у Л.п. прынята называць мэтавай функцыяй (або крытэрам антымальнасці), вектар $x = (x_1, ..., x_n)$, які адпавядае ўмовам (2)—(3), называецца дапушчальным развязкам (або планам), а мноства вектараў x, якое вызначаецца ўмовамі (2)—(3), — дапушчальным мноствам (або мноствам планаў). Дапушчальны развязак, які дае максімум мэтавай функцыі (1), называецца антымальным. Задача знаходжання мінімуму функцыі $\sum_{i=1}^{m} b_i u_i$ пры ўмовах $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i \geq c_j$, $j = \overline{1, n}$, $u_i \geq 0$, $i = \overline{1, m}$, дзе b_i, a_{ij} і c_j — тыя ж, што і ў (1) — (3), называецца дуальнай да задачы (1) — (3), якую называюць прамой. Важны факт у тэорыі Л.п. — тэарэма дуальнасці, якая вызначае роўнасць антымальных значэнняў мэтавых функцый прамой і дуальнай задач.

Адзін з асноўных метадаў развязання задач Л.п. — сімплекс-метад, ідэя якога наступная. Допушчальнае мноства (2)—(3) ёсць выпуклае мнагаграневае мноства (калі яно абмежаванае, то гэта — мнагамерны выпуклы мнагаграннік). Калі задача Л.п. мае развязак, то існуе вяршыня X^* мнагаграневага мноства, якая з'яўляецца аптымальным планам. Сімплекс-метад палягае ў такім накіраваным пераборы вяршыняў, пры якім значэнні мэтавай функцыі нарастаюць ад вяршыні да вяршыні. Кожнай вяршыні адпавядае сістэма раўнанняў, якія выбіраюцца належным чынам з сістэмы няроўнасцяў (2)—(3). Таму вылічальная працэдура сімплекс-метаду палягае ў паслядоўным развязанні сістэм лінейных алгебраічных раўнанняў. Метад зручны для рэалізацыі на камптары, бо алгарытм даволі просты. Гл. таксама *Аперацый даследаванне.*

ЛІНЕЙНАЕ РАЎНА́ННЕ — раўнанне, якое змяшчае невядомыя толькі ў першай ступені. Л.р. з адным невядомым мае выгляд $ax = b$, яго развязкам пры $a \neq 0$ будзе лік b/a. Калі $a = 0$ і $b = 0$, то Л.р. мае бясконцае мноства развязкаў (усякі рэчаісны лік). Калі $a = 0$ і $b \neq 0$, то Л.р. не мае каранёў.

Мноства раўнанняў

$$\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1,$$

$$\alpha_{12}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \ldots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m$$

называецца сістэмай Л.р., калі патрабуецца знайсці сукупнасць значэнняў $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, якая праўдзіць усе гэтыя раўнанні. Сукупнасць $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ з'яўляецца развязкам гэтай сістэмы, калі пасля падстановы ў кожнае з раўнанняў замест невядомых $x_1, \ldots, x_n$ адпаведных лікаў $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ яно ператвараецца ў тоеснасць. Сістэма Л.р. можа мець як адзін развязак (вызначаная сістэма), так і бясконцае мноства развязкаў (нявызначаная сістэма); але сістэма можа і не мець ніводнага развязку (несупольная сістэма). Для развязання сістэм Л.р. з вялікімі m і n распрацаваны розныя метады лікавага (набліжанага) развязання сістэм Л.р.

ЛІНЕ́ЙНАЯ АБАЛО́НКА вектараў — мноства ўсіх лінейных камбінацый вектараў $x_1, x_2, \ldots, x_n$ вектарнай прасторы V над полем K (мноства ўсіх вектараў выгляду $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$, $\alpha_i \in K$). Калі V — трохмерная вектарная прастора над полем рэчаісных лікаў, то Л.а. ненулявога вектара — гэта мноства ўсіх вектараў, што ляжаць на простай, якая задаецца гэтым вектарам. Л.а. двух вектараў, што не ляжаць на адной простай, ёсць мноства ўсіх вектараў, якія ляжаць на плоскасці, зададзенай гэтымі вектарамі. У агульным выпадку Л.а. мноства вектараў M ёсць перасячэнне ўсіх падпрастораў прасторы V, якія змяшчаюць мноства M. Л.а. мноства M таксама называецца падпрасторай, утворанай мноствам M. Яна з'яўляецца падпрасторай найменшага памеру сярод падпрастораў, якія змяшчаюць мноства M.

ЛІНЕ́ЙНАЯ А́ЛГЕБРА — 1) частка *алгебры*, якая вывучае вектарныя (лінейныя) прасторы, лінейныя адлюстраванні (аператары), лінейныя, білінейныя і квадратовыя функцыі (функцыяналы або формы) на вектарных прасторах.

Гістарычна Л.а. пачалася з пабудовы тэорыі лінейных раўнанняў. У сувязі з пытаннямі развязання сістэм узнікла паняцце *вызначніка*, а ў 1750 г. даказана *Крамэра правіла*. Далейшае развіццё вышэй названых тэорый прывяло да матрыц і вызначэння ўмоў супольнасці сістэм лінейных раўнанняў у тэрмінах каэфіцыентаў гэтых сістэм. У 20 ст. цэнтральнае месца ў Л.а. пачалі займаць паняцце *вектарнай прасторы* і звязанае з ім паняцце *лінейнага адлюстравання.*

2) Алгебра над полем — вектарная прастора A над полем, для элементаў якой вызначана бінарная алгебраічная аперацыя (множанне) і якая задавальняе аксіёмы множання ў кольцы. Важнае месца ў сучаснай алгебры займае тэорыя асацыятыўных Л.а., прыкладамі якіх з'яўляюцца поўная матрычная алгебра, алгебры з дзяленнем, групавыя алгебры. З неасацыятыўных Л.а. вядомыя сваімі дастасаваннямі ў квантавай механіцы *ёрданавы алгебры*, у фізіцы і геаметрыі — *Лі алгебры.*

3) Раздзел *вылічальнай матэматыкі*, у якім даследуюцца працэсы лікавага развязання задач Л.а.

Асноўныя задачы лікавых метадаў Л.а. — лікавыя метады развязання сістэм лінейных алгебраічных раўнанняў і задача вызначэння ўласных значэнняў і ўласных вектараў матрыц. Іншыя задачы (абарачэнне матрыц, вылічэнне вызначнікаў, знаходжанне каранёў мнагаскладу), як правіла, маюць дапаможны характар.

Калі метад дазваляе атрымаць развязак задачы шляхам канцага ліку арыфметычных дзеянняў, то яго называюць прамым. У процілеглым выпадку лікавы метад далучаюць да ітэрацый-

ных. Сярод прамых метадаў развязання сістэм алгебраічных раўнанняў вызначаюцца метады скасавання невядомых і метады, заснаваныя на будаванні дапаможных матрыц. На гэтых жа прынцыпах будуюцца прамыя метады развязання задач на ўласныя значэнні. Аднак апошнія не знаходзяць шырокага дастасавання з прычыны лікавай няўстойлівасці.

Ітэрацыйныя метады дазваляюць знайсці развязак задачы ў выглядзе мяжы бясконцай паслядоўнасці вектараў. Працэс, з дапамогай якога знаходзяцца элементы паслядоўнасці, называюць ітэрацыйным.

ЛІНЕЙНАЯ АЛГЕБРАІЧНАЯ ГРУПА — алгебраічная група, ізаморфная падгрупе нейкай поўнай лінейнай групы. Алгебраічная група G лінейная, калі і толькі калі алгебраічная мнагастайнасць групы G афінная. Кожная алгебраічная падгрупа і кожная фактар-група па нармальнай алгебраічнай падгрупе Л.а.г. — гэта таксама Л.а.г.

ЛІНЕЙНАЯ ГРУПА — раздзел агульнай тэорыі групаў, група абарачальных лінейных пераўтварэнняў вектарнай прасторы V памеру n над целам K. Лік n завецца ступенню Л.г. Калі зафіксаваць базіс прасторы V, то Л.г. разглядаецца як матрыцавая група ступені n над целам K. Такім чынам устанаўліваецца ізамарфізм паміж Л.г. і матрыцавымі групамі. Група ўсіх абарачальных пераўтварэнняў прасторы V называецца поўнай Л.г., абазначаецца $GL(V)$. Л.г. — гэта ўсякая падгрупа групы $GL(V)$. Кожную канцую групу можна разглядаць як Л.г. Прыклад Л.г. — класічныя групы. Даследаванні Л.г. пачаліся ў сярэдзіне 19 ст. з вывучэння развязальных Л.г. (праблема развязальнасці алгебраічных раўнанняў у радыкалах; Э.Галуа, М.Жардан). Л.г. маюць вялікае значэнне ў розных галінах матэматыкі, асабліва ў алгебры, тэорыі дыферэнцыяльных раўнанняў, тапалогіі, матэматычнай фізіцы, а таксама ў фізіцы, механіцы і інш. У развіццё Л.г. зрабілі ўклад беларускія вучоныя Дз.Супруненка, У.Платонаў.

ЛІНЕЙНАЯ ЗАЛЕЖНАСЦЬ — тоеснасць выгляду $c_1u_1+c_2u_2+...+c_nu_n = 0$ паміж элементамі u_i, $i = \overline{1, n}$, вектарнай прасторы над полем K, дзе сярод каэфіцыентаў c_i $(i = \overline{1, n}) \in K$ хоць адзін адрозніваецца ад нуля. Напрыклад, можна казаць пра Л.з. паміж вектарамі, функцыямі адной або некалькіх зменных і г.д. Калі паміж элементамі $u_1, u_2, ..., u_n$ існуе Л.з., то кажуць, што яны лінейна залежныя, у процілеглым выпадку іх называюць лінейна незалежнымі.

ЛІНЕЙНАЯ ЗЛУЧНАСЦЬ на гладкай мнагастайнасці M — злучнасць у галоўным пластаванні $B(M)$ базісаў у датычных прасторах T_pM, $p \in M$. Кожная Л.з. на M дазваляе пабудаваць афінную злучнасць на M, а таксама наадварот, пры гэтым існуе біектыўнае адлюстраванне паміж гэтымі класамі. Таму практычна не адрозніваюць паняцці Л.з. і афіннай злучнасці. Існуе шмат спосабаў азначэння Л.з., а таксама шмат яе абагульненняў на вектарныя пластаванні, пластаваныя мнагастайнасці і г.д.

ЛІНЕЙНАЯ ІНТЭРПАЛЯЦЫЯ — спосаб набліжанага вылічэння значэння функцыі $f(x)$, калі вядомыя два яе значэнні $f(x_1)$ і $f(x_2)$ у пунктах x_1 і x_2. Праз пункты $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ праходзіць адзіная простая

$$P(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1),$$

якая і забяспечвае Л.і. функцыі $f(x)$ з дакладнасцю

$$f(x) - P(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_1)(x - x_2), \ \xi \in [x_1, x_2].$$

ЛІНЕЙНАЯ МНАГАСТАЙНАСЦЬ — падмноства M вектарнай прасторы L, якое атрымліваецца з якой-небудзь падпрасторы $L_1 \subset L$ з дапамогай зруху на нейкі вектар x_0, г.зн. мноства вектараў выгляду $x_0 + L_0$. Памернасць L_1 называецца памернасцю Л.м. У афіннай прасторы паняцце Л.м. супадае з паняццем афіннай падпрасторы.

ЛІНЕЙНАЯ НЕЗАЛЕЖНАСЦЬ ВЕКТАРАЎ — найважнейшая характарыстыка мноства вектараў. Кажуць, што вектары $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_n$ лінейна незалежныя, калі ўсякая іх лінейная камбінацыя $\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + ... + \lambda_n\boldsymbol{a}_n$, $\lambda_i \in \mathbf{R}$, $i = \overline{1, n}$, роўная нуль-вектару толькі пры ўмове, што ўсе $\lambda_i = 0$, $i = \overline{1, n}$.

ЛІНЕЙНАЯ НЯРОЎНАСЦЬ — няроўнасць выгляду $L(x) - a = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n - a < (\leq)\, 0$, дзе a, a_i, $i = \overline{1, n}$, — адвольныя рэчаісныя лікі, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$. У больш шырокім сэнсе — гэта няроўнасць выгляду $f(x) - a < (\leq)\, 0$, дзе $f(x)$ — лінейная функцыя на рэчаіснай вектарнай прасторы $L(R)$ са значэннямі з поля R рэчаісных лікаў і $a \in R$. Далейшае абагульненне паняцця Л.н. атрымаецца, калі замест поля R узяць адвольнае ўпарадкаванае поле $\mathbf{P}$. На аснове менавіта такога абагульнення пабудавана сучасная тэорыя Л.н.

ЛІНЕ́ЙНАЯ ПАДПРАСТО́РА, вектарная падпрастора — непустое падмноства *вектарнай прасторы L*, якое само з'яўляецца вектарнай прасторай у дачыненні да зададзеных у L аперацый складання вектараў і множання вектара на скаляр.

ЛІНЕ́ЙНАЯ ПРАСТО́РА — тое, што *вектарная прастора.*

ЛІНЕ́ЙНАЯ РЭГРЭ́СІЯ — азначаецца для адной выпадковай зменнай $Y=(Y_1, Y_2, ..., Y_m)^T$ па другой $X=(X_1, X_2, ..., X_p)^T$ як лінейная па X m-мерная вектарная форма, што апісвае залежнасць умоўнага матэматычнага спадзявання (пры ўмове $X=x$) выпадковага вектара Y ад значэнняў $X=(X_1, X_2, ..., X_n)$. Адпаведныя раўнанні

$$y_k(X,b)=M\{Y_k|X=x\}=\sum_{i=0}^{p} b_{ki}X_i,\ X_0\equiv 1,\ k=\overline{1,m},$$

называюцца раўнаннямі Л. р. Y па X, а параметры b_{ki} — каэфіцыентамі рэгрэсіі. На практыцы дапускаецца трактоўка зменнай X як назіранага параметра (не абавязкова выпадковага), ад якога залежыць матэматычнае спадзяванне выніковага паказніка $Y(X)$, што даследуецца.

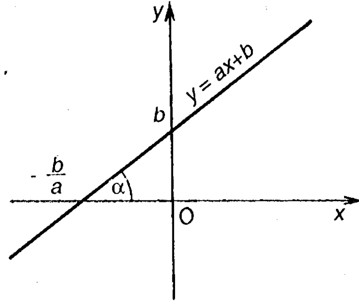
ЛІНЕ́ЙНАЯ ФО́РМА — аднародны мнагасклад выгляду

$$a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n, \qquad (1)$$

дзе a_i, $i=\overline{1,n}$, — лікі або элементы якога-небудзь поля. Калі V — вектарная прастора памеру n над полем K, то ўсякае лінейнае адлюстраванне f: $V\to K$ у кожным базісе задаецца мнагаскладам (1) і, наадварот, кожны мнагасклад выгляду (1) задае адлюстраванне f: $V\to K$. Таму Л.ф. азначаецца таксама як лінейная функцыя f: $V\to R$.

ЛІНЕ́ЙНАЯ ФУ́НКЦЫЯ — функцыя выгляду $y=ax+b$, дзе a і b — сталыя. Калі a і b — рэчаісныя лікі, то графік Л.ф. — простая лінія (рыс.). Каэфіцыент a (вуглавы каэфіцыент простай) роўны тангенсу вугла паміж простай і дадатным кірункам восі абцыс: $a=\operatorname{tg}\alpha$. Л.ф. нарастае пры $a>0$; спадае пры $a<0$; пры $a=0$ — тоесна роўная сталай: $y\equiv b$ (яе графік — простая, паралельная восі абцыс). Пры $b=0$ Л.ф. $y=ax$ называецца аднароднай, яе графік праходзіць праз пачатак каардынат.

Л.ф. часта сустракаюцца ў дастасаваннях. Напрыклад, пры прасталінейным раўнамерным руху шлях ёсць Л.ф. часу; ціск на цела, якое апускаецца ў вадкасць, прама прапарцыйны глыбіні апускання.



Л.ф. n зменных $x_1, x_2, ..., x_n$ — функцыя выгляду $f(x)=a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n+a$, дзе a_i, $i=\overline{1,n}$, a — сталыя. Абсяг вызначэння Л.ф. — уся n-мерная прастора зменных $x_1, x_2, ..., x_n$, рэчаісных ці камплексных. Пры $a=0$ Л.ф. называецца аднароднай або лінейнай формай. Калі ўсе зменныя $x_1, x_2, ..., x_n$ і каэфіцыенты $a_1, a_2, ..., a_n$, a — рэчаісныя лікі, то Л.ф. у $(n+1)$-мернай прасторы зменных $x_1, x_2, ..., x_n$, y ёсць n-мерная гіперплоскасць $y=a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n+a$, у прыватнасці пры $n=1$ — простая лінія на плоскасці.

Л.ф. ω камплекснай зменнай z — функцыя выгляду $\omega=az+b$, дзе a і b — камплексныя сталыя. Адлюстраванне, якое ажыццяўляецца Л.ф. ω, зводзіцца да суперпазіцыі наступных адлюстраванняў: павароту вакол пункта $z=0$ на вугал $\arg a$, гаматэцыі з цэнтрам у пункце $z=0$ і каэфіцыентам $|a|$, паралельнага пераносу на вектар b. Пры лінейным адлюстраванні акружына пераходзіць у акружыну, простая — у простую.

ЛІНЕ́ЙНЫ АПЕРА́ТАР — адлюстраванне паміж дзвюма вектарнымі прасторамі, узгодненае з іх лінейнымі структурамі. Няхай X і Y — вектарныя прасторы над адным і тым жа полем скаляраў K. Адлюстраванне A: $X\to Y$ з мноства X у мноства Y называецца Л.а. з абсягам $D(A)\subseteq X$, калі

$$(\forall\lambda_1,\lambda_2\in K)(\forall X_1,X_2\in D(A)): A(\lambda_1X_1+\lambda_2X_2)=$$
$$=(\lambda_1AX_1+\lambda_2AX_2).$$

У прыватным выпадку $Y=K$ Л.а. A: $X\to K$ называецца лінейным функцыяналам. Калі X і Y — тапалагічныя вектарныя прасторы, Л.а. A: $X\to Y$ называецца абмежаваным пры ўмове, што ён вылічаны на ўсім X $(D(A)=X)$ і кожнае абмежаванае на K мноства ён адлюстроўвае ў абмежаванае (у гэтым выпадку ўсякі непарыўны Л.ф. абмежаваны). Адваротнае сцверджанне выконва-

ецца тады, калі дадаткова прастора падпарадкоўваецца першай аксіёме злічальнасці. У тым выпадку, калі X і Y — унармаваныя прасторы над адным і тым жа полем скаляраў K, для Л.а. A: $X \to Y$, $D(A) = X$, непарыўнасць эквівалентная абмежаванасці.

ЛІНЕЙНЫ ВУГАЛ двухгранневага вугла — вугал паміж двума перпендыкулярамі да канта гэтага вугла, якія выходзяць з аднаго пункта і належаць розным граням.

ЛІНЕЙНЫ ПАРАДАК — *парадку дачыненне* на пэўным мностве A. Звычайна абазначаецца $\leq$, для кожных элементаў $a, b \in A$, $b \leq a$ (або $a \leq b$; адзін з іх не меншы за другі або, у іншай тэрміналогіі, адзін з іх ідзе за другім).

ЛІНЕЙНЫ ФУНКЦЫЯНАЛ — адлюстраванне f: $L \to K$, дзе L — вектарная прастора, K — поле скаляраў такое, што $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ для ўсіх $x, y \in L$, $\lambda \in K$. Л.ф. — прыватны выпадак *лінейнага аператара.* Мае вялікае значэнне ў лінейнай алгебры і матэматычным аналізе.

ЛІНЕЙНЫХ АЛГЕБРАІЧНЫХ РАЎНАННЯЎ СІСТЭМА — сістэма з m раўнанняў з n невядомымі $x_1, x_2, ..., x_n$ выгляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (1)$$

дзе лікі a_{ij} ($i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$) — каэфіцыенты, b_i — вольныя складнікі. Развязкам Л.а.р.с. называюць сукупнасць n лікаў $c_1, c_2, ..., c_n$, якая праўдзіць кожнае раўнанне з (1). Калі існуе хоць адзін развязак, сістэму называюць сумяшчальнай, калі не — несумяшчальнай (гл. таксама *Кронэкера—Капэлі тэарэма*).

Сістэму (1) можна запісаць у матрычным выглядзе $AX = B$, дзе A — матрыца каэфіцыентаў, X — матрыца-слупок невядомых, B — матрыца-слупок вольных складнікаў. Досыць агульны метад развязання Л.а.р.с. — *Гаўса метад*, які зводзіцца да паслядоўнага скасавання невядомых з раўнанняў сістэмы. Калі $m = n$ і $\det A \neq 0$, сістэму (1) называюць незвыроднай. Яе можна развязаць метадам адваротнай матрыцы ($X = A^{-1}B$) або паводле *Крамэра правіла.* Калі $b_i = 0$, то сістэму (1) называюць аднароднай (у процілеглым выпадку — неаднароднай). Пры ўмове, што $r < n$ (r — ранг матрыцы), аднародная сістэма мае $n - r$ незалежных развязкаў $c_1, c_2, ..., c_{n-r}$. Яе агульны развязак вызначаецца як лінейная камбінацыя $C = \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + ... + \alpha_{n-r} c_{n-r}$, дзе α_i ($i = \overline{1, n-r}$) — адвольныя лікі. Кожны развязак, што атрымліваецца пры канкрэтных значэннях α_i, называюць частковым. Развязак нявызначанай неаднароднай Л.а.р.с. ёсць сума пэўнага частковага развязку гэтай сістэмы і агульнага развязку адпаведнай аднароднай сістэмы.

ЛІНЕЙНЫЯ МЕТАДЫ СУМАВАННЯ ШЭРАГАЎ ФУР'Е — абагульненне паняцця сумы шэрагу на выпадак, калі ў звычайным сэнсе шэраг разбягаецца. Найбольш развітая тэорыя лінейных метадаў сумавання трыганаметрычных шэрагаў Фур'е і шэрагаў Фур'е па мнагасkладах Чабышова. Трыганаметрычны шэраг Фур'е

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

непарыўнай 2π-перыядычнай функцыі f ($f \in C_{2\pi}$) можа разбягацца на бясконцым мностве пунктаў $x \subset [-\pi, \pi]$. Таму ўзнікае неабходнасць увесці ў разгляд абагульненне збежнасці, якое звычайна вызначаюць у выглядзе пэўнага правіла і называюць метадам сумавання. Так, напрыклад, задаючы трохвугольную матрыцу лікаў $\|\lambda_n^{(k)}\|$, $n \in \mathbf{N}$, $k = \overline{1, n}$, даследуюць шэраг

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n^{(k)} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Пры пэўным выбары лікаў атрымліваюцца *Чэзара метады сумавання* шэрагаў Фур'е, метад Бернштэйна—Рагазінскага, метад Абеля—Пуасона і інш. У прыватнасці, калі $\lambda_n^{(k)} = 1 - \frac{k}{n+1}$, то маем *Фаера метад сумавання* (гл. таксама *Сярэдніх арыфметычных метад сумавання*).

Асноўнымі задачамі тэорыі лінейных метадаў сумавання шэрагаў Фур'е з'яўляюцца: 1) вывучэнне ўласцівасцяў матрыцы $\{\lambda_n^{(k)}\}$, якімі забяспечваецца пунктавая збежнасць і збежнасць па норме разгляданай прасторы функцый; 2) даследаванне канкрэтных Л.м.с.ш.Ф. на розных класах функцый; 3) знаходжанне класаў насычэння і парадку насычэння для розных лінейных метадаў; 4) знаходжанне для зададзенага кампактнага класа функцый найлепшага Л.м.с.ш.Ф. Шырока выкарыстоўваюцца лінейныя метады сумавання шэрагаў Фур'е ў тэорыі кратных шэрагаў Фур'е. Глыбока даследаваны таксама Л.м.с.ш.Ф. па

класічных артаганальных мнагаскладах. У Беларусі найбольш значныя вынікі ў галіне Л.м.с.ш.Ф. належаць А.Турэцкаму.

ЛІНЕЯВÁННЯ МÉТАДЫ — метады, якія дазваляюць звесці развязак нелінейных задач да паслядоўнага развязвання лінейных задач.

ЛÍНІЯ (ад лац. linea) — геаметрычнае паняцце, дакладнае і ў той жа час даволі агульнае, азначэнне якога выклікае значныя цяжкасці і ў розных раздзелах геаметрыі даецца па-рознаму. Напрыклад, у элементарнай геаметрыі разглядаюцца простыя Л., адрэзкі простых, ламаныя Л., утвораныя з адрэзкаў, і пэўныя крывыя Л. Кожны від крывых Л. азначаецца тым або іншым спецыяльным чынам (напрыклад, акружына азначаецца як мноства пунктаў, якія маюць дадзеную адлегласць R ад дадзенага пункта O — цэнтра акружыны). Іншы раз азначэнне Л. даюць як мяжу кавалка паверхні або як траекторыю руху пункта.

ЛÍНІЯ ДРУГÓГА ПАРÁДКУ — мноства пунктаў плоскасці, каардынаты якіх у дэкартавай сістэме каардынат задавальняюць алгебраічнае раўнанне 2-й ступені:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \quad (1)$$

Мноства пунктаў плоскасці, вызначанае гэтым раўнаннем, можа быць пустым або складацца з аднаго пункта; для захавання агульнасці ў гэтым выпадку кажуць, што яно вызначае ўяўную лінію другога парадку. Існуе прамавугольная сістэма каардынат, у якой раўнанне (1) у залежнасці ад каэфіцыентаў прыводзіцца да аднаго з наступных дзевяці *к а н а н і ч н ы х в і д а ў*, кожнаму з якіх адпавядае вызначаны клас Л.д.п.:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ — э л і п с;

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ — г і п е р б а л а;

$y^2=2px$ — п а р а б а л а;

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ — у я ў н ы э л і п с;

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ — п а р а п е р а с я к а л ь н ы х п р о с т ы х;

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ — п а р а ў я ў н ы х п е р а с я к а л ь н ы х п р о с т ы х;

$x^2-a^2=0$ — п а р а п а р а л е л ь н ы х п р о с т ы х;

$x^2+a^2=0$ — п а р а ў я ў н ы х п а р а л е л ь н ы х п р о с т ы х;

$x^2=0$ — п а р а с у п а д а л ь н ы х п р о с т ы х.

ЛÍНІЯ ПÉРШАГА ПАРÁДКУ, п р о с т а я л і н і я — адно з асноўных паняццяў *геаметрыі.* Калі асновай будавання самой геаметрыі з'яўляецца паняцце адлегласці паміж пунктамі прасторы, то Л.п.п. (простую) можна азначыць як лінію, уздоўж якой адлегласць паміж двума пунктамі найкарацейшая. У дэкартавай сістэме каардынат на плоскасці простая задаецца раўнаннем 1-й ступені (лінейным раўнаннем) $Ax+By+C=0$, дзе A, B і C — адвольныя канстанты, прычым A і B разам не роўныя нулю. Гэта а г у л ь н а е р а ў н а н н е п р о с т а й н а п л о с к а с ц і. А г у л ь н а е р а ў н а н н е п р о с т а й у п р а с т о р ы задаецца сістэмай двух лінейных раўнанняў:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$$

Гл. *Простая лінія.*

ЛÍНІЯ ЦЁКУ, в е к т а р н а я л і н і я — лінія, у кожным пункце якой датычная мае кірунак вектара вектарнага поля $\boldsymbol{a}$ у гэтым пункце. Дыферэнцыяльнае раўнанне Л.ц. мае выгляд

$$\frac{dx}{a_1}=\frac{dy}{a_2}=\frac{dz}{a_3},$$

дзе a_1, a_2, a_3 — каардынаты вектарнага поля, x, y, z — каардынаты пункта Л.ц.

ЛÍПШЫЦА ЎМÓВА — няроўнасць, у якой прырост функцыі ацэньваецца праз прырост яе аргумента. Няхай для адвольных пунктаў x_1 і x_2 з адрэзка $[a; b]$ выконваецца няроўнасць

$$|f(x_1)-f(x_2)|\le M|x_1-x_2|^\alpha, \quad (1)$$

дзе $0<\alpha\le 1$ і $M>0$ — нейкая канстанта. Тады кажуць, што функцыя $f(x)$ задавальняе на $[a; b]$ Л.ў. п а р а д к у α (або ступені α), і запісваюць: $f(x)\in\mathrm{Lip}\alpha$. Кожная функцыя $f(x)\in\mathrm{Lip}\alpha$, $x\in[a; b]$ (пры пэўным α) раўнамерна непарыўная на $[a ; b]$, а ў выпадку $\alpha=1$ — абсалютна непарыўная. Функцыя з абмежаванай на $[a; b]$ вытворнай задавальняе Л.ў. для кожнага $\alpha\le 1$. Л.ў. увёў Р.Ліпшыц (1864) у якасці дастатковай умовы для збежнасці шэрагу Фур'е функцыі $f(x)$.

У выпадку, калі x_1 і x_2 — пункты n-мернай эўклідавай прасторы (або, напрыклад, камплекснай плоскасці), няроўнасць (1) называецца *Гёль-*

дэра ўмовай. Таму Л.ў. на $[a; b]$ запісваюць таксама ў выглядзе $f(x) \in H_M^\alpha [a; b]$. Ужываецца таксама інтэгральная Л.ў. на $[a; b]$ (для $f(x) \in L_p(a; b)$, дзе $p \geq 1$) парадку α з канстантай $M > 0$:

$$\left(\int_a^{b-h} |f(x+h) - f(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq Mh^\alpha, \ h \in (0; b-a).$$

Абазначэнне: $f \in \mathrm{Lip}(\alpha, p)$, або $f \in H_p^\alpha$. Гэта абмежаванне на прырост функцыі ў інтэгральнай метрыцы.

ЛІЎВІЛЯ ТЭАРЭ́МА — 1) Л. т. у т э о р ы і а н а л і т ы ч н ы х ф у н к ц ы й — адвольная цэлая функцыя, абмежаваная на ўсёй плоскасці, тоесна роўная канстанце (Ж.Ліўвіль, 1847); 2) Л. т. у т э о р ы і к а н ф о р м а в ы х а д л ю с т р а в а н н я ў — канформавае адлюстраванне n-мернай эўклідавай прасторы пры $n \geq 3$. Гэта або лінейнае пераўтварэнне падобнасці, або кампазіцыя лінейнага пераўтварэння падобнасці і адной інверсіі; 3) Л.т. у т э о р ы і л і к а ў — алгебраічны лік α ступені n праўдзіць няроўнасць $|\alpha - p/q| > c(\alpha)q^{-n}$ пры адвольных цэлых ліках p і q. З дапамогай Л.т. быў пабудаваны першы прыклад трансцэндэнтнага ліку.

ЛІ́ЧБЫ — умоўныя знакі для абазначэння *лікаў.*

У гісторыі матэматыкі вядома шмат спосабаў запісу вялікіх лікаў з дапамогай невялікага набору Л. Старажытныя Л. — в а в і л о н с к і я (клінапісныя знакі для лікаў 1, 10, 60, 100; астатнія натуральныя лікі запісваліся іх злучэннямі) і е г і п е ц к і я (асобныя знакі для абазначэння адзінак дзесятковых разрадаў да 10^7). У арабаў, грэкаў і іншых народаў існавала алфавітнае абазначэнне лікаў. С л а в я н с к а я н у м а р а ц ы я таксама карысталася для запісу лікаў літарамі алфавіта, пры гэтым зверху ставіўся спецыяльны знак (цітла). Напрыклад, лік 384 запісваўся як ТПД (Т — 300, П — 80, Д — 4). У сярэднявеччы ў Еўропе ўжывалася р ы м с к а я н у м а р а ц ы я; у ёй з дапамогай рымскіх лічбаў можна было запісаць кожны лік да мільёна. Выконваць дзеянні з вялікімі лічбамі ў такіх сістэмах было нязручна, таму рымская, славянская і іншыя нумарацыі не забяспечвалі патрэбы вытворчасці і прыродазнаўчых навук. Больш дасканалая нумарацыя ўзнікла, відаць, у Індыі (6 ст.). У Еўропу яе перанеслі арабы (адсюль назоў арабскія Л.); сучасная дзесятковая сістэма злічэння вядомая з 15 ст. У вузкім сэнсе слова Л. называюць знакі 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (у дзесятковай сістэме злічэння). Гл. таксама *Лічэнне.*

ЛІ́ЧНІК — выраз a для выразу a / b. Калі m — натуральны лік, то Л. дробу m / n паказвае, колькі частак велічыні $1 / n$ уваходзіць у дроб.

ЛІЧЭ́ННЕ — сукупнасць спосабаў абазначэння (запісу) і назоў лікаў. У большасці сістэм лічэння (СЛ) лікі абазначаюць у выглядзе паслядоўнасці лічбаў.

СЛ падзяляюць на п а з і ц ы й н ы я (ПСЛ) і н е п а з і ц ы й н ы я (НПСЛ) залежна ад таго, мяняецца ці не значэнне лічбаў пры замене іх месца (пазіцыі) у паслядоўнасці. Прыклад НПСЛ — гэтак званая рымская сістэма, у якой кожны лік запісваецца камбінацыяй сімвалаў з наборам асноўных знакаў — рымскіх лічбаў. Больш дасканалыя сістэмы — ПСЛ. Першая з вядомых ПСЛ — шасцідзесятковая вавілонская СЛ — узнікла каля 4 тыс. гадоў таму і ўжываецца пры вымярэнні і запісе вуглоў і часу. ПСЛ даюць магчымасць запісваць усякі лік з дапамогай невялікай колькасці лічбаў і забяспечваюць прастасць выканання арыфметычных дзеянняў па табліцах складання і множання. Колькасць P розных лічбаў, якія дапускаюцца пэўнай ПСЛ, называюць асноваю СЛ. Асноваю могуць быць адвольныя цэлыя лікі. Калі $P = 2$ (г.зн. для запісу лікаў выкарыстоўваюцца толькі дзве лічбы 0 і 1), то СЛ называюць д в а й к о в а й, калі $P = 10$ — д з е с я т к о в а й. У адвольнай ПСЛ лік A выражаецца сумай ступеняў асновы P з каэфіцыентамі, якія могуць прымаць значэнні ад 0 да $P-1$. Напрыклад, $A_{10} = 8034{,}25 = 8 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2}$. У агульным выпадку $A_p = a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0 a_{-1} \ldots a_{-m} = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p^1 + a_0 p^0 + a_{-1} p^{-1} + \ldots + a_{-m} p^{-m}$. Існуюць простыя правілы пераводу лікаў з адной ПСЛ у іншую. Гл. таксама *Двайковая сістэма лічэння, Дзесятковая сістэма лічэння, Лічбы.*

ЛІ́ШКАВАСЦЬ — паняцце *інфармацыі тэорыі.* Наяўнасць Л. у запісе паведамленняў якой-небудзь крыніцы інфармацыі праяўляецца ў магчымасці напісаць гэтыя паведамленні карацей, выкарыстоўваючы тыя самыя знакі (г.зн. замяняючы адзін код на іншы з тым жа алфавітам, гл. *Кадаванне*). Максімальная доля "лішніх" знакаў вызначаецца на падставе статыстычных уласцівасцяў разгляданай крыніцы інфармацыі і таксама называецца яе л і ш к а в а с ц ю . У гэтым разуменні Л. R вызначаецца па формуле: $R = 1 - H / \log_2 m$, дзе m — колькасць літар алфавіта,

H — *энтрапія* крыніцы на літару паведамлення. Канкрэтныя віды паведамленняў (пісьмовая і вусная мова, фотатэлеграмы, тэлевізійныя відарысы) маюць вельмі значную велічыню Л., напрыклад Л. англійскай пісьмовай мовы не меншая за 0,6.

ЛО́ГІКА ВЫКА́ЗВАННЯЎ — раздзел *матэматычнай логікі*, у якім абстрагуюцца ад змястоўнага сэнсу таго, пра што гаворыцца ў выказваннях, і цікавяцца толькі іх значэннямі "праўда" (П) і "няпраўда" (Н). Л.в. вывучае тыя логікавыя законы, што ўлічваюць толькі, якім чынам адны выказванні атрыманыя з іншых з дапамогай логікавых аперацый кан'юнкцыі, дыз'юнкцыі, імплікацыі, эквіваленцыі і адмаўлення (гл. *Логікавыя аперацыі*).

Выказванні (простыя і складаныя) называюцца формуламі Л.в. Пададзім дакладнае матэматычнае азначэнне формулы Л.в. Спачатку акрэслім алфавіт Л.в. (сукупнасць сімвалаў, з якіх будуюцца формулы Л.в.). Гэта сімвалы зменных (выказванняў) $A, B, \ldots$, логікавыя сімвалы $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftarrow, \neg$ і дапаможныя сімвалы: дужкі і коска. Тады азначэнне формулы Л.в. задаецца наступным чынам:

1. Кожнае зменнае выказванне — гэта формула Л.в.

2. Калі A, B — формулы Л.в., то формуламі з'яўляюцца выразы $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \Rightarrow B)$, $(A \Leftrightarrow B)$, $\bar{A}$. Формула Л.в. называецца т о е с н а п р а ў д з і в а й (таўталогія, логікавы закон), калі яна прымае значэнне "П" пры ўсіх значэннях зменных (выказванняў), якія ўваходзяць у яе. Мэта Л.в. — выяўленне сукупнасці тоесна праўдзівых формул, якія ўяўляюць сабой матэматычны запіс агульналогікавых законаў. Табліцы праўдзівасці даюць магчымасць высветліць, тоесна праўдзівая формула ці не. Другая магчымасць акрэсліць сукупнасць тоесна праўдзівых формулаў дае *выказванняў злічэнне*: усе тоесна праўдзівыя формулы Л.в. і толькі яны выводныя ў злічэнні выказванняў (тэарэма пра поўнасць выказванняў злічэння; Э.Пост, 1921). Вялікую ролю ў Л.в. маюць раўназначныя формулы, г.зн. формулы, якія прымаюць аднолькавыя значэнні П або Н пры ўсіх значэннях зменных (выказванняў), якія ўваходзяць у іх (абазначэнне ~, часам ≡ або =). Табліцы праўдзівасці такіх формул супадаюць, што дае магчымасць з дапамогай гэтых табліц высветліць, раўназначныя формулы Л.в. ці не. Тым не менш вялікую цікавасць мае непасрэднае апісанне ўсіх раўназначнасцяў Л.в.:

$\bar{\bar{A}} \sim A$ — закон падвойнага адмаўлення;

$(A \wedge A) \sim A$, $(A \vee A) \sim A$ — законы ідэмпатэнтнасці;

$(A \wedge B) \sim (B \wedge A)$, $(A \vee B) \sim (B \vee A)$ — законы камутатыўнасці;

$((A \wedge B) \wedge C) \sim (A \wedge (B \wedge C))$, $(A \vee B) \vee C) \sim$ $\sim (A \vee (B \vee C))$ — законы асацыятыўнасці;

$((A \vee B) \wedge C) \sim ((A \wedge C) \vee (B \wedge C))$, $((A \wedge B) \vee C) \sim$ $\sim ((A \vee C) \wedge (B \vee C))$ — законы дыстрыбутыўнасці;

$\overline{(A \wedge B)} \sim (\bar{A} \vee \bar{B})$, $\overline{(A \vee B)} \sim (\bar{A} \wedge \bar{B})$ — законы дэ Моргана;

$(A \wedge (B \vee \bar{B})) \sim A$, $(A \vee (B \wedge \bar{B})) \sim A$.

Дададзім яшчэ раўназначнасці, якія выкарыстоўваюцца ў матэматычных доказах:

$$(A \Leftrightarrow B) \sim ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)),$$

$$(A \Rightarrow B) \sim (\bar{A} \vee B),$$

$$(A \Rightarrow B) \sim (\bar{B} \Rightarrow \bar{A}).$$

Аперацыі $\wedge$ і $\vee$ называюцца д у а л ь н ы м і адна адной, а формулы Л.в. — дуальнымі, калі адна атрымліваецца з другой заменай кожнай аперацыі на яе дуальную. Пададзены вышэй спіс раўназначнасцяў паказвае, што калі дзве формулы раўназначныя, то дуальныя ім формулы таксама раўназначныя. Гэтае сцверджанне называецца з а к о н а м д у а л ь н а с ц і.

ЛО́ГІКА ПРЭДЫКА́ТАЎ — раздзел *матэматычнай логікі*, які вывучае логікавыя законы, агульныя для кожнага мноства з дадзенымі на іх прэдыкатамі (г.зн. уласцівасцямі і стасункамі).

Алфавіт Л.п. (сукупнасць сімвалаў, з якіх будуюцца формулы Л.п.) складаецца з сімвалаў:

1) прадметныя зменныя: $x, y, z, \ldots$; $x_1, x_2, \ldots$;

2) прадметныя канстанты: $a, b, \ldots$; $a_1, a_2, \ldots$;

3) прэдыкатныя зменныя: $P^m, Q^n, \ldots$, дзе верхні індэкс паказвае колькасць зменных, ад якіх залежыць прэдыкат;

4) логікавыя сімвалы: кан'юнкцыя $\wedge$, дыз'юнкцыя $\vee$, адмаўленне $\neg$, імплікацыя $\Rightarrow$, эквіваленцыя $\Leftrightarrow$ і квантары агульнасці $\forall$ і існавання $\exists$;

5) дапаможныя сімвалы: дужкі і коска. Формула Л.п. будуецца з дапамогай правілаў: а) калі P^m — m-месцавы прэдыкатны сімвал, а $t_1, t_2, \ldots, t_m$ — прадметныя зменныя або прадметныя канстанты, то $P^m(t_1, \ldots, t_m)$ — формула, якая называецца элементарнай формулай; б) калі A, B — формулы, X — прадметная зменная, то $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(\neg A)$, $(A \Rightarrow B)$, $(A \Leftrightarrow B)$, $(\forall \times A)$ — формулы.

У выразах $\forall xA$, $\exists xA$ формула A называецца а б с я г а м дзеяння квантара $\forall x$, $\exists x$. Уваходжанне

зменнай x у дадзеную формулу называецца з в я з а н ы м, калі x — зменная квантара, які ўваходзіць у гэтую формулу або знаходзіцца ў абсягу дзеяння ўваходнага ў гэту формулу квантара $\forall x$, $\exists x$; у процілеглым выпадку ўваход зменнай x у дадзеную формулу называецца в о л ь н ы м. Зменная называецца в о л ь н а й (з в я з а н а й) зменнай у дадзенай формуле, калі існуе вольны (звязаны) яе ўваход у гэтую формулу.

Пад інтэрпрэтацыяй разумеюць непустое мноства M, што называецца а б с я г а м і н т э р п р э т а ц ы і, разам з адпаведнасцю, якая кожнаму прэдыкатнаму сімвалу P^n ставіць у адпаведнасць пэўны n-месцавы прэдыкат, зададзены на мностве M, і кожнай прадметнай канстанце — пэўны элемент з M. Пры дадзенай інтэрпрэтацыі лічыцца, што прадметныя зменныя прымаюць значэнні з абсягу інтэрпрэтацыі M, а логікавым сімвалам і квантарам надаецца іх звычайны сэнс. Усякая формула без вольных зменных (замкнёная формула) уяўляе сабою выказванне, якое ёсць праўда (П) або няпраўда (Н), а ўсякая формула $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ з вольнымі зменнымі $x_1, x_2, ..., x_n$ — n-месцавы прэдыкат, вызначаны на абсягу інтэрпрэтацыі M: гэты прэдыкат можа быць праўдзівым (П) для адных значэнняў $a_1, a_2, ..., a_n$ вольных зменных $x_1, x_2, ..., x_n$ з абсягу інтэрпрэтацыі M і няпраўдзівым (Н) для іншых. Гэтае значэнне (П або Н) называецца з н а ч э н н е м ф о р м у л ы $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ пры дадзеных значэннях a_i, $i = \overline{1, n}$, вольных зменных x_i, формула $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ называецца з д з я й с н я л ь н а й у дадзенай інтэрпрэтацыі, калі яна прымае значэнне П пры нейкіх значэннях вольных зменных x_i, $i = \overline{1, n}$. Формула $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ называецца п р а ў д з і в а й у дадзенай інтэрпрэтацыі, калі яна прымае значэнне П пры кожных значэннях вольных зменных x_i, $i = \overline{1, n}$. Формула $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ называецца н е з д з я й с н я л ь н а й (н е п р а ў д з і в а й) у дадзенай інтэрпрэтацыі, калі яна прымае значэнне Н пры кожных значэннях вольных зменных. Формула называецца здзяйсняльнай, калі яна здзяйсняльная ў нейкай інтэрпрэтацыі. Формула называецца нездзяйсняльнай або тоесна няпраўдзівай, калі яна нездзяйсняльная ў кожнай інтэрпрэтацыі. Формула называецца тоесна праўдзівай (таўталогіяй, агульназначнай), калі яна праўдзівая ў кожнай інтэрпрэтацыі.

Мэта Л.п. — вызначэнне сукупнасці тоесна праўдзівых формул, якія з'яўляюцца матэматычным запісам агульналогікавых законаў (на мове Л.п.). Адну магчымасць вызначэння гэтай сукупнасці дае будаванне прэдыкатаў злічэння, пры гэтым у якасці аксіём выбіраюцца тоесна праўдзівыя формулы, а правілы вывядзення даюць магчымасць з тоесна праўдзівых формул атрымліваць новыя тоесна праўдзівыя формулы. Адпаведна *Гёдэля тэарэме пра поўнасць* ўсе тоесна праўдзівыя формулы Л.п. і толькі яны выводзяцца ў *прэдыкатаў злічэнні.*

Вялікую ролю ў Л.п. маюць раўназначныя формулы, г.зн. формулы, якія прымаюць аднолькавыя значэнні П або Н у кожнай інтэрпрэтацыі (пазначаюць ~, часам ≡ або ⇔). Усе раўназначнасці *логікі выказванняў* з'яўляюцца раўназначнасцямі і Л.п. Напрыклад, $(A \wedge B) \sim (B \wedge A)$; $\overline{(A \wedge B)} \sim (\bar{A} \vee \bar{B})$, дзе A і B — формулы Л.п. Акрамя гэтага, ёсць шэраг раўназначнасцяў, звязаных з квантарамі і спецыфічных для Л.п., напрыклад $\overline{(\forall \times A)} \sim (\exists \times \bar{A})$, $\overline{(\exists \times A)} \sim (\forall \times \bar{A})$ (законы дэ Моргана), $(\forall x \forall y A) \sim (\forall y \forall x A)$, $(\exists x \exists y A) \sim (\exists y \exists x A)$ ("аднайменныя" квантары можна перастаўляць месцамі). Аднак "разнайменныя" квантары нельга перастаўляць месцамі, г.зн. формула $\exists x \forall y A$ не раўназначная формуле $\forall y \exists x A$. Між тым формула $(\exists x \forall y A) \Rightarrow (\forall y \exists x A)$ ёсць тоесна праўдзівая (A — формула Л.п.).

ЛО́ГІКАВАЯ АКСІЁМА — формула логікаматэматычнай мовы, якая бярэцца ў якасці аксіёмы пры будаванні фармальнай тэорыі; праўдзівая ў кожнай структуры для дадзенай мовы паводле сэнсу логікавых сімвалаў. Л.а. выбіраецца такім чынам, каб мноства логікавых высноў з аксіём якраз супадала з мноствам тэарэм. Акрамя Л.а. фармальныя тэорыі маюць у агульным выпадку яшчэ ўласныя (нялогікавыя) аксіёмы. Уласныя аксіёмы залежаць ад разгляданай фармальнай тэорыі, напрыклад, фармальныя тэорыі групаў і частковага ўпарадкавання маюць розныя ўласныя аксіёмы.

ЛО́ГІКАВАЯ МА́ТРЫЦА — сістэма $M = \langle A, B, \wedge, \vee, \Rightarrow, \neg \rangle$, дзе A — непустое мноства, $B \subseteq A$ і сімвалы $\wedge, \vee, \Rightarrow$ абазначаюць двухмесцавыя (з A і B), а сімвал $\neg$ — аднамесцавую (з A) аперацыі. Кожную формулу логікі выказванняў, пабудаваную са зменных $x_1, x_2, ..., x_n$ з дапамогай логікавых звязак $\wedge, \vee, \Rightarrow, \neg$, можна разглядаць як n-месцавую функцыю на мностве A, калі $x_1, x_2, ..., x_n$ ёсць зменныя з абсягу A, а логікавыя звязкі лічыць адпаведнымі аперацыямі Л.м. M.

Формула Φ называецца а г у л ь н а з н а ч н а й на M, калі пры кожных значэннях зменных на

мностве A значэнне Φ належыць мноству B. Л.м. M называецца характарыстычнай для злічэння выказванняў $\vee$, калі на M агульназначныя толькі тыя формулы, якія выводныя ў $\vee$. Напрыклад, Л.м., характарыстычнай для класічнага злічэння выказванняў, з'яўляецца сістэма $<\{0,1\};\{1\},\wedge,\vee,\Rightarrow,\neg\}$, дзе $x\wedge y=x\cdot y$, $x\vee y=\max(x,y)$, $x\Rightarrow y=\max(1-x,y)$, $\neg x=1-x$.

ЛО́ГІКАВАЯ ФО́РМУЛА — выраз на мове фармальнай логікі — аналаг апавядальнага сказа ў звычайнай мове. Дакладнае азначэнне Л.ф. даецца для кожнай канкрэтнай логікавай мовы. Як правіла, азначэнне Л.ф. мае індукцыйны характар: вылучаецца мноства выразаў, якія называюцца элементарнымі або простымі формуламі, затым вызначаюцца ўсе правілы, з дапамогай якіх з атрыманых формул будуюцца новыя. Напрыклад, формулы логікі выказванняў азначаюцца: кожная выказвальная зменная ёсць элементарная формула. Калі A і B — формулы, то выразы $(A\wedge B)$, $(A\vee B)$, $(A\Rightarrow B)$ і $(\neg A)$ — таксама формулы логікі выказванняў. Азначэнне закончанае, калі іншых, акрамя пералічаных, правілаў будавання формул няма.

ЛО́ГІКАВАЯ ФУ́НКЦЫЯ — n-месцавая функцыя, вызначаная на мностве {П, Н} (П — "праўдзівасць", Н — "няпраўдзівасць" выказванняў), якая мае значэнні гэтага мноства. З кожнай логікавай n-месцавай аперацыяй $A(a_1, a_2, ..., a_n)$ звязана логікавая функцыя f_A: калі $v_1, v_2, ..., v_n$ — значэнні праўдзівасці, тады $f_A(v_1, v_2, ..., v_n)$ — значэнні праўдзівасці выказвання $A(a_1, a_2, ..., a_n)$, калі значэнне a_i роўнае v_i, $i=\overline{1,n}$. Часам Л.ф. называюць кожную n-месцавую функцыю, вызначаную на нейкім мностве M, якая мае значэнні з мноства {П, Н} (такія функцыі называюцца таксама прэдыкатамі).

ЛО́ГІКАВЫЯ АПЕРА́ЦЫІ — аперацыі з выказваннямі. Даюць магчымасць будаваць новыя (складаныя) выказванні з наяўных (простых) выказванняў, значэнні (праўда, няпраўда) складанага выказвання адназначна вызначаюцца значэннямі простых выказванняў. Прыклады Л.а. — кан'юнкцыя $A\wedge B$, дыз'юнкцыя $A\vee B$, імплікацыя $A\Rightarrow B$, эквіваленцыя $A\Leftrightarrow B$, адмаўленне $\bar{A}$, дзе A, B — зыходныя выказванні. Азначэнні гэтых аперацый даюцца з дапамогай табліцы праўдзівасці.

Табліца праўдзівасці

A	B	$A\wedge B$	$A\vee B$	$A\Rightarrow B$	$A\Leftrightarrow B$	$\bar{A}$
П	П	П	П	П	П	Н
П	Н	Н	П	Н	Н	
Н	П	Н	П	П	Н	П
Н	Н	Н	Н	П	П	

Аперацыя кан'юнкцыі адпавядае звязванню злучнікам "і", дыз'юнкцыі — "ці" ("або"), імплікацыі — словазлучэннем "калі..., то...", эквіваленцыі — "калі і толькі калі...", адмаўлення — часціцай "не". Кан'юнкцыя $A\wedge B$ таксама абазначаецца $A\,\&\,B$ або $A\cdot B$, адмаўленне — $\neg A$. У імплікацыі $A\Rightarrow B$ выказванне A называецца ўмовай, B — высновай.

ЛУ́ПА — непустое мноства L, на якім вызначана бінарная алгебраічная аперацыя такая, што кожнае раўнанне $ax=b$, $ya=b$ мае адзіны развязак, і існуе такі элемент e, што $xe=ex=x$ для адвольнага элемента $x\in L$.

ЛЮСТРАНЫ́ АДБІ́ТАК — сіметрыя ў дачыненні да простай на плоскасці або сіметрыя ў дачыненні да плоскасці ў прасторы.

ЛЯГРА́НЖА ЗАДА́ЧА — адна з асноўных задач *варыяцыйнага злічэння*, у якой патрэбна мінімізаваць функцыянал пры дадатковых дыферэнцыяльных абмежаваннях і межавых умовах. Ж.Лягранж разглядаў гэтую задачу ў сувязі з даследаваннямі па механіцы.

ЛЯГРА́НЖА ІНТЭРПАЛЯЦЫ́ЙНАЯ ФО́РМУЛА — від інтэрпаляцыйных мнагасکладаў ступені n. Калі функцыя $f(x)$ зададзеная на адрэзку $[a,b]$ і алгебраічны мнагасклад $L_n(x)$ у $n+1$ пункце $\{x_i\}$, $a\le x_1<x_2<...<x_{n+1}\le b$, задавальняе ўмовы $L_n(x_i)=f(x_i)$, то яго можна запісаць у выглядзе Л.і.ф.:

$$L_n(x)=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{w_{n+1}(x)}{(x-x_k)w'_{n+1}(x_k)},\ w_{n+1}(x)=\prod_{k=1}^{n+1}(x-x_k).$$

Калі вузлы інтэрпаляцыі ёсць камплексныя лікі $z_1, z_2, ..., z_{n+1}$ і знаходзяцца ў нейкім абсягу Ω, абмежаваным кавалкава-гладкім контурам γ, функцыя $f(z)$ аналітычная ў замкнёным абсягу $\bar{\Omega}=\Omega\cup\gamma$, то Л.і.ф. мае выгляд

$$L_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{w_{n+1}(\xi)-w_{n-1}(z)}{w_{n+1}(\xi)(\xi-z)}f(\xi)d\xi.$$

Л.і.ф. для інтэрпаляцыі з дапамогай трыганаметрычных мнагаскладаў мае запіс:

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^{n+1} f(x_k) \prod_{j \neq k} \frac{\sin \frac{x - x_j}{2}}{\sin \frac{x_k - x_j}{2}}.$$

ЛЯГРА́НЖА МЕ́ТАД — метад прывядзення квадратовай формы да сумы квадратаў (Ж.Лягранж, 1759). Няхай $f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ — квадратовая форма, $a_{ij} = a_{ji}$ з n зменнымі $x_1, ..., x_n$ над полем K і $\mathrm{char} K \neq 2$. З дапамогай Л.м. гэтая форма *незвыродным лінейным пераўтварэннем* прыводзіцца да выгляду $f(y) = \sum_{i,j=1}^{n} b_i y_i^2$, $b_i \in K$. Лічыцца, што не ўсе каэфіцыенты формы $f(x)$ роўныя 0, таму магчымыя выпадкі: 1) $a_{gg} \neq 0$ пры нейкім g, $1 \leq g \leq n$, тады

$$f(x) = \frac{1}{a_{gg}} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{gk} x_k \right)^2 + f_1(x), \qquad (1)$$

дзе форма $f_1(x)$ не змяшчае зменную x_g; 2) $a_{gg} = a_{hh} = 0$, але $a_{gh} \neq 0$, тады

$$f(x) = \frac{1}{2a_{gh}} \left[\sum_{k=1}^{n} (a_{gk} + a_{hk}) x_k \right]^2 - \frac{1}{2a_{gh}} \left[\sum_{k=1}^{n} (a_{gk} - a_{hk}) x_k \right]^2 + f_2(x), \qquad (2)$$

дзе форма $f_2(x)$ не змяшчае зменных x_g і x_h. З дапамогай незвыродных лінейных пераўтварэнняў (1) і (2) пасля концай колькасці крокаў форма $f(x)$ прыводзіцца да выгляду $f(y)$.

ЛЯГРА́НЖА МНО́ЖНІКАЎ МЕ́ТАД — метад развязання задачы аптымізацыі пры дадатковых умовах праз развязанне задачы аптымізацыі без дадатковых умоў. Напрыклад, для задачы на экстрэмум функцыі $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ пры дадатковых умовах (якія іншым разам называюць р а ў н а н н я м і с у в я з я ў) $\varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$, $i = \overline{1, m}$, уводзіцца дапаможная функцыя выгляду

$$L(x_1, x_2, ..., x_n;\ y_1, y_2, ..., y_m) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{m} y_i \varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Функцыю L звычайна называюць ф у н к ц ы я й Л я г р а н ж а, множнікі $(y_1, y_2, ..., y_m)$ — м н о ж н і к а м і Л я г р а н ж а. Даволі часта экстрэмум функцыі L ёсць экстрэмум функцыі f. Функцыя Лягранжа таксама ўжываецца пры даследаванні задач матэматычнага праграмавання, варыяцыйнага злічэння і інш. Упершыню гэты метад выказаў Ж.Лягранж (1797) пры даследаванні задач дыферэнцыяльнага злічэння.

ЛЯГРА́НЖА РАЎНА́ННЕ — тое, што *Д'Аламбэра раўнанне.*

ЛЯГРА́НЖА ФО́РМУЛА — тое, што *концых прыростаў формула.*

ЛЯГЕ́РА МНАГАСКЛА́ДЫ — сістэма артаганальных мнагаскладаў $\{L_n(x)\}$ на інтэрвале $[0, +\infty)$ з вагою e^{-x}. Вызначаецца формулай

$$L_n(x) = (-1)^n e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}),\ n = 0, 1, 2, ...$$

У прыватнасці,

$$L_0(x) = 1,\ L_1(x) = x - 1,\ L_2(x) = x^2 - 4x + 2.$$

Выкарыстоўваюцца таксама і а б а г у л ь н е н ы я Л. м.

$$L_n^{(\lambda)}(x) = (-1)^n x^{-\lambda} e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^{\lambda+n} e^{-x}),\ \lambda > -1,$$

якія артаганальныя на інтэрвале $[0, +\infty)$ з вагою $x^\lambda e^{-x}$. Упершыню даследаваў Э.Лягэр (1878).

ЛЯГЕ́РА ФУ́НКЦЫІ — артаганальная сістэма функцый на інтэрвале $[0, +\infty)$ з вагою 1. Л.ф. $l_n^{(\lambda)}(x)$ вызначаецца праз абагульненыя *Лягэра мнагасклады:*

$$l_n^{(\lambda)}(x) = x^{\lambda/2} e^{-x/2} L_n^{(\lambda)}(x) = (-1)^n x^{-\lambda/2} e^{x/2} \frac{d^n}{dx^n}(x^{\lambda+n} e^{-x}),\ \lambda > -1.$$

Пры пэўных абмежаваннях на функцыю $f(x)$ яна раскладаецца ў шэраг па Л.ф.:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n l_n^{(\lambda)}(x)$$

з каэфіцыентамі

$$c_n = \frac{1}{n!\Gamma(\lambda + n - 1)} \int_0^\infty l_n^{(\lambda)}(x) f(x) dx.$$

ЛЯ́ЙБНІЦА ПРЫКМЕ́ТА — дастатковая ўмова збежнасці *знакачаргавальнага шэрагу,* г.зн. лікавага шэрагу

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k = a_1 - a_2 + a_3 - ...,$$

дзе $a_k > 0$. Паводле Л.п., калі складнікі гэтага шэрагу збягаюцца да нуля $(\lim_{k\to\infty} a_k = 0)$ і іх модулі ненарастальныя $(a_k \geq a_{k+1},\ k = 1, 2, \ldots)$, тады шэраг збягаецца. Пры гэтым астача $r_n = (-1)^n a_{n+1} + \ldots$ мае знак першага яе складніка $|r_n| < a_{n+1}$.

ЛЯ́ЙБНІЦА ФО́РМУЛА — формула, якая выражае вытворную n-га парадку ад здабытку дзвюх функцый праз вытворныя множнікаў

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)},$$

дзе $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$ — біномныя каэфіцыенты.

ЛЯ́ЙБНІЦА ШЭ́РАГ — знакачаргавальны шэраг

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots,$$

які збягаецца да $\pi/4$.

ЛЯМЭ́ КАЭФІЦЫЕ́НТЫ — велічыні

$$Hu = \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2},$$

$$Hv = \sqrt{\left(\frac{dx}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dv}\right)^2},$$

$$Hw = \sqrt{\left(\frac{dx}{dw}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dw}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dw}\right)^2},$$

якія з'яўляюцца характарыстыкамі крывалінейных каардынат u, v, w прасторы, звязаных з дэкартавымі прамавугольнымі каардынатамі x, y, z раўнаннямі $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$. Праз Л.к. выражаюцца: элемент даўжыні —

$$de = \sqrt{H_u^2 du^2 + H_v^2 dv^2 + H_w^2 dw^2};$$

элемент плошчы паверхні —

$$ds = V(H_u H_v\, dudv)^2 +$$
$$+ (H_u H_w\, dudw)^2 + (H_v H_w\, dudw)^2;$$

элемент аб'ёму —

$$dV = H_u H_v H_w\, dudvdw$$

у сістэме каардынат u, v, w. Л.к. уваходзяць у выразы вектарных дыферэнцыяльных аперацый скалярнага і вектарнага палёў. Л.к. увёў Г.Лямэ ў 1859 г.

ЛЯМЭ́ КРЫВА́Я — плоская алгебраічная крывая, раўнанне якой у дэкартавых прамавугольных каардынатах мае выгляд

$$\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^m = 1,$$

дзе $a > 0$ і $b > 0$, $m = \dfrac{p}{q}$, p, q — узаемна простыя лікі. Пры $m = 1$ Л.к. — простая, пры $m = 2$ — эліпс, пры $m = \dfrac{2}{3}$ і $a = b$ — астроіда. Пры $m > 0$ парадак Л.к. роўны pq, пры $m < 0$ — $2pq$. Упершыню разгледзеў Г.Лямэ (1818).

ЛЯПЛЯ́СА АПЕРА́ТАР — тое, што *ляплясіян.*

ЛЯПЛЯ́СА ІНТЭГРА́Л — інтэграл выгляду $\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$ камплекснай зменнай $p = \sigma + it$. Разгледзеў П.Ляпляс (1812), але згадваў ужо Л.Ойлер (1737). Гл. *Ляпляса пераўтварэнне.*

ЛЯПЛЯ́СА ПЕРАЎТВАРЭ́ННЕ — пераўтварэнне, якое пераводзіць функцыю $f(t)$ рэчаіснай зменнай $t \in (0, +\infty)$ у функцыю $F(p)$ камплекснай зменнай $p = \sigma + it$ паводле формулы

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt.$$

Часам пад Л.п. разумеюць і сам вынік пераўтварэння — функцыю $F(p)$. Функцыю $f(t)$ называюць а р ы г і н а л а м, а функцыю $F(p)$ — в ы я в а й Л.п. Л.п. сустракаецца ў П.Ляпляса (1812), але было вядомае яшчэ Л.Ойлеру. Пры пэўных няжорсткіх умовах на Л.п. можна знайсці арыгінал $f(t)$ на падставе ф о р м у л ы з в а р о т у:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F(p)e^{pt}dt.$$

Л.п. разам з формулай звароту знаходзіць дастасаванні пры інтэграванні дыферэнцыяльных раўнанняў, пры развязанні задач электратэхнікі, механікі і г.д. Л.п. — адно з асноўных паняццяў *аперацыйнага злічэння.* Сучасная тэорыя Л.п. будуецца на аснове інтэграла Лебэга, што значна пашырае круг дастасаванняў Л.п.

ЛЯПЛЯ́СА РАЗМЕРКАВА́ННЕ — размеркаванне імавернасцяў выпадковай велічыні x са шчыльнасцю $p(x) = \dfrac{1}{2}\alpha e^{-\alpha|x-\beta|}$, $x \in R$, $\beta \in R$, $\alpha > 0$.

Л.р. мае выпадковая велічыня $\beta + x_1 - x_2$, дзе x_1 і x_2 — незалежныя выпадковыя велічыні з аднолькавым паказнікавым размеркаваннем са шчыльнасцю $\alpha e^{-\alpha x}$, $x > 0$. Упершыню ўжыў П.Лапляс (1812).

ЛЯПЛЯ́СА РАЎНА́ННЕ — дыферэнцыяльнае раўнанне ў частковых вытворных

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

дзе x, y, z — незалежныя зменныя, а $u = u(x, y, z)$ — шуканая функцыя. Л.р. задавальняе тэмпература пры стацыянарных працэсах, патэнцыял поля цяжару і г.д. Развязкі Л.р., якія маюць непарыўныя вытворныя да 2-га парадку, называюцца г а р м а н і ч н ы м і ф у н к ц ы я м і.

ЛЯПЛЯ́СА ТЭАРЭ́МА — тэарэма пра набліжанне біномнага размеркавання нармальным размеркаваннем: няхай v_n — колькасць "поспехаў" у *n Бэрнулі выпрабаваннях* з імавернасцю поспеху p, $0 < p < 1$, тады для адвольных рэчаісных лікаў a і b $(a < b)$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{ a < \frac{v_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < b \right\} = \int_x^b \varphi(y)\,dy,$$

дзе $\varphi(y) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{y^2}{2}}$ — ш ч ы л ь н а с ц ь стандартнага нармальнага размеркавання.

Часам Л.т. называюць і н т э г р а л ь н а й т э а р э м а й Л я п л я с а адрозна ад л а к а л ь н а й т э а р э м ы Л я п л я с а:

$$P(v_n = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} =$$
$$= [\,np(1-p)]^{\frac{1}{2}} \varphi(x)(1+\xi_n),$$

$0 \le k \le n$, k — цэлае, $\xi_n \to 0$ пры $n \to \infty$ раўнамерна для ўсіх k, для якіх $x = \dfrac{m - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ знаходзіцца ў нейкім канцым інтэрвале.

ЛЯПЛЯ́СА ФУ́НКЦЫЯ — функцыя

$$\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-u^2} dt,$$

з дапамогай якой апісваецца *нармальнае размеркаванне.*

ЛЯПЛЯСІЯ́Н, Л я п л я с а а п е р а т а р — лінейны дыферэнцыяльны аператар, які абазначаецца праз Δ і які функцыі $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$ ад n зменных $x_1, x_2, ..., x_n$ супастаўляе функцыю

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_n^2}.$$

У прыватнасці, для функцыі φ ад адной зменнай x Л. супадае з вытворнай другога парадку $\Delta\varphi = \dfrac{d^2\varphi}{dx^2}$.

Раўнанне $\Delta\varphi = 0$ звычайна называецца *Лапляса раўнаннем*; яно апісвае пэўныя стацыянарныя фізічныя з'явы. Абазначэнне Δ увёў Р.Мёрфі (1833).

ЛЯПУНО́ВА ПЕРАЎТВАРЭ́ННЕ — незвыроднае лінейнае пераўтварэнне $X = L(t)y$, $x \in R^n(C^n)$, $x \in R^n(C)$ з матрыцай $L(t)$, якая гладка залежыць ад параметра t, $t \in R$, $t \ge t_0$ і $\sup(\|L(t)\| + \|L^{-1}(t)\| + \|L'(t)\|) < +\infty$. Л.п. шырока ўжываецца ў тэорыі лінейных сістэм звычайных дыферэнцыяльных раўнанняў, бо захоўвае асноўныя асімптатычныя ўласцівасці развязкаў, напрыклад устойлівасць, асімптатычную ўстойлівасць, паказнікі Ляпунова і г.д. На падставе групы Л.п. можна правесці класіфікацыю лінейных сістэм з дапамогаю падзелу мноства ўсіх сістэм на класы эквівалентнасці. Увёў А.Ляпуноў (1892).

ЛЯПУНО́ВА ТЭАРЭ́МА — адна з лімітавых тэарэм *імавернасцяў тэорыі*, тэарэма пра адну з ўмоў ужывання *цэнтральнай лімітавай тэарэмы.* Няхай паслядоўнасць незалежных выпадковых велічыняў $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), ..., \xi_k(\omega)...$, якія маюць матэматычныя спадзяванні $E\xi_k(\omega) = a_k$, дысперсіі $D\xi_k(\omega)$ і абсалютныя моманты $E|\xi_k(\omega) - a_k|^{2+\delta}$, $\delta > 0$, задавальняе пры нейкім $\delta > 0$ умову

$$\frac{1}{B_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^n E|\xi_k(\omega) - a_k|^{2+\delta} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

дзе $B_n^2 = \sum\limits_{k=1}^n D\xi_k(\omega)$. Тады раўнамерна ў дачыненні да x

$$P\left\{ \frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^n (\xi_k(\omega) - a_k) < x \right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Тэарэму сфармуляваў і даказаў А.Ляпуноў (1901).

ЛЯПУНО́ВА ЎМО́ВА — умова ў *Ляпунова тэарэме.* Вызначаны таксама ўмовы, якія пашыраюць Л.у. і з'яўляюцца не толькі дастатковымі, але і неабходнымі (С.Бернштэйн, Дж.Ліндэберг, В.Фэлер).

М

МАГІСТРА́ЛЬ (ад лац. magistralis — галоўны, кіравальны) — адно з асноўных паняццяў тэорыі мадэляў эканамічнай дынамкі. Адрозніваюць М. у двух сэнсах: 1) М. — мноства пунктаў, якія ляжаць на аптымальнай або эфектыўнай стацыянарнай траекторыі мадэлі эканамічнай дынамікі; 2) М. — мноства, да якога ў тым або іншым сэнсе імкнуцца ўсе траекторыі ці нейкая іх частка. У найпрацейшых выпадках М. у абодвух сэнсах супадаюць.

МАГІ́ЧНЫ КВАДРА́Т — квадратная ($n \times n$) табліца цэлых лікаў ад 1 да n^2, для якой сумы лікаў уздоўж кожнага слупка, кожнага радка і дзвюх вялікіх дыяганаляў табліцы роўныя аднаму і таму ж ліку $S = n(n^2+1)/2$ (n — парадак М.к.). Даказана, што М.к. можна пабудаваць для кожнага $n \geq 3$. На рыс. прыведзены М.к. з $n=3$, $n=4$ і $n=8$. М.к.

2	7	6
9	5	1
4	3	8

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

1	6	60	63	9	55	54	12
59	64	2	5	52	14	15	49
62	57	7	4	16	50	51	13
8	3	61	58	53	11	10	56
41	19	22	48	28	29	33	40
46	24	17	43	39	34	30	27
20	42	47	21	38	35	31	26
23	45	44	18	25	32	36	37

з $n=8$ можна падзяліць на 4 меншыя, прычым у кожным з іх сума лікаў кожнага радка, слупка або вялікай дыяганалі адна і тая ж. Агульнай тэорыі М.к. не існуе (2001); невядомая нават агульная колькасць М.к. парадку n.

МАГУ́ТНАСЦЕВАЯ ХАРАКТАРЫ́СТЫКА прасторы — функцыя, якая ставіць у адпаведнасць гэтай прасторы бясконцы *кардынальны лік* і прымае аднолькавыя значэнні на гамеаморфных прасторах. Абсягам вызначэння М.х. можа быць клас усіх *тапалагічных прастораў* або яго падклас. Калі X — адвольная тапалагічная прастора, то прыкладамі М.х. гэтай прасторы з'яўляюцца: магутнасць $|X|$ — магутнасць мноства ўсіх яго пунктаў; вага $\omega(X)$ — мінімум магутнасцяў усіх магчымых базаў прасторы X; шчыльнасць $d(X)$ — мінімум магутнасцяў усіх скрозь шчыльных у X мностваў.

МАГУ́ТНАСЦЬ КАНТЫ́НУУМА — магутнасць мноства ўсіх рэчаісных лікаў R; абазначаецца c або $2^{\aleph_0}$.

МАГУ́ТНАСЦЬ МНО́СТВА, кардынальны лік — абагульненне на адвольныя мноствы паняцця "колькасць элементаў". М.м. азначаецца метадам абстракцыі, як тое агульнае, што ёсць ва ўсіх мностваў, эквівалентных (колькасна) дадзенаму; пры гэтым два мноствы называюцца эквівалентнымі, калі паміж імі існуе ўзаемна адназначная адпаведнасць. Найменшая бясконцая М.м. — гэта М.м. натуральных лікаў. Паняцце М.м. увёў стваральнік тэорыі мностваў Г.Кантар (1878), які паказаў, што М.м. рэчаісных лікаў большая за М.м. натуральных лікаў, і гэтым даказаў, што бясконцыя мноствы можна класіфікаваць па іх М.м.

МАГУ́ТНАСЦЬ СТАТЫСТЫ́ЧНАГА КРЫТЭ́РУ — імавернасць, з якой *статыстычны крытэр*, прызначаны для праверкі простай гіпотэзы H_0 супраць складанай альтэрнатывы H_1, адхіляе H_0, калі на самой справе праўдзіцца гіпотэза H_1. М.с.к., прызначанага для праверкі H_0 супраць H_1, вызначаецца як звужэнне функцыі магутнасці $\beta(\theta)$, $\theta \in H = H_0 \cup H_1$ гэтага статыстычнага крытэру на мноства H_1.

МАДА́ЛЬНАЯ ЛО́ГІКА — абсяг логікі, дзе разглядаюцца выказванні тыпу "неабходна, што ...", "магчыма, што ...", "неабходна магчыма, што ..." і да іх падобныя, якія называюцца мадальнымі. Элементы М.л. сустракаліся ў Арыстоцеля (4 ст. да н.э.) і перайшлі ў класічную філасофію. Упершыню М.л. фармалізаваў К.Льюіс. Затым пабудаваныя і даследаваныя іншыя сістэмы. Мноствавасць сістэм М.л. узнікае з таго, што паняцці "магчыма" і "неабходна" і іх камбінацыі з дапамогай лагічных звязак можна ўдакладняць рознымі спосабамі. Большасць даследаваных сістэм М.л. абапіраецца на класічную логіку.

МАДУЛЯ́РНАЯ ГРУ́ПА — група Γ усіх дробава-лінейных пераўтварэнняў γ выгляду

$$x \to \gamma(x) = \frac{a+b}{cx+d}, \quad ad - bc = 1,$$

дзе a, b, c, d — цэлыя рацыянальныя лікі. М.г. звычайна атаясамляецца з фактар-групай

$$SL_2(Z)/\{\pm E\}, \text{ дзе } E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

МАДЭ́ЛЯЎ ТЭО́РЫЯ — раздзел матэматычнай логікі, які вывучае ўзаемадачыненні паміж фармалізаванымі логіка-матэматычнымі мовамі і матэматычнымі структурамі, што апісваюцца з дапамогай гэтых моваў. Будаванне мадэлі дадзенай аксіяматычнай тэорыі азначае, што зыходным паняццям і дачыненням гэтай тэорыі ставяцца ў адпаведнасць пэўныя матэматычныя аб'екты і дачыненні паміж імі, у выніку чаго аксіёмы тэорыі ператвараюцца ў праўдзівыя сцверджанні пра гэтыя аб'екты. Матэматычныя аб'екты, якія выкарыстоўваюцца пры будаванні мадэлі, — гэта элементы нейкай матэматычнай сістэмы з усім багаццем іх уласцівасцяў, але цікавыя ў першую чаргу толькі такія іх уласцівасці, якія адпавядаюць зыходным дачыненням дадзенай тэорыі. Гэтыя матэматычныя аб'екты ствараюць а л г е б р а і ч н у ю с і с т э м у. Упершыню паняцце мадэлі з'явілася ў працах Э.Бэльтрамі і Ф.Кляйна, прысвечаных даследаванням несупярэчлівасці геаметрыі Лабачэўскага.

МАЖАРА́НТА ф у н к ц ы і (франц. majorante, ад majorer — абвяшчаць большым) — функцыя, значэнні якой не меншыя за адпаведныя значэнні дадзенай функцыі для разгляданых значэнняў незалежнай зменнай. Напрыклад, функцыя $f(x) = x$ пры $x > -1$ — М. функцыі $g(x) = \ln(1+x)$, бо $x \geq \ln(1+x)$ для ўсіх значэнняў $x > -1$.

Для функцый, што падаюцца ў выглядзе ступеневага шэрагу, тэрмін М. ужываецца ў спецыяльным сэнсе як сума ступеневага шэрагу з дадатнымі каэфіцыентамі, якія не меншыя за абсалютныя велічыні адпаведных каэфіцыентаў дадзенага шэрагу. М. ступеневых шэрагаў выкарыстоўваюцца ў тэорыі дыферэнцыяльных раўнанняў. Гл. таксама *Мінаранта.*

МАКЛЁРЫНА ШЭ́РАГ — ступеневы шэраг выгляду $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k$, пабудаваны для функцыі $f(z)$. Сустракаецца ў працах К.Маклёрына (1742). Для аналітычнай у наваколлі нуля функцыі $f(z)$ існуе расклад у М.ш. М.ш. — прыватны выпадак *Тэйлара шэрагу.*

МАКСІМА́ЛЬНАЙ ПРАЎДАПАДО́БНАСЦІ МЕ́ТАД — адзін з асноўных агульных метадаў знаходжання ацэнак невядомага параметра ў статыстычнай тэорыі ацэньвання.

Няхай па назіраннях $X_1, ..., X_n$ са шчыльнасцю размеркавання $p(x, \theta)$, якая залежыць ад невядомага параметра θ, ацэньваецца θ. Для гэтага з дапамогай формулы $L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i, \theta)$ вызначаюць функцыю праўдападобнасці і бяруць у якасці ацэнкі для θ статыстыку $\bar{\theta}$, якая вызначаецца наступным чынам: $L(\bar{\theta}) = \max L(\theta)$. Ацэнка $\bar{\theta}$ называецца ацэнкай м а к с і м а л ь н а й або н а й л е п ш а й п р а ў д а п а д о б н а с ц і. У некаторых выпадках замест функцыі $L(\theta)$ разглядаюцца $L(\theta) = \ln L(\theta)$.

МАКСІМА́ЛЬНЫ ЭЛЕМЕ́НТ ч а с т к о в а ў п а р а д к а в а н а г а м н о с т в а — элемент, для якога ў разгляданым мностве няма элемента, строга большага за яго.

МАКСІМІ́Н — 1) экстрэмум тыпу

$$\sup \inf F(x, y), x \in X, y \in Y, \quad (1)$$

$$\max \min F(x, y), x \in X, y \in Y \quad (2)$$

і г.д. М. можна разумець (напрыклад, у тэорыі пошуку развязкаў, у даследаванні аперацый, у тэорыі гульняў) як найвялікшы выйгрыш з тых, што можа атрымаць суб'ект, які развязвае праблему ў найгоршых для яго ўмовах. З дапамогай М. атрымліваецца гарантаваны выйгрыш. Матэматычнае мадэляванне канфліктных сітуацый або пошук развязкаў ва ўмовах недакладнасці на падставе М. адпавядае прынцыпу гарантаванага выніку. Лікавае значэнне М. не большае за лікавае значэнне адпаведнага *мінімаксу.* Аналагічны пошук (знаходжанне) М. (1) або (2) (а таксама мінімаксаў) часта бывае вельмі цяжкай задачай, і ў такіх выпадках М. знаходзяць з дапамогай лікавых метадаў; 2) раздзел вылічальнай матэматыкі, дзе разглядаецца развязанне максімінавых (мінімаксавых) задач. Задачы вылічэння М. часта ўзнікаюць у даследаванні аперацый, у тэорыі гульняў, напрыклад пры выкарыстанні прынцыпу гарантаванага выніку, а таксама пры матэматычным мадэляванні канфліктных сітуацый на падставе М. Тыповая задача вылічэння М. — задача (2), якая ўзнікае, напрыклад, пры развязанні антаганістычных гульняў. Разам з агульнымі падыходамі да развязання мінімаксавых задач існуе цэлы шэраг прыёмаў, арыентаваных на тыя або іншыя спецыяльныя класы задач, напрыклад знаходжанне седлавых пунктаў, лінейныя мінімаксавыя задачы, білінейныя мінімаксавыя задачы і г.д.

МА́КСІМУМ ФУ́НКЦЫІ (ад лац. maximum — найвялікшае) — найбольшае значэнне функцыі, якая прымае рэчаісныя значэнні. Непарыўная ў

пункце x_0 функцыя $f(x)$ мае ў x_0 максімум (лакальны), калі існуе δ-акруга U_δ пункта x_0, што для ўсіх $x \in U_\delta$ выконваецца няроўнасць $f(x) \le f(x_0)$. Найбольшае значэнне $f(x)$ на ўсім зададзеным мностве X называецца абсалютным (глабальным) максімумам на гэтым мностве. Гл. *Экстрэмум.*

МА́КСЎЭЛА РАЗМЕРКАВА́ННЕ — размеркаванне непарыўнай выпадковай велічыні x, якое задаецца шчыльнасцю імавернасці

$$P(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{x^2}{\sigma^3} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

М.р. мае матэматычнае спадзяванне $Mx = 2\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$ і дысперсію $Dx = \dfrac{2\pi - 8}{\pi}\sigma^2$. Даўжыня выпадковага вектара, каардынаты якога незалежныя і маюць нармальнае размеркаванне з параметрамі 0 і σ^2, дае прыклад М.р. Хуткасці часцінак у статыстычнай механіцы і фізіцы таксама маюць М.р.

МА́ЛЕРА ПРАБЛЕ́МА — гіпотэза ў дыяфантавых набліжэннях. Для рэчаісных лікаў М.п. азначае наступнае: даказаць, што для кожнага $\varepsilon > 0$ няроўнасць $|P(\omega)| < (H(P))^{-n-\varepsilon}$ мае для амаль усіх $\omega \in R$ (паводле меры Лебэга) толькі канцавое мноства развязкаў у мнагасkладах $P(\omega)$ ступені не больш за n з цэлымі рацыянальнымі каэфіцыентамі. Тут $H(P)$ — максімум модуляў каэфіцыентаў $P(\omega)$. М.п. развязаў акад. У.Спрынджук у 1964 г. М.п. адыграла вялікую ролю ў класіфікацыі рэчаісных і камплексных лікаў, а таксама ў метрычнай тэорыі дыяфантавых набліжэнняў.

МАЛО́ГА ПАРА́МЕТРА МЕ́ТАД — сукупнасць прыёмаў будавання набліжаных развязкаў дыферэнцыяльных раўнанняў і сістэм, якія змяшчаюць у яўным або няяўным выглядзе малыя параметры, што характарызуюць параўнальную малечыню тых або іншых фактараў. Адрозніваюць два віды залежнасці раўнання (або сістэмы) ад параметра — рэгулярную і сінгулярную. Для развязання задач тэорыі дыферэнцыяльных раўнанняў, якія змяшчаюць малыя параметры, распрацаваны эфектыўныя метады. Значныя цяжкасці звязаныя з абгрунтаваннем М.п.м. і атрыманнем колькасных ацэнак абсягу прыдатнасці пабудаваных набліжаных развязкаў. Выкарыстанне М.п.м. апраўданае ў тых выпадках, калі неадхіленая задача дапускае дакладны развязак. М.п.м. упершыню прапанаваны для развязання задач нябеснай механікі, звязаных з вывучэннем руху планет у Сонечнай сістэме. Да шырокага выкарыстання камп'ютараў гэты метад быў адным з асноўных сродкаў даследавання і будавання набліжаных развязкаў розных дастасоўных задач. Далейшае развіццё М.п.м. звязанае з праблемай рэалізацыі вылічальных алгарытмаў на камп'ютарах.

МАНАГЕ́ННАЯ ФУ́НКЦЫЯ — функцыя $f(z)$, вызначаная на мностве $E \subseteq \mathbf{C}$, у канцавым неізаляваным пункце $z_0 \in E$, калі яна мае ў гэтым пункце канцавую вытворную

$$f'(z_0) \overset{\text{def}}{=} \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in E}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Функцыя, манагенная ў кожным неізаляваным пункце мноства E, называецца манагеннай на мностве E. Калі $E = D$ і D — абсяг, то функцыя, манагенная на D, называецца *аналітычнай функцыяй* у D. Калі E не ёсць абсяг, то манагенныя на E функцыі, увогуле кажучы, не маюць уласцівасцяў, характэрных для аналітычных функцый.

***F*-МАНАГЕ́ННАЯ ФУ́НКЦЫЯ** — *гіперкамплексная функцыя*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{m} f_k(x) e_k,$$

дзе $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D \subset \mathbf{R}^n$, $\{e_k\}$, $k = \overline{1, m}$, — базіс камутатыўна-асацыятыўнай алгебры з адзінкай над полем рэчаісных або камплексных лікаў, называецца *F*-м.ф. (манагеннай у сэнсе Фёдарава) па іншай гіперкамплекснай функцыі

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(x) e_k$$

у абсягу D, калі існуе такая функцыя $f'(x)$, што для ўсякага фіксаванага пункта $x \in D$ і для кожнага зменнага пункта $x' = (x_1', x_2', \ldots, x_n')$ маем

$$\Delta f = f' \Delta\varphi + \varepsilon(x, x'),$$

дзе $\Delta f = f(x') - f(x)$, $\Delta\varphi = \varphi(x') - \varphi(x)$, $\dfrac{\varepsilon(x,x')}{\rho} \to 0$, калі $\rho \to 0$, $\rho = |\overline{x, x'}|$. У прыватнасці, *F*-м.ф. па φ ёсць функцыі φ^n, e^φ і ўсякая функцыя f аналітычная ад φ. Для *F*-м.ф. пабудаваныя аналагі тэарэм, вядомых у тэорыі аналітычных функцый адной камплекснай зменнай; атрымана новае інтэграль-

нае выяўленне для функцый многіх камплексных зменных; знойдзены дастасаванні да даследавання дыферэнцыяльных раўнанняў у частковых вытворных. F-м.ф. выкарыстоўваюцца ў тэорыі пруткасці, гідрадынамікі і інш. Гэтае паняцце ўпершыню разглядаў У.Фёдараў.

МАНАТО́ННАЯ ПАСЛЯДО́ЎНАСЦЬ — паслядоўнасць (x_n) такая, што для ўсіх $n = 1, 2, ...$ выконваецца адна з няроўнасцяў: $x_n < x_{n+1}$ (паслядоўнасць строга нарастае), $x_n \leq x_{n+1}$ (паслядоўнасць не спадае), $x_n > x_{n+1}$ (паслядоўнасць строга спадае), $x_n \geq x_{n+1}$ (паслядоўнасць не нарастае). У кожнай М.п. існуе ліміт канцы, калі паслядоўнасць абмежаваная, і $+\infty$ або $-\infty$, калі неабмежаваная.

МАНАТО́ННАЯ ФУ́НКЦЫЯ — функцыя адной зменнай, вызначаная на нейкім падмностве рэчаісных лікаў, прырост якой $\Delta f(x) = f(x_2) - f(x_1)$ пры $\Delta x = x_2 - x_1 > 0$ або заўсёды неадмоўны, або заўсёды недадатны. М.ф. называецца с т р о г а м а н а т о н н а й, калі $\Delta f(x) > 0$ ці $\Delta f(x) < 0$ пры $\Delta x > 0$.

Тыпы манатонных функцый

$\Delta f(x) \geq 0$	нарастальная (неспадальная)	
$\Delta f(x) \leq 0$	спадальная (ненарастальная)	
$\Delta f(x) > 0$	строга нарастальная	
$\Delta f(x) < 0$	строга спадальная	

Функцыя f манатонная (строга манатонная) на нейкім прамежку, калі на гэтым прамежку вытворная функцыі f не змяняе знак (захоўвае сталы знак).

МАНАТО́ННЫ АПЕРА́ТАР — аператар, які для ўсіх x, y з гільбэртавай прасторы H праўдзіць няроўнасць $(Ax - Ay, x - y) \geq 0$.

МАНІТО́Р (англ. monitor, ад лац. monitor — перасцерагальны) — 1) кіроўная праграма; 2) высокаўзроўневы механізм узаемадзеяння і сінхранізацыі працэсаў, які забяспечвае арганізацыю доступу да непадзельных рэсурсаў. Складаецца з набору працэдур і інфармацыйных структур. Ім можа карыстацца ў кожны момант толькі адзін працэс. Працэс, які спрабуе звярнуцца да працэдуры М., калі М. у гэты час абслугоўвае іншы працэс, пераходзіць у стан чакання і ставіцца ў чаргу; 3) дысплей, канструктыўна зроблены асобна ад клавіятуры і цэнтральнага блока камп'ютара.

МАНО́ІД — паўгрупа з адзінкай; непустое мноства М., на якім вызначана бінарная алгебраічная асацыятыўная аперацыя (множанне) і ў якім існуе такі элемент e, што $ex = xe = x$ для кожнага $x \in M$. Элемент e называецца адзінкай. У кожным М. ёсць адна адзінка. Калі вызначаная ў М. аперацыя камутатыўная, то яна называецца с к л а д а н н е м, адзінка — н у л ё м. Напрыклад: мноства ўсіх адлюстраванняў адвольнага мноства X у сябе ў дачыненні да аперацыі кампазіцыі (множання) адлюстраванняў (сіметрычная паўгрупа на мностве X) — гэта М., тоеснае адлюстраванне — адзінка. Мноства эндамарфізмаў адвольнай універсальнай алгебры з'яўляецца М. Кожная група ёсць М. Кожную паўгрупу без адзінкі можна ўкласці ў М. Кожны М. G можна ўкласці ў сіметрычную паўгрупу на мностве G. Кожны М. ізаморфны паўгрупе ўсіх эндамарфізмаў нейкай універсальнай алгебры, вызначанай на мностве G.

МАНТЫ́СА (ад лац. mantissa — дадатак) — дробавая частка дзесятковага лагарыфма.

МА́РКАВА ЛАНЦУ́Г — выпадковы працэс Маркава з канцом або злічальным мноствам станаў. Няхай прастора станаў — мноства натуральных лікаў N або яго канцае падмноства, $\xi(t)$ — этап М.л. у момант t. Для М.л. з дыскрэтным часам (калі t набывае цэлыя неадмоўныя значэнні) выконваецца Маркава ўласцівасць: $\forall t, j, i_1, i_2, ..., i_k \in N$ і ўсіх цэлых t_i, $i = \overline{1, k}$, $0 < t_1 < t_2 < ... < t_k < t$ мае месца роўнасць

$$P\{\xi(t) = j \mid \xi(t_1) = i_1, ..., \xi(t_k) = i_k\} =$$
$$= P\{\xi(t) = j \mid \xi(t_k) = i_k\}.$$

Пры апісанні М.л. карыстаюцца пераходнымі імавернасцямі $P\{\xi(t) = j \mid \xi(t_k) = i\}$. Калі яны не залежаць ад t, ланцуг называецца а д н а р о д н ы м. (Далей разглядаюцца толькі такія ланцугі.) Матрыца $P\|p_{ij}\|$ называецца м а т р ы ц а й п е р а х о д н ы х і м а в е р н а с ц я ў. Імавернасць адвольнай траекторыі $\xi(k) = i_k$ можна запісаць з дапамогай пачатковага размеркавання $P\{\xi(0) = i_0\}$ і пераходных імавернасцяў

$$P\{\xi(k) = i_k,\ k = \overline{0, t}\} = P\{\xi(0) = i_0\} \prod_{k=1}^{z} P_{i_{k-1} i_k}.$$

Пераходныя імавернасці за t крокаў

$$P_{i_1}(t) = P\{\xi(t_0 + t) = j \mid \xi(t_0) = i\}$$

задавальняюць раўнанне Чэпмэна—Калмагорава

$$P_{ij}(t_1+t_2)=\sum_k P_{ik}(t_1)P_{kj}(t_2).$$

З дапамогай пераходных імавернасцяў станы М.л. падзяляюцца на спалучаныя і неспалучаныя, істотныя і неістотныя, зваротныя і незваротныя і г.д.

Калі t набывае адвольныя значэнні з інтэрвала $[0, \infty)$, то М.л. — гэта ланцуг з непарыўным часам. Для іх звычайна патрабуюць дадаткова, каб існавалі концыя правыя вытворныя $\left.\frac{dP_{ij}(t)}{dt}\right|_{t=0}=q_{ij}$.

Для концага М.л. з непарыўным часам з дапамогай раўнання Чэпмэна—Калмагорава можна атрымаць сістэму прамых і адваротных дыферэнцыяльных раўнанняў Калмагорава:

$$\frac{dP_{ij}(t)}{dt}=\sum_k P_{ik}(t)q_{kj},\quad \frac{dP_{ij}(t)}{dt}=\sum_k q_{ik}P_{kj}(t),$$

да якіх далучаюцца пачатковыя ўмовы $P_{ij}(0)=\delta_{ij}$, дзе δ_{ij} — сімвал Кронэкера. Пры некаторых дадатковых дапушчэннях гэтыя сістэмы раўнанняў справядлівыя і для злічальных М.л. Калі М.л. з непарыўным часам мае стацыянарнае размеркаванне $P\{\xi(t)=i\}=P_i$ (размеркаванне $\xi(t)$, незалежнае ад часу t), то гэтае размеркаванне $\{P_i\}$ задавальняе сістэму лінейных раўнанняў

$$\begin{cases}\sum_i p_i q_{ij}=0, & j=1,2,\dots,\\ \sum_i p_i=1.\end{cases}$$

МА́РКАВА НЯРО́ЎНАСЦЬ — няроўнасць для вытворных алгебраічнага мнагасклада. Няхай $P_n(x)$ — алгебраічны мнагасклад ступені не вышэй за n і $M=\max\limits_{a\le x\le b}|P_n(x)|$. Тады для вытворных мнагасклада праўдзіцца М.н.:

$$|P_n^{(2)}(x)|\le\frac{M2^r n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)\cdot\ldots\cdot(n^2-(r-1)^2)}{(b-a)^r(2r-1)!!},$$

$$a\le x\le b,\quad 1\le r\le n.$$

Даказаў А.Маркаў (1892).

МА́РКАВА ПРАЦЭ́С — спецыяльны клас выпадковых працэсаў, які з'яўляецца мадэллю для распаду радыеактыўнага рэчыва, росту папуляцыі, размеркавання эпідэмій, флуктуацыі яркасці галактык і г.д. Выпадковы працэс $x(t)$ называецца М.п., калі для кожных двух момантаў часу t_0 і t_1, $t_0<t_1$, умоўнае размеркаванне $x(t_1)$ пры ўмове, што зададзены ўсе значэнні $x(t)$ для $t\le t_0$, залежыць толькі ад $x(t_0)$. Гэтая ўласцівасць, якая вызначае М.п., называецца ўласцівасцю Маркава або адсутнасцю насляўздзеяння: стан нейкай сістэмы ў момант часу t_0 аднaзначна вызначае размеркаванне імавернасцяў наступнага развіцця працэсу пры $t>t_0$. Тэорыя М.п. пачынаецца з працы А.Маркава па Маркава ланцугах (1907). Агульную тэорыю М.п. і іх класіфікацыю даў А.Калмагораў (1932).

МА́РКАВА ТЭАРЭ́МА — *вялікіх лікаў закон* у форме Маркава. Калі паслядоўнасць выпадковых велічыняў $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_k(\omega), \dots$ такая, што

$$\frac{1}{n^2}D\left[\sum_{k=1}^n\xi_k(\omega)\right]\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

($D(\cdot)$ — дысперсія велічыні $(\cdot)$), то мае месца закон вялікіх лікаў:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n(\xi_k(\omega)-a_k)\xrightarrow[n\to\infty]{P}0,$$

дзе $a_k=\mathrm{Э}\xi_k(\omega)$, гэта значыць, што $\forall\varepsilon>0$

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\xi_k(\omega)-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k\right|<\varepsilon\right\}\xrightarrow[n\to\infty]{}1.$$

МАРТЫНГА́Л — стахастычная паслядоўнасць ξ_t, вызначаная на імавернаснай прасторы (Ω, F, P) і F_t-вымерная, дзе $F_t\subset F$ і $F_s\subset F_t$, калі $s\le t$ такая, што $E|\xi_t|<\infty$, $E(\xi_t|F_s)=\xi_s$, калі $s\le t$. Блізкімі тэрмінамі з'яўляюцца стахастычныя паслядоўнасці, якія ўтвараюць субмартынгал $E(\xi_t|F_s)\ge\xi_s$ і супермартынгал $E(\xi_t|F_s)\le\xi_s$. Напрыклад, $\xi_1, \xi_2\dots$ — паслядоўнасць незалежных выпадковых велічыняў з $E\xi_i=0$, $i=1,2,\dots$, $S_n=\xi_1+\dots+\xi_n$, $F_n=\sigma(\xi_1,\dots,\xi_n)$. Тады (S_n, F_n) ёсць М.

МАРФІ́ЗМ (ад грэц. morphe — форма) — неазначальны тэрмін тэорыі катэгорый. Кожная катэгорыя складаецца з элементаў двух класаў — класа аб'ектаў і класа марфізмаў. М. абагульняе паняцці адлюстравання мностваў, гомамарфізмаў групаў, колцаў і інш., непарыўных адлюстраванняў тапалагічных прастораў і г.д.

МА́САВАГА АБСЛУГО́ЎВАННЯ СІСТЭ́МА — паняцце, якое ўлучае выпадковую плынь патрабаванняў і праблему іх абслугоўвання. Трэба стварыць алгарытм, які абслугоўвае. Мнагастайнасць алгарытмаў абслугоўвання стварае вялікую колькасць розных сістэм абслугоўвання. Гл. *Масавага абслугоўвання тэорыя.*

МА́САВАГА АБСЛУГО́ЎВАННЯ ТЭО́РЫЯ — раздзел тэорыі імавернасцяў, які вывучае плыні патрабаванняў на абслугоўванне, працягласць чакання, даўжыню шэрагаў і г.д., а таксама іх залежнасць ад правілаў абслугоўвання. Мэта даследавання — рацыянальны выбар структуры сістэмы абслугоўвання і працэсу абслугоўвання. У большасці задач М.а.т. плыні патрабаванняў выпадковыя, г.зн. паслядоўнасць момантаў наступлення патрабаванняў на абслугоўванне разглядаецца як паслядоўнасць выпадковых велічыняў. Патрабаванні, якія маюць большы прыярытэт, абслугоўваюцца ў першую чаргу. Калі яны наступаюць у М.а.т., тады перарываецца абслугоўванне патрабаванняў з меншым прыярытэтам.

У М.а.т. распрацоўваюцца агульныя метады разліку сістэм абслугоўвання. Аснова часткі такіх метадаў — ідэя выяўлення працэсу змены станаў сістэмы абслугоўвання як Маркава працэсу з дыскрэтным або непарыўным мноствам станаў. У простых задачах імавернасці станаў сістэм абслугоўвання знаходзяцца як развязкі канцых ці бясконцых сістэм лінейных раўнанняў. Больш складаныя сістэмы апісваюцца інтэгра-дыферэнцыяльнымі раўнаннямі з частковымі вытворнымі. Паказнікі якасці працы сістэм абслугоўвання знаходзяцца з дапамогай статыстычнага мадэлявання. Разам з агульнымі метадамі ў М.а.т. часам прапануюцца і арыгінальныя метады, якія выкарыстоўваюць спецыфіку канкрэтных сістэм абслугоўвання.

МА́САВАЯ ПРАБЛЕ́МА — тое, што *алгарытмічная праблема.*

МАТРО́ІД — *граф* спецыяльнага выгляду. М. задаецца мноствам V элементаў і сям'ёй $E = \{E_1, E_2, ...\}$ падмностваў V, што называюць незалежнымі мноствамі, з праўдзівасцю наступных аксіём: 1) пустое мноства незалежнае; 2) адвольнае падмноства незалежнага мноства незалежнае; 3) для адвольнага падмноства $A \in E$ усе незалежныя мноствы М., што ў A, якія з'яўляюцца максімальнымі па ўлучэнні ў дачыненні да A, маюць адвольную колькасць элементаў. Прыкладам М. з'яўляецца мноства V радкоў адвольнай прамавугольнай матрыцы і сям'і E усіх падмностваў мноства V, што ўтвораны лінейна незалежнымі радкамі.

МА́ТРЫЦА (ад лац. matrix — крыніца, пачатак) — прамавугольная табліца A, утвораная з элементаў нейкага мноства, якая мае m радкоў і n слупкоў і запісваецца ў выглядзе

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix} \text{ ці } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Кожную табліцу называюць прамавугольнай М. памеру $m \times n$ з элементамі a_{ij} (гэты элемент знаходзіцца ў i-м радку і j-м слупку). Калі $m = n$, то М. называюць квадратнай, а лік n — яе парадкам. Скарочана М. A запісваюць так: $A = \|a_{ij}\|$ або $A = (a_{ij})$ $(j \le i \le m;\ i \le j \le n)$. М., якая атрымліваецца з A заменай радкоў на слупкі, называецца транспанаванай М. у дачыненні да A і пазначаецца A^T ці A'. Звычайна элементы М. — рэчаісныя і камплексныя лікі.

Сумай дзвюх М. A і B памеру $m \times n$ называецца М. $A + B$ таго ж памеру, (i, j) элемент якой роўны $a_{ij} + b_{ij}$, $a_{ij} \in A$, $b_{ij} \in B$. Здабыткам М. A на лік α называецца М. αA з элементамі αa_{ij}. Здабытак дзвюх М. A і B вызначаецца толькі для ўзгодненых матрыц — такіх М. A і B, у якіх колькасць слупкоў першага множніка роўная колькасці радкоў другога множніка. У гэтым выпадку элементы М. $C = AB$ вызначаюцца формулай

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}.$$

Абодва здабыткі AB і BA вызначаны толькі для квадратных М. аднаго парадку, пры гэтым здабытак не абавязкова адзін і той жа. Кожнай квадратнай М. можна паставіць у адпаведнасць лік $d = \det A = \det a_{ij}$, які называецца *вызначнікам* М. Калі $d \ne 0$, то A называюць *незвыроднай матрыцай*, калі $d = 0$, то A называецца *звыроднай матрыцай*. Для адвольнай незвыроднай матрыцы A існуе адзіная адваротная М. A^{-1}, што вызначаецца роўнасцю $AA^{-1} = E$. Азначаецца таксама ступень A^k, $k \in \mathbf{N}$, і мнагасклады $P_n(A)$.

На мове М. натуральным чынам фармулююцца задачы квадратовых формаў лінейных раўнанняў, сістэм дыферэнцыяльных раўнанняў, задач матэматычнай статыстыкі і інш.

Гістарычна М. як матэматычнае паняцце з'явілася ў працах У.Гамільтана, А.Кэлі і Дж. Сільвестра ў сярэдзіне 19 ст.

МА́ТРЫЧНАЯ ГРУ́ПА — падгрупа групы ўсіх матрыц фіксаванага парадку над нейкім полем.

МА́ТРЫЧНАЯ ГУЛЬНЯ́ — антаганістычная гульня, у якой гульцы маюць концую колькасць стратэгій. Калі, напрыклад, адзін з іх мае *m* стратэгій, а другі — *n* стратэгій, то М.г. можа быць зададзеная *m* × *n*-матрыцай.

МАТЭМА́ТЫКА (грэц. mathematike ад mathema — веды, навука) — навука, якая вывучае колькасныя стасункі і прасторавыя формы рэчаіснага свету, а таксама абстрактныя тэорыі і сувязі першапачатковых стасункаў і формаў.

М. узнікла яшчэ ў старажытнасці з практычных патрэб. Неабходнасць падліку рэчаў на першых прыступках развіцця культуры падвяла да стварэння найпрасцейшых паняццяў арыфметыкі натуральных лікаў. Толькі пасля распрацоўкі сістэмы вуснага лічэння ўзнікаюць пісьмовыя сістэмы лічэння і паступова абгрунтоўваюцца 4 арыфметычныя аперацыі з натуральнымі лікамі. Патрэбы вымярэння колькасці, даўжыні і г.д. спрычыніліся да з'яўлення простых дробаў, а таксама дзеянняў з імі. Такім чынам пачала складвацца самая старажытная з матэматычных навук — *арыфметыка.* Вымярэнне плошчаў і аб'ёмаў, патрэбы будаўніцтва, пазней і астраноміі выклікалі неабходнасць развіцця пачаткаў *геаметрыі.* Удасканаленне ведаў ішло ў многіх народаў свету незалежна і паралельна. Часам пад уплывам аб'ектыўных законаў, а часам і выпадкова ў тых або іншых краінах з'яўляліся шматлікія матэматычныя факты, іх глыбокія абагульненні, якія потым распаўсюджваліся ў іншыя краіны. Так, у Вавілоніі на аснове развітай тэхнікі арыфметычных вылічэнняў узніклі пачаткі *алгебры*, а ў сувязі з патрэбамі астраноміі — пачаткі *трыганаметрыі.* Гэтыя дасягненні сістэматычна былі асэнсаваныя ў старажытнай Грэцыі. Створаная тут элементарная геаметрыя на 2 тысячагоддзі стала прыкладам дэдукцыйнага будавання матэматычнай тэорыі. З арыфметыкі паступова складаецца *лікаў тэорыя.* Аднак паняцці адмоўнага і рацыянальнага лікаў уяўлялі сабою складаныя матэматычныя абстракцыі, бо не мелі рэальнага асэнсавання ў практыцы, і таму стварэнне алгебры як літарнага злічэння было завершанае толькі ў пачатку 17 ст.

З гэтага моманту прадмет М. ужо не вычэрпваецца лікамі, велічынямі і геаметрычнымі фігурамі. М. пачынае разглядаць аб'екты, якія рухаюцца і змяняюцца. На першы план выходзіць паняцце функцыі. Вывучэнне зменных велічыняў і функцыйных залежнасцяў прыводзіць да асноўных паняццяў *матэматычнага аналізу.* Узнікае ідэя бясконцасці, дзякуючы якой у аналіз уваходзяць паняцці ліміту, вытворнай, дыферэнцыяла, інтэграла. Ствараецца аналіз бясконца малых, найперш у выглядзе *дыферэнцыяльнага злічэння* і *інтэгральнага злічэння.* Асноўныя законы механікі і фізікі запісваюцца ў выглядзе *дыферэнцыяльных раўнанняў*, і задача іх развязання становіцца адной з асноўных задач М. Узнікаюць раўнанні, якія трэба развязаць у дачыненні да невядомых функцый (*варыяцыйнае злічэнне*). Пашыраецца тэматыка геаметрыі з пранікненнем у яе ідэй руху і пераўтварэння фігур. Ствараюцца *аналітычная геаметрыя* і *праектыўная геаметрыя.* Адбываецца сінтэз ідэй геаметрыі, алгебры і аналізу. Створаныя ў 17—18 стст. матэматычныя кірункі інтэнсіўна развіваліся ў 19—20 стст. Надзвычай пашырыліся за той час мноствы задач, якія ўзніклі ў тэхніцы і прыродазнаўчых навуках і патрабавалі матэматычнага асэнсавання. Вялікія якасныя працэсы адбываліся і ў самой М. Многія праблемы і тэорыі вынікалі з патрэбы нутранога развіцця М. Менавіта так пачыналіся першыя крокі тэорыі функцый камплекснай зменнай (гл. *Функцый тэорыя*), якая неўзабаве заняла цэнтральнае месца ва ўсім матэматычным аналізе. Другім значным прыкладам нутранога развіцця матэматыкі стала *Лабачэўскага геаметрыя.* Абагульненне вектарных і тэнзарных выяўленняў на бясконцамерныя велічыні мела вынікам стварэнне *функцыянальнага аналізу.*

Пашырэнне тэмаў матэматычных даследаванняў у М. прывяло да пытанняў абгрунтавання зыходных пастулатаў (аксіём) М., будовы строгай сістэмы азначэнняў і доказаў, а таксама лагічных разважанняў, з дапамогай якіх робяцца доказы. Глыбокі аналіз патрабаванняў да лагічнай строгасці доказаў, будовы матэматычных тэорый, пытанняў алгарытмічнай развязальнасці і неразвязальнасці матэматычных праблем садзейнічаў стварэнню самастойнага раздзела М. — *матэматычнай логікі.* Пад уплывам значных дастасаванняў матэматычнага аналізу ў электрадынаміцы, тэорыі магнетызму, тэрмадынаміцы развіваецца механіка непарыўнага асяроддзя. Асноўны матэматычны апарат у гэтых дастасаваннях — *дыферэнцыяльныя раўнанні звычайныя* і дыферэнцыяльныя раўнанні з частковымі вытворнымі. У сваю чаргу развіццё гэтых кірункаў дало штуршок для з'яўлення *тапалогіі.* Аналіз выпадковых падзей з цягам часу пачаў выходзіць за межы класічнага, камбінаторнага азначэння імавернасці. І зноў шматлікія дастасаванні разам з філасофскім асэнсаваннем катэгорыі выпадковага прывялі да стварэння самастойнага матэматычнага раздзела —

імавернасцяў тэорыі, якая пачынае ствараць свой уласны апарат даследаванняў дзякуючы сувязі з рэальным светам праз *матэматычную статыстыку*. Шмат глыбокіх праблем развязваецца таксама ў тэорыі лікаў, якая ўзбагачаецца метадамі алгебры, аналізу, тэорыі імавернасцяў. Стварающца такія новыя кірункі, як *алгебраічная тэорыя лікаў*, *аналітычная тэорыя лікаў*, *дыяфантавы набліжанні*. Інтэнсіўна развіваюцца новыя галіны алгебры: тэорыі групаў, палёў, колцаў, агульных алгебраічных сістэм. Тэмамі даследаванняў у геаметрыі становяцца пытанні *дыферэнцыяльнай геаметрыі*, *алгебраічнай геаметрыі*, *Рымана геаметрыі*. У выніку сістэматычнага будавання матэматычнага аналізу на аснове строгай тэорыі ірацыянальных лікаў і тэорыі мностваў узнікла тэорыя функцый рэчаіснай зменнай. Набліжаныя метады развязання шэрагу задач, нягледзячы на іх тэарэтычную абгрунтаванасць, часам амаль не ўжываліся, бо патрабавалі вельмі складаных вылічэнняў. Апошнім часам з прычыны хуткага прагрэсу ў вылічальнай тэхнікі змянілася праблематыка даследаванняў матэматыкаў нават у даўно сфармаваных класічных раздзелах алгебры, геаметрыі, тэорыі лікаў і г.д. З'явіліся новыя кірункі М.: *аўтаматаў тэорыя*, *гульняў тэорыя*, *аперацый даследаванне*, графаў даследаванне, *кібернетыка*, *матэматычная эканоміка*, аптымальнага кіравання тэорыя, *дыскрэтны аналіз*, *пазнаванне вобразаў* і г.д.

У Беларусі першы друкаваны падручнік арыфметыкі "Алгарытм, або Навука лічбы" быў выдадзены ў Вільні ў 1602 г. Звесткі пра матэматычную адукацыю ў Беларусі ёсць, напрыклад, у рукапісе Сімяона Полацкага (1629—80). Ён сам выкладаў у Полацкай праваслаўнай брацкай школе і засведчыў, што на занятках па матэматыцы вучням паведамлялі ўласцівасці цэлых лікаў і дробаў, дзеянні з імі. Таксама развязваліся тэкставыя задачы, а з геаметрыі вучні засвойвалі правілы вылічэнняў плошчаў, аб'ёмаў. Важнае месца займалі пераўтварэнні фігур у роўнавялікія і вымярэнні на мясцовасці. У 17—19 стст. значны ўклад у развіццё матэматыкі і матэматычнай адукацыі зрабілі многія ўраджэнцы Беларусі. Так, Галляш Капіевіч (Капіеўскі, 1651—1714) выдаў першы дапаможнік (1699) па арыфметыцы на расійскай мове. Ён напісаў і выдаў яшчэ некалькі навучальных дапаможнікаў і меў наконт гэтага перапіску з Н.Ляйбніцам. Якуб Накцыяновіч (1725—90) працаваў выкладчыкам у Навагрудку і Горадні. У гады працы ў Віленскім універсітэце ён выдаў на лацінскай мове два падручнікі — "Матэматычныя лекцыі" і "Элементы геаметрыі". Выкладчыкам матэматыкі ў Полацку працаваў Марцін Пачобут-Адляніцкі (1728—1810). У 1780—1803 гг. ён быў рэктарам Галоўнай школы Вялікага Княства Літоўскага, у якую была пераўтвораная Віленская езуіцкая акадэмія, заснаваная ў 1579 г. Шмат беларусаў было і сярод прафесараў матэматыкі Віленскага універсітэта. Мікалай Тамашэўскі (нарадзіўся ў 1756) чытаў лекцыі па геаметрыі, быў доктарам філасофіі (з 1780). Антон Шагін (1798—1845) чытаў курсы нарыснай геаметрыі, геадэзіі і надрукаваў дапаможнік па геадэзіі (1829). Мадэст Палінскі (1785—1848) у гады працы ў Мінскай гімназіі (1809—13) падрыхтаваў рукапіс навучальнага дапаможніка па алгебры. Затым працаваў у Віленскім універсітэце (з 1819 прафесар, у 1823—32 дэкан). Выдаў (1816) дапаможнік па геадэзіі, трыганаметрыі. Платон Пагарэльскі (1800—52), які нарадзіўся ў Віцебскай губерні, працаваў у Маскоўскім універсітэце, а затым дырэктарам 3-й маскоўскай гімназіі. Яго падручнік па алгебры вытрымаў 8 выданняў. П.Пагарэльскі быў першым (хатнім) настаўнікам матэматыкі П.Чабышова. Пад кіраўніцтвам Язэпа Малевіча (нарадзіўся ў 1813 у Віцебскай губерні) пачала вывучаць матэматыку Соф'я Кавалеўская (1850—91). Яна жыла ў вёсцы Палібіна Віцебскай губерні ў сям'і генерал-лейтэнанта В.Корвін-Крукоўскага і стала першай у свеце жанчынай-прафесарам і першай жанчынай, абранай у Пецярбургскую АН. За працы па аваротах цвёрдага цела ў 1888 г. яна атрымала прэмію Бардэна Парыжскай АН і ў 1889 г. — прэмію Шведскай АН. Асноўны матэматычны вынік, атрыманы С.Кавалеўскай, — *Кашы—Кавалеўскай тэарэма*. Тры дапаможнікі па геаметрыі і методыцы яе выкладання выдаў у 1912—14 гг. Пётр Курылка, які нарадзіўся ў Клімавіцкім павеце Магілёўскай губерні.

Пасля скасавання прыгоннага права значна вырасла колькасць народных школаў. Для падрыхтоўкі настаўнікаў была створаная настаўніцкая семінарыя ў Маладзечне (першая ў Беларусі і Расійскай імперыі), у якой з 1870 г. уведзены трохгадовы тэрмін навучання. Неўзабаве настаўніцкія семінарыі былі заснаваныя ў Полацку (1872), Нясвіжы (1875), Свіслачы (1876), потым у Рагачове (1909), Оршы (1911), Барысаве (1915). Важным крокам у падрыхтоўцы педагагічных кадраў стала заснаванне настаўніцкіх інстытутаў у Віцебску (1910), Магілёве (1913) і Мінску (1914). Многія выхаванцы гімназіі і іншых навучальных установ

Беларусі ўславілі свой край поспехамі ў навуковай матэматычнай дзейнасці. Мікалай Ястрэбскі (1808—74), які нарадзіўся ў Рэчыцкім павеце Мінскай губерні, скончыў Віленскі універсітэт, потым Пецярбургскі інстытут інжынераў корпуса шляхоў зносін, у якім застаўся працаваць (з 1842 прафесар). Напісаў дзве кнігі па механіцы, за якія стаў лаўрэатам Дзямідаўскай прэміі (1839). Удакладніў рускую тэрміналогію практычнай механікі. Першым у Расіі пачаў даследаванні па дынаміцы машын і супору матэрыялаў. Іпаліт Яўневіч (1831—1903) з Сенненскага павета Магілёўскай губерні працаваў у Пецярбургскім тэхналагічным інстытуце (з 1868 прафесар, у 1868—87 дэкан). Выдаў першую манаграфію на рускай мове па тэорыі пругкасці. Займаўся пытаннямі пругкасці, гідраўлікі, тэорыі набліжання функцый. Аўтар некалькіх навучальных дапаможнікаў па механіцы і гідраўліцы. Васіль Ермакоў (1845—1922), які нарадзіўся недалёка ад Гомеля, працаваў прафесарам (з 1877) у Кіеўскім універсітэце. Атрымаў значныя вынікі ў тэорыі шэрагаў, дыферэнцыяльных раўнанняў, варыяцыйным злічэнні, алгебры, механіцы. Чл.-кар. Пецярбургскай АН (з 1884), аўтар больш як 150 прац. Выхаванец Пінскай гімназіі Іван Даўбня быў прафесарам, загадчыкам кафедры, рэктарам Пецярбургскага горнага інстытута, напісаў блізу 100 навуковых і навукова-метадычных прац па алгебры, геаметрыі, дыферэнцыяльных раўнаннях з частковымі вытворнымі. Амаль палова іх надрукаваная ў часопісах, што выдаваліся Ж.Ліўвілем і Ж.Дарбу. У прадмове да яго кнігі Ж.Дарбу адзначыў, што працы І.Даўбні праславілі аўтара і краіну, дзе ён нарадзіўся. Герман Мінкоўскі (1864—1909), з мястэчка Аляксоты Мінскай губерні, стварыў геаметрычную тэорыю лікаў, аўтар фундаментальных прац па матэматычнай фізіцы, гідрадынаміцы. Яго імя назаўсёды ўвайшло ў матэматыку ў тэрмінах "тэарэмы Мінкоўскага", "няроўнасць Мінкоўскага", "прастора Мінкоўскага". У Варшаўскім універсітэце з 1904 г. працаваў прафесарам сын селяніна з вёскі Забялышына Клімавіцкага павета Магілёўскай губерні Іван Брайцаў. У 1918—47 гг. прафесар, загадчык кафедры, дэкан Ніжагародскага універсітэта. Навуковыя кірункі яго даследаванняў — тэорыя аналітычных функцый, функцыянальныя раўнанні, спецыяльныя функцыі. Браў удзел у стварэнні БДУ, аўтар праекта першага навучальнага плана для фізіка-матэматычнага факультэта. З Мазыра праз Віцебскую гімназію і Маскоўскае тэхнічнае вучылішча прыйшоў у навуку Уладзімір Дабравольскі (1881—1956). Займаўся механікай, тэорыяй механізмаў. Чл.-кар. АН СССР (1946), лаўрэат прэміі імя П.Чабышова (1946). Пётр Папковіч нарадзіўся у Брэст-Літоўску (Брэст). Стаў членам-карэспандэнтам АН СССР (1933), лаўрэатам Дзяржаўнай прэміі СССР (1946). Асноўныя навуковыя даследаванні прысвечаныя механіцы будовы карабля, дыферэнцыяльным раўнанням, тэорыі пругкасці. Выхадзец з Магілёва Ота Шміт (1891—1956) акрамя астраноміі і геафізікі займаўся алгебрай. Яго манаграфія па абстрактнай тэорыі групаў (1916) значна паўплывала на далейшае развіццё тэорыі групаў. У вядомай праблеме Гольдбаха першы прынцыповы крок зрабіў гамяльчанін чл.-кар. АН СССР (1933) Леў Штрэльман (1905—38). Акрамя гэтага, ён атрымаў істотныя вынікі ў варыяцыйным злічэнні.

Даследаванні па матэматыцы ў БССР да 1941 г. праводзіліся ў Беларускім дзяржаўным універсітэце, Беларускай дзяржаўнай сельскагаспадарчай акадэміі (БСГА), Фізіка-матэматычным інстытуце АН БССР, Віцебскім педагагічным інстытуце. Асноўнымі кірункамі навуковых і навукова-метадычных даследаванняў былі дыферэнцыяльныя раўнанні (Я.Сіроцін, Ц.Бурстын, А.Гельфанд, М.Разоўскі); геаметрыя (І.Богаяўленскі, Ц.Бурстын, Ч.Дамброўскі, У.Дыдырка, А.Мацісава, А.Крайцоў, Е.Фартунатава, М.Рыўкін); алгебра (Ц.Бурстын, Я.Громер, У.Пісневіч); тэорыя функцый рэчаіснай зменнай (Ц.Бурстын, А.Турэцкі); тэорыя функцый камплекснай зменнай (У.Брайцаў, М.Ламбін, М.Лукомская); лікавыя і графічныя метады, набліжаныя метады ў алгебры (І.Богаяўленскі, Ч.Дамброўскі, М.Лукомская, В.Ляўковіч, А.Крайцоў); тэорыя імавернасцяў і матэматычная статыстыка, матэматычная апрацоўка вынікаў вымярэнняў (І.Богаяўленскі, В.Папоў, А.Дубах, П.Хадаровіч); матэматычная фізіка, матэматычныя метады ў механіцы (М.Ламбін, С.Мельнік, М.Шарамецеў); методыка выкладання матэматыкі, выданне навучальных дапаможнікаў (І.Богаяўленскі, Ц.Бурстын, Ч.Дамброўскі, А.Круталевіч, В.Ляўковіч, В.Руткоўскі, Г.Сагаловіч, М.Сталяроў); метадалогія навукі, філасофскія пытанні матэматыкі (Б.Армфельт, Ц.Бурстын, Г.Нахімоўская). Праф. БДУ У.Дыдырка напісаў першую манаграфію "Цыркулярныя крывыя 3-га парадку" (1928; другая частка — на беларускай мове).

Акрамя навуковай і педагагічнай дзейнасці матэматыкі Беларусі разам з філолагамі актыўна займаліся стварэннем беларускай навуковай тэр-

міналогіі. За кароткі час былі выдадзены "Слоўнік геамэтрычных і трыганамэтрычных тэрмінаў і сказаў" (Коўна, 1923) К.Дуж-Душэўскім і В.Ластоўскім і "Слоўнік матэматычнае тэрмінолёгіі" (праект, выданне Інстытута беларускай культуры, Мінск, 1927). Апошняе выданне, зробленае матэматычнай секцыяй Беларускай навукова-тэрміналагічнай камісіі пры ўдзеле А.Міхайлоўскага, Я.Пятосіна, У.Дыдыркі, К.Гайдуцкага-Цвіркі, А.Лёсіка, Я.Коласа, А.Кругалевіча, было настолькі ўдалым, што зрабіла значны ўплыў не толькі на выкладанне, мову тагачасных падручнікаў і манаграфій, але і на стварэнне сучаснай беларускай матэматычнай тэрміналогіі.

Аўтарамі першых падручнікаў для студэнтаў ВНУ на беларускай мове былі прафесар БСГА І.Богаяўленскі (Аналітычная геаметрыя. Горкі, 1932. 206 с.) і акад. Ц.Бурстын (Курс дыферэнцыяльнай геаметрыі. Менск, 1933. 338 с.; Уводзіны ў рыманаву дыферэнцыяльную геаметрыю, ч. І. Менск, 1936. 209 с.). Два дапаможнікі на беларускай мове надрукаваў А.Кругалевіч (Элементы варыяцыйнай статыстыкі. Менск, 1933; Элементы вышэйшай матэматыкі. Менск, 1933). Ён аўтар першых дапаможнікаў на беларускай мове для сярэдніх навучальных устаноў (Элементарная алгебра, ч. І. Берлін, 1922; ч. 2. Менск, 1924; Трыганаметрыя. Менск, 1928). Пасля 1936 г. на працягу амаль 60 гадоў (да 1994) не выйшаў ніводзін падручнік па матэматыцы для ВНУ на беларускай мове.

Пра насляваенны стан М. у Беларусі гл. у арт. *Алгебра*, *Геаметрыя*, *Лікаў тэорыя*, *Матэматычны аналіз* і інш.

МАТЭМАТЫЧНАЕ ЗАБЕСПЯЧЭННЕ к а м п у т а р а — тое, што *праграмнае забеспячэнне.*

МАТЭМАТЫЧНАЕ ПРАГРАМАВАННЕ — раздзел матэматыкі, прысвечаны тэорыі і метадам пошуку экстрэмуму (максімуму або мінімуму) функцый некалькіх зменных пры наяўнасці дадатковых абмежаванняў на гэтыя зменныя, якія маюць форму роўнасцяў або няроўнасцяў. М.п. аформілася ў 1950-х гг. у выніку практычнага ўжывання ў задачах выбару аптымальнага варыянта з мноства магчымых варыянтаў. Задачы такога тыпу ўзнікаюць у многіх кірунках мэтанакіраванай дзейнасці: у эканоміцы (планаванне і кіраванне эканамічнымі аб'ектамі), у тэхніцы (пошук найлепшага праекта або аптымальнай канструкцыі), у вайсковай справе (планаванне баявых дзеянняў і кіраванне войскамі), у іншых раздзелах матэматыкі (тэорыя апраксімацый, матэматычная статыстыка і інш.).

Тыповая задача М.п.: максімізаваць мэтавую функцыю $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на дапушчальным мностве G, дзе G задаецца сістэмай няроўнасцяў $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X$, а X — нейкае падмноства з $\mathbf{R}^n$. У большасці практычных задач X задаецца як $\mathbf{R}^n_+$ (неадмоўная частка $\mathbf{R}^n$). Таму апошняя ўмова ў гэтым выпадку азначае неадмоўнасць усіх зменных $x_j \geq 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Элемент $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, які адпавядае ўсім умовам задачы, называецца д а п у ш ч а л ь н ы м (або ш ч ы л ь н ы м) р а з в я з к а м; дапушчальны элемент, на якім f прымае найбольшае значэнне ў параўнанні з іншымі дапушчальнымі элементамі (блізкімі да разгляданага), называецца (лакальна) а п т ы м а л ь н ы м р а з в я з к а м.

Розныя тыпы задач М.п. атрымліваюцца пры канкрэтызацыі ўмоў на мэтавую функцыю f і абмежаванні g_i (або на дапушчальнае мноства G). Так, калі $X = \mathbf{R}^n_+$, f і g_i — лінейныя функцыі, то атрымліваецца задача *лінейнага праграмавання*; задачы, у якіх усе або частка функцый нелінейныя, называюць задачамі *нелінейнага праграмавання.* Калі мноства G складаецца з абмежаванай колькасці элементаў, атрымліваецца задача д ы с к р э т н а г а п р а г р а м а в а н н я. Задачам, у якіх f і (або) g_i залежаць ад параметраў, прысвечанае *параметрычнае праграмаванне.* У задачах *стахастычнага праграмавання* ўлічваецца залежнасць f і (або) g_i ад выпадковых абставін (фактараў). Паасобку паўстае *дынамічнае праграмаванне*, у якім пошук аптымальнага развязку (незалежнага ад канкрэтнага выгляду f і g_i) ажыццяўляецца ў выглядзе многаступеневага працэсу. Да М.п. можна далучыць задачы, у якіх мэтавая функцыя вектарназначная. У гэтым выпадку паўстае пытанне пра паняцце аптымальнасці, якое патрабуе ўдакладнення. Задачы такога тыпу складаюць сутнасць *многакрытэрнай аптымізацыі.*

МАТЭМАТЫЧНАЕ СПАДЗЯВАННЕ, с я р э д н я е з н а ч э н н е — адна з галоўных характарыстык размеркавання імавернасцяў выпадковай велічыні. Калі выпадковая велічыня X набывае паслядоўнасць значэнняў $X_1, X_2, \ldots, X_k, \ldots$ з імавернасцямі $p_1, p_2, \ldots, p_k$ адпаведна, то М.с. знаходзіцца па формуле $MX = \sum_{k=1}^{\infty} X_k p_k$ пры ўмове, што шэраг абсалютна збежны; для выпадковай велічыні X з непарыўным размеркаваннем са

шчыльнасцю імавернасці $P(x)$ справядлівая формула $MX = \int_{-\infty}^{+\infty} xP(x)dx$ пры ўмове абсалютнай збежнасці інтэграла. Пры даволі слабых абмежаваннях каля М.с. групуюцца значэнні выпадковых велічыняў. Пры складанні выпадковых велічыняў іх М.с. складаюцца, а пры множанні незалежных выпадковых велічыняў іх М.с. перамнажаюцца. Паняцце М.с. упершыню з'явілася ў працах Б.Паскаля і Х.Гюйгенса ў 17 ст., а дакладны назоў яму даў П.Лапляс (1795). Многія важныя характарыстыкі выпадковых велічыняў — *дысперсія, момант, характарыстычная функцыя* азначаюцца праз М.с.

МАТЭМАТЫ́ЧНАЙ ІНДУ́КЦЫІ МЕ́ТАД — адзін з метадаў доказу ў матэматыцы. Гл. *Матэматычная індукцыя.*

МАТЭМАТЫ́ЧНАЙ ФІ́ЗІКІ РАЎНА́ННІ — дыферэнцыяльныя раўнанні ў частковых вытворных, а таксама некаторыя падобныя да іх раўнанні — інтэгральныя, інтэгра-дыферэнцыяльныя, функцыянальныя, якія матэматычна апісваюць фізічныя працэсы. Незалежныя зменныя ў М.ф.р. — звычайна прасторавыя каардынаты і час, шуканая функцыя — пэўная фізічная велічыня. Напрыклад, у раўнанні ваганняў струны $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (першае з М.ф.р., даследаванае матэматыкамі) u — адхіленне ад стану раўнавагі пункта струны з каардынатай x у момант часу t.

М.ф.р. класіфікуюцца паводле тыпаў. У агульным выпадку, калі раўнанне мае адвольны парадак, класіфікацыя вельмі складаная. Для раўнанняў 2-га парадку (з дзвюма незалежнымі зменнымі)

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + fu = 0$$

класіфікацыя адбываецца паводле сукупнасці складнікаў, якія маюць вытворную вышэйшага парадку. Разглядаецца звычайнае дыферэнцыяльнае раўнанне 1-га парадку другой ступені:

$$a\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - 2b\frac{\partial u}{\partial x} + c = 0$$

(раўнанне характарыстык). Калі дыскрымінант $\Delta = b^2 - ac$ дадатны, М.ф.р. называецца г і п е р б а л і ч н ы м, калі $\Delta < 0$ — э л і п т ы ч н ы м, калі $\Delta = 0$ — п а р а б а л і ч н ы м. Кожнаму тыпу раўнанняў характэрныя свая форма задання краявой або пачатковай умовы (гл. *Краявая задача, Кашы задача*), свае метады развязання, адзін з якіх — стварэнне інтэгральнага раўнання, развязак якога задавальняе разам і дыферэнцыяльнае раўнанне, і дадатковыя (краявыя або пачатковыя) умовы. Калі каэфіцыенты раўнання залежаць ад x, y, то і дыскрымінант таксама ёсць функцыя гэтых зменных. Пры гэтым можа здарыцца, што ў розных пунктах плоскасці раўнанне належыць да розных тыпаў. Калі абсяг задання раўнання такі, што ў адной частцы яно эліптычнае, а ў другой — гіпербалічнае, тады лічыцца, што раўнанне з м я ш а н а е. Лінія падзелу называецца л і н і я й з в ы р о д н а с ц і, на ёй раўнанне парабалічнае. Раўнанні эліптычнага тыпу апісваюць розныя стацыянарныя працэсы (электрастатыкі, магнітастатыкі і інш.), напрыклад, стацыянарнае размеркаванне тэмпературы ў целе вызначаецца *Лапласа раўнаннем*. Гіпербалічныя раўнанні апісваюць хвалевыя працэсы. Раўнанні парабалічнага тыпу атрымліваюцца пры даследаванні цеплаправоднасці, дыфузіі, руху глейкай вадкасці і іншых фізічных з'яваў.

МАТЭМАТЫ́ЧНАЯ ІНДУ́КЦЫЯ — метад доказу матэматычных сцверджанняў, заснаваны на прынцыпе: сцверджанне $A(n)$, якое залежыць ад натуральнага параметра n, лічыцца даказаным для ўсякага $n \geq n_0$, калі: 1) даказана праўдзівасць $A(n_0)$, 2) з таго, што праўдзіцца $A(k)$, выведзена $A(k+1)$, $\forall k \geq n_0$, $k \in \mathbf{N}$.

Доказ $A(n_0)$ складае п е р ш ы к р о к (або б а з і с) і н д у к ц ы і, а доказ $A(k+1)$ пры меркаванні, што мае месца $A(k)$, называецца і н д у к ц ы й н ы м п е р а х о д а м. Пры гэтым n называецца п а р а м е т р а м і н д у к ц ы і, а меркаванне $A(k)$ пры доказе $A(k+1)$ — індукцыйным меркаваннем. Існуюць абагульненні М.і., у якіх параметр n прымае значэнні з таго або іншага мноства, упарадкаванага паводле пэўнага трансфінітнага тыпу. Такія абагульненні называюцца т р а н с ф і н і т н а й і н д у к ц ы я й.

МАТЭМАТЫ́ЧНАЯ КІБЕРНЕ́ТЫКА — галіна навукі, якая вывучае матэматычныя мадэлі кібернетычных сістэм і распрацоўвае матэматычныя метады іх аналізу і сінтэзу. М.к. займае асаблівае становішча ў матэматыцы і кібернетыцы, знаходзячыся на мяжы гэтых навук. Сучасная М.к. складаецца з шэрагу раздзелаў, якія ўяўляюць сабою самастойныя навуковыя кірункі. Яе ядро ўтвараюць матэматычная логіка, тэорыя інфармацыі, тэорыя аўтаматаў, тэорыя алгарытмаў,

тэорыя кіравальных сістэм, тэорыя фармальных аперацый, тэорыя аптымальнага кіравання. М.к. шырока ўжывае вылічальныя метады, метады аптымізацыі, метады імітацыйнага мадэлявання. Яна значна ўплывае на развіццё многіх раздзелаў дыскрэтнай матэматыкі — тэорыі графаў, тэорыі кадавання, камбінаторнага аналізу і г.д., якія ў сваю чаргу служаць асновай для развіцця М.к. У Беларусі даследаванні па М.к. ажыццяўляюцца з пачатку 1960-х гг. у інстытутах матэматыкі і тэхнічнай кібернетыкі НАН Беларусі, у вылічальным цэнтры НАН Беларусі, БДУ, БДУІР.

МАТЭМАТЫ́ЧНАЯ ЛІНГВІ́СТЫКА — матэматычная дысцыпліна, у якой распрацоўваюцца і вывучаюцца паняцці, звязаныя з будовай натуральных моваў. Узнікла ў сярэдзіне 20 ст. у сувязі з аўтаматызацыяй перапрацоўкі моўнай інфармацыі і, у прыватнасці, з аўтаматычным перакладам з адной мовы на іншую. М.л. складаецца з трох асноўных раздзелаў: 1) распрацоўка і вывучэнне спосабаў апісання будовы мовы; 2) вывучэнне лінгвістычна-вартасных дачыненняў і класіфікацый на мностве моўных аб'ектаў; 3) тэорыя фармальных граматык. М.л. знаходзіць дастасаванні ў тэорыі праграмавання для апісання моваў праграмавання і транслятараў.

МАТЭМАТЫ́ЧНАЯ ЛО́ГІКА, с і м в а л ь н а я л о г і к а — раздзел матэматыкі, у якім вывучаюцца матэматычныя доказы і пытанні асноў матэматыкі.

Яшчэ ў Сярэднявеччы ўзнікла ідэя пра тое, што магчыма замяніць лагічныя разважанні нейкімі вылічэннямі, калі запісаць усе зыходныя сцверджанні на мове спецыяльных знакаў. Дакладна ж сфармуляваныя правілы такіх логікавых вылічэнняў магчыма перавесці на мову вылічальнай машыны, якая зможа аўтаматычна даваць высновы, што нас цікавяць, з зыходных сцверджанняў. Пэўную "логікавую машыну" сканструяваў Р.Лулій (1235—1315). Больш акрэсленую мадэль універсальнай логікавай мовы для ўсёй матэматыкі і фармалізацыі на яе базе матэматычных доказаў развіваў Г.Ляйбніц у 17 ст. Але толькі ў сярэдзіне 19 ст. з'явіліся першыя навуковыя працы па алгебрызацыі арыстотэлевай логікі (Дж.Буль, 1847 і О.дэ Морган, 1858), якія далі пачатак стварэнню сучаснага апарата ў М.л. — *логікі выказванняў*. Г.Фрэгe (1879) і Ч.Пірс (1885) увялі ў мову логікі прэдыкаты, зменныя і квантары. Дж.Расэл і А.Уайтхед у супольнай працы "Прынцыпы матэматыкі" (выдадзеная ў 1910—12) паспрабавалі звесці ўсю матэматыку да логікі. Хоць гэтая спроба не была паспяховай, у іх працах быў створаны логікавы апарат, без якога афармленне М.л. як матэматычнай дысцыпліны было б немагчымае. Адкрыццё ў пачатку 20 ст. Г.Кантарам і Б.Расэлам парадоксу ў тэорыі мностваў сведчыла пра тое, што тэорыя мностваў у яе наіўным разуменні супярэчлівая. Нагадаем у якасці прыкладу п а р а д о к с Р а с э л а (1903). Няхай M — мноства ўсіх такіх мностваў, кожнае з якіх не з'яўляецца сваім уласным элементам. Лёгка пераканацца, што мноства M ёсць свой элемент, калі і толькі калі M не з'яўляецца сваім элементам. Магчымыя спробы выйсці са створанай супярэчлівасці, калі прыйсці да высновы, што такога мноства не існуе. Але калі не існуе мноства, утворанага дакладна з усіх элементаў, якія задавальняюць дакладна вызначаную ўмову, то дзе гарантыя, што ў звычайных матэматычных разважаннях не з'явяцца мноствы, якія таксама не могуць існаваць. Такім чынам можна атрымаць супярэчлівасць у звычайных матэматычных разважаннях. Відавочнай стала неабходнасць абмежавання кантаравай тэорыі мностваў. Л.Браўэр (1908) прапанаваў інтуіцыянісцкую праграму будавання матэматыкі, у якой, у прыватнасці, адмаўляецца ад разгляду абстракцыі актуальнай бясконцасці, закону скасаванага трэцяга. Станоўчы ўклад інтуіцыяністаў палягае ў тым, што яны яшчэ раз падкрэслілі адрозненне паміж канструктыўным і неканструктыўным у матэматыцы, зрабілі старанны аналіз цяжкасцяў, з якімі сутыкнулася матэматыка, і тым самым спрыялі іх пераадоленню. Іншы шлях пераадолення цяжкасцяў, што ўзніклі ў матэматыцы на мяжы 19—20 стст., вызначыў Д.Гільбэрт. Ён заснаваны на выкарыстанні аксіяматычнага метаду фармальных мадэляў змястоўнай матэматыкі і на даследаванні пытанняў супярэчлівасці такіх мадэляў надзейнымі фінітнымі сродкамі, а таму атрымаў назоў ф і н і т ы з м Г і л ь б э р т а. Пытанні несупярэчлівасці розных тэорый разглядаліся і раней. Так, пабудаваная Ф.Кляйнам (1871) праектыўная мадэль неэўклідавай геаметрыі Лабачэўскага зводзіць пытанне пра супярэчлівасць геаметрыі Лабачэўскага да супярэчлівасці геаметрыі Эўкліда. Несупярэчлівасць эўклідавай геаметрыі можна звесці да несупярэчлівасці аналізу, г.зн. тэорыі рэчаісных лікаў. Аднак не было вядома, якімі сродкамі можна будаваць мадэлі аналізу і арыфметыкі для доказу іх несупярэчлівасці. Заслуга Д.Гільбэрта ў тым, што ён паказаў просты шлях для даследавання гэтага пытання. Несупярэчлівасць дадзенай тэорыі азначае, што ў ёй немагчыма атрымаць супярэчлівасць, г.зн. немагчыма даказаць нейкае сцверджанне A і адначасова

яго адмаўленне. Д.Гільбэрт прапанаваў аформіць разгляданую тэорыю ў выглядзе фармальнай аксіяматычнай сістэмы, у якой выводныя ўсе тыя і толькі тыя сцверджанні, якія з'яўляюцца тэарэмамі гэтай тэорыі. Тады для доказу супярэчлівасці дастаткова выявіць, што пэўнае сцверджанне — гэта не выснова ў разгляданай тэорыі. Тым самым матэматычная тэорыя, несупярэчлівасць якой трэба даказаць, становіцца прадметам вывучэння матэматычнай навукі, якую Д.Гільбэрт назваў метаматэматыкай ці тэорыяй доказаў. Гэтая праграма абгрунтавання матэматыкі натхніла яго сучаснікаў на інтэнсіўную распрацоўку аксіяматычнага метаду, хоць *Гёдэля тэарэма пра няпоўнасць* арыфметыкі (1931) пахіснула надзеі Д.Гільбэрта на поўнае абгрунтаванне асноў матэматыкі названым спосабам.

Асноўнае даследаванне логікавых і логіка-матэматычных злічэнняў (фармальных тэорый) — класічнае *прэдыкатаў злічэнне*. К.Гёдэль (1930) даказаў тэарэму пра поўнасць злічэння прэдыкатаў, паводле якой мноства ўсіх чыстых логікавых сцверджанняў матэматыкі супадае з мноствам усіх выводных у злічэнні прэдыкатаў формул (гл. *Гёдэля тэарэма пра поўнасць*). Гэтая тэарэма паказвае, што злічэнне прэдыкатаў — гэта тая логікавая сістэма, на базе якой можна фармалізаваць матэматыку. На аснове злічэння прэдыкатаў будуюць розныя логіка-матэматычныя тэорыі, якія ўяўляюць сабою фармалізацыю змястоўных матэматычных тэорый — арыфметыкі, аналізу, тэорыі мностваў, тэорыі групаў і інш. Разам з гэтымі (элементарнымі) тэорыямі разглядаюцца таксама тэорыі вышэйшых парадкаў, у якіх дазваляюцца квантары на прэдыкатах, прэдыкаты ад прэдыкатаў і г.д. Традыцыйныя пытанні, якія даследуюцца для тых або іншых сістэм, — пытанні выводнасці тых або іншых формул несупярэчлівасці, поўнасці і развязальнасці разгляданых сістэм. У выніку аналізу кантаравай сістэмы мностваў і звязаных з ёю парадоксаў былі пабудаваныя сістэмы аксіяматычнай тэорыі мностваў, у якіх прымаецца тое або іншае абмежаванне на стварэнне мностваў, каб пазбегнуць атрымання вядомых парадоксаў. Пытанне пра несупярэчлівасць моцных аксіяматычных тэорый мностваў, такіх, як сістэма Цэрмела—Фрэнкеля або тэорыя Куайна, застаецца адкрытым.

Вывучэнне поўнасці той або іншай тэорыі мае вялікае значэнне. У многіх матэматычных тэорыях паўстаюць канкрэтныя праблемы, якія не ўдаецца ні даказаць, ні абвергнуць, напрыклад, у тэорыі мностваў Цэрмела—Фрэнкеля гэта *кантынуум-гіпотэза* Кантара і *выбару аксіёма* (К.Гёдэль, 1939; П.Коэн, 1963). Тэарэма Гёдэля пра няпоўнасць сцвярджае, што дастаткова багатая тэорыя мае сцверджанні, якія нельга ні даказаць, ні абвергнуць у рамках гэтай тэорыі. Тым не менш некаторыя важныя тэорыі поўныя, напрыклад такія, як элементарная геаметрыя, тэорыя вектарных прастораў.

Вельмі важнае пытанне пра развязальнасць матэматычных тэорый. Так, А.Тарскі (1948) пабудаваў канкрэтны алгарытм, які дазваляе паводле ўсякага сцверджання элементарнай геаметрыі высветліць, ці праўдзівае гэтае сцверджанне. Аднак многія дастаткова багатыя тэорыі, напрыклад арыфметыка, аналіз, тэорыя групаў, неразвязальныя, г.зн. не існуе алгарытму, які дазваляе паводле ўсякага сцверджання тэорыі пазнаць, праўдзівае яно ці не. Адно з найбольш значных дасягненняў М.л. — распрацоўка паняцця агульнарэкурсіўнай функцыі і фармулёўка тэзіса Чорча, у якім сцвярджаецца, што паняцце агульнарэкурсіўнай функцыі ёсць матэматычнае ўдакладненне інтуіцыйнага паняцця алгарытму. З іншых эквівалентных удакладненняў паняцця алгарытму адзначым паняцце *Т'юрынга машыны* і нармальнага алгарытму Маркава. Паняцце алгарытму ў матэматыцы сустракаецца паўсюдна і з даўніх часоў. Але толькі пасля яго ўдакладнення ўзнікла магчымасць даказаць існаванне неразвязальных алгарытмічных праблем у розных раздзелах матэматыкі — алгебры, тэорыі лікаў, тапалогіі, тэорыі імавернасцяў і інш. Сярод найважнейшых вынікаў апошняга часу — адмоўнае развязанне Ю.Маціясевіча (1970) 10-й праблемы Гільбэрта: не існуе алгарытму, які дазваляе развязаць пытанне пра існаванне развязку ў сістэме паліномных раўнанняў у цэлых ліках. Распрацоўка дакладнага паняцця алгарытму дала магчымасць удакладніць паняцце эфектыўнасці і развіць канструктыўны кірунак у матэматыцы на аснове пэўных фактаў інтуіцыяніцкага кірунку, але значна адрозны ад яго. У самой тэорыі алгарытмаў можна вылучыць даследаванні па рэкурсіўнай арыфметыцы, па тэорыі нумарацый.

Аксіяматычны метад зрабіў вялікі ўплыў на развіццё многіх раздзелаў матэматыкі, асабліва на алгебру. На мяжы М.л. і алгебры ўзнікла агульная тэорыя алгебраічных сістэм (*мадэляў тэорыя*). Гэты кірунак бярэ пачатак у працах А.Мальцава, А.Тарскага і іх вучняў. Значнае месца ў тэорыі мадэляў займае даследаванне нестандартных мадэляў арыфметыкі і аналізу. У працах стваральнікаў дыферэнцыяльнага злічэння Г.Ляйбніца і А.Нью-

тана бясконца малыя і бясконца вялікія велічыні разглядаліся як лікі. Пазней з'явілася паняцце зменнай велічыні, і матэматыкі адмовіліся ад скарыстання бясконца малых лікаў, модуль якіх адрозніваецца ад нуля і меншы за ўсякі дадатны рэчаісны лік, бо іх ужыванне патрабуе адмаўлення ад аксіёмы Архімеда. І толькі праз тры стагоддзі ўдалося з дапамогай метадаў М.л. высветліць, што (нестандартны) аналіз з бясконца малымі і бясконца вялікімі лікамі несупярэчлівы ў дачыненні да звычайнага (стандартнага) аналізу рэчаісных лікаў. Аксіяматычны метад зрабіў вялікі ўплыў на інтуіцыйную матэматыку. А.Гейтынг (1930) увёў фармальныя сістэмы інтуіцыяніцкай логікі выказванняў і прэдыкатаў. Пазней былі ўведзеныя фармальныя сістэмы інтуіцыйнага аналізу. Спецыяльна вывучаныя таксама суперінтуіцыяніцкія логікі (прамежкавыя паміж класічнай і інтуіцыяніцкай логікамі), а таксама ажыццёўленая фармалізацыя мадальнай логікі. Аднак, нягледзячы на наяўнасць вялікай колькасці прац на фармальных сістэмах мадальнай логікі і па іх семантыцы (мадэлі Крыпке), развіццё іх знаходзіцца на пачатковым этапе.

М.л. мае вялікае дастасоўнае значэнне. Ёю асабліва зацікавіліся, калі стала вядома, што ў рамках М.л. ужо створаны апарат для апісання розных вылічальных і кіравальных дыскрэтных сістэм. Пачалося глыбокае пранікненне ідэй і метадаў М.л. у інфарматыку, тэарэтычную кібернетыку, вылічальную матэматыку, структурную лінгвістыку.

МАТЭМАТЫ́ЧНАЯ МАДЭ́ЛЬ — набліжанае апісанне пэўнага класа з'яваў рэальнага свету з дапамогай матэматычнай сімволікі. Працэс мадэлявання складаецца з чатырох этапаў. Першы этап — фармуляванне законаў, якія звязваюць асноўныя аб'екты мадэлі, і запіс гэтых законаў у матэматычных тэрмінах. Другі этап — даследаванне матэматычных задач, да якіх прыводзіць М.м. (гэты этап мае для матэматыкі і самастойнае значэнне). Трэці этап — высвятленне пытання пра згоду паміж вынікамі назіранняў і тэарэтычнымі высновамі мадэлі ў межах дакладнасці. Чацвёрты этап — аналіз мадэлі з улікам новых дадзеных тэарэтычных доследаў і мадэрнізацыя мадэлі. Метады матэматычнага мадэлявання занялі галоўнае месца сярод іншых метадаў у сувязі з выкарыстаннем камп'ютараў.

МАТЭМАТЫ́ЧНАЯ СТАТЫ́СТЫКА — раздзел матэматыкі, прысвечаны матэматычным метадам сістэматызацыі, апрацоўкі і выкарыстання статыстычных звестак для навуковых і практычных высноў. М.с. цесна звязаная з *імавернасцяў тэорыяй.*

Няхай вывучаецца нейкая колькасная прыкмета. Яе размеркаванне можна задаць пералікам значэнняў назіранняў у парадку іх нарастання: $x_1, \ldots, x_n$. Калі n — вялікі лік, то значэнні $x_1, \ldots, x_n$ групуюць па 10—20 інтэрвалаў, у кожны з якіх трапляе не больш за 15—20% значэнняў x_j. Часам згрупаваныя звесткі зручна выявіць графічна з дапамогай *гістаграм.* Асноўныя характарыстыкі назіранняў — выбаркавае сярэдняе $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ і выбаркавае сярэдняе квадратовае адхіленне $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$. Калі $\bar{x}$ прыняць за ацэнку матэматычнага спадзявання, то яна будзе *слушнай ацэнкай* і *нязрушанай ацэнкай.* Ацэнка σ^2 таксама будзе слушнай, аднак нязрушанай толькі асімптатычна, таму на практыцы часцей карыстаюцца азначэннем $\sigma^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$. Адна з асноўных задач М.с. — задача пра ацэнку параметраў размеркавання (гл. *Давяральнае ацэньванне*).

Значную частку М.с. займаюць пытанні сувязі эмпірычных размеркаванняў з імавернасцямі, праблемы праверкі статыстычных гіпотэзаў і статыстычнай ацэнкі (гл. *Статыстычная гіпотэза, Статыстычная ацэнка*). У М.с. сустракаюцца і выпадкі, калі назіранні з'яўляюцца залежнымі. Існуюць больш агульныя і менш дакладныя метады, якія дазваляюць даць ацэнкі параметраў размеркавання і пры наяўнасці залежнасцяў (гл. *Выбаркавы метад*). Разам з развіццём і удакладненнем агульных паняццяў у М.с. развіваюцца і яе асобныя раздзелы, такія, як *дысперсійны аналіз, статыстычны аналіз.*

М.с. пачала развівацца з канца 17 — пачатку 18 ст. у працах Я.Бэрнулі, П.Ляпляса і С.Пуасона. Асаблівае развіццё М.с. атрымала ў працах П.Чабышова, А.Маркава, А.Ляпунова, С.Бернштэйна. Даследаванні У.Гасэта, Р.Фішэра, Э.Пірсана, Е.Ноймана, А.Калмагорава, У.Раманоўскага, Е.Слуцкага, Н.Смірнова, Ю.Лінніка прывялі да стварэння самастойных метадаў і пераўтварылі набор разрозненых фактаў і тэарэм у асобную навуку — М.с.

МАТЭМАТЫ́ЧНАЯ ФІ́ЗІКА — тэорыя матэматычных мадэляў фізічных з'яваў. Часцей за ўсё мадэлі апісваюцца *матэматычнай фізікі раўнан-*

ямі, але сустракаюцца мадэлі, якія даследуюцца метадамі інтэгральных і інтэгра-дыферэнцыяльных раўнанняў, варыяцыйнымі і імавернаснымі метадамі, метадамі тэорыі функцый камплекснай зменнай і г.д. Дастасаванне камптутараў да задач М.ф. дазволіла эфектыўна развязаць складаныя задачы газавай дынамікі, тэорыі пераносу, фізікі плазмы і г.д. На першым этапе ў задачах М.ф. будуецца матэматычная мадэль, якая апісвае асноўныя законы пэўнага класа фізічных з'яваў. На другім этапе мадэлі даследуюцца матэматычнымі метадамі, у большасці набліжанымі. Абгрунтаваны і аблічаны матэматычны эксперымент з'яўляецца асновай для выбару аптымальных умоваў рэальнай фізічнай з'явы.

МАТЭМАТЫЧНАЯ ЭКАНОМІКА — раздзел матэматыкі, які займаецца даследаваннем задач, што ўзнікаюць у матэматычных мадэлях вытворчасці, размеркавання, абмену і іншых працэсаў у эканоміцы. У М.э. выкарыстоўваюцца вынікі матэматычнага праграмавання, тэорыі гульняў і іншых матэматычных тэорый. У сваю чаргу М.э. стымулявала развіццё многіх раздзелаў матэматыкі, да прыкладу лінейнага праграмавання, тэорыі выпуклых мностваў, бо фармалізацыя эканамічных паняццяў прыводзіць, як правіла, да выпуклых аб'ектаў.

МАТЭМАТЫЧНЫ АНАЛІЗ — раздзел матэматыкі, у якім *функцыі* і іх абагульненні вывучаюцца метадам *лімітаў*.

Назоў М.а. — гэта перайначанае старое найменне "аналіз бясконца малых". Паняцце ліміту непасрэдна звязанае з паняццем бясконца малой велічыні, таму можна казаць, што М.а. вывучае функцыі, а таксама функцыяналы і аператары метадам бясконца малых. Паколькі законы многіх з'яваў прыроды і працэсаў у тэхніцы апісваюцца з дапамогай функцый, то адсюль вынікае аб'ектыўная важкасць метадаў М.а. як сродкаў вывучэння функцый. М.а. у шырокім сэнсе абымае вельмі значную частку матэматыкі. Ён змяшчае *дыферэнцыяльнае злічэнне*, *інтэгральнае злічэнне*, *функцый тэорыю*, *апраксімацыі тэорыю*, тэорыю *дыферэнцыяльных раўнанняў*, тэорыю *інтэгральных раўнанняў*, *дыферэнцыяльную геаметрыю*, *варыяцыйнае злічэнне*, *функцыянальны аналіз*. Сучасныя *лікаў тэорыя* і *імавернасцяў тэорыя* выкарыстоўваюць і ўдасканальваюць М.а.

Тэрмінам М.а. часта называюць толькі асновы матэматычнага аналізу, у якія ўваходзяць тэорыя рэчаісных лікаў, тэорыя лімітаў, дыферэнцыяльнае і інтэгральнае злічэнні функцый адной і некалькіх рэчаісных зменных і тэорыя шэрагаў. Фундаментальным для М.а. з'яўляецца паняцце функцыі, якая азначаецца ў сэнсе Н.Лабачэўскага і П.Дырыхле. Калі кожнаму ліку x з мноства E паводле нейкага закону адпавядае лік y, то кажуць, што зададзеная функцыя $y = f(x)$ адной зменнай x. Аналагічна азначаецца функцыя $f(x) = f(x^1, \ldots, x^n)$ ад n рэчаісных зменных, прычым $x = (x^1, \ldots, x^n)$ разглядаецца як пункт n-мернай прасторы. Важнае значэнне ў М.а. маюць *элементарныя функцыі*, з дапамогай якіх можна набліжаць функцыі больш складанай структуры. У сувязі з вывучэннем элементарных функцый камплекснай зменнай узнікла частка М.а., якая называецца *функцый камплекснай зменнай тэорыяй*.

Важны клас функцый — *непарыўныя функцыі*. Функцыя $y = f(x)$ рэчаіснай зменнай x, зададзеная на інтэрвале (a, b), называецца непарыўнай у пункце $x \in (a, b)$, калі

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} (f(x + \Delta x) - f(x)) = 0.$$

Функцыя, непарыўная ва ўсіх пунктах некатарага мноства, называецца непарыўнай на мностве. Сярод непарыўных функцый вылучаюць функцыі, якія маюць вытворную. Вытворная ад функцыі $y = f(x)$ у пункце $x \in (a, b)$ азначаецца як хуткасць змянення $f(x)$ у гэтым пункце, г.зн.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (1)$$

З дапамогай вытворнай можна даследаваць дыферэнцавальную функцыю на экстрэмум. Роўнасць (1) можна замяніць эквівалентнай $\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x$, дзе $\varepsilon(\Delta x)$ — бясконца малая функцыя пры $\Delta x \to 0$, г.зн. $\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$. Гэта азначае, што калі f мае вытворную ў пункце x, то яе прырост у акрузе гэтага пункта пададзены ў выглядзе сумы, лінейнай у дачыненні да прыросту аргумента Δx функцыі $L(x) = f'(x)\Delta x$ і функцыі $R(\Delta x) = \varepsilon(\Delta x)\Delta x$ — бясконца малой у параўнанні з Δx. Такім чынам, праўдзіцца роўнасць

$$f(x + \Delta x) - f(x) = L(\Delta x) + R(\Delta x). \quad (2)$$

Лінейная частка $dy = L(\Delta x) = f'(x)\Delta x$ прыросту Δf называецца дыферэнцыялам функцыі f у пункце x. З дапамогай роўнасці (2) азначаецца паняцце дыферэнцавальнасці для вектар-функцыі многіх рэчаісных або камплексных зменных.

Аперацыя, адваротная дыферэнцаванню, прыводзіць да паняцця першаіснай. Функцыя

$F(x)$ называецца першаісна й для функцыі $f(x)$ на інтэрвале (a, b), калі для ўсіх x з гэтага інтэрвала выконваецца роўнасць $F'(x) = f(x)$. Мноства ўсіх першаісных на (a, b) называецца нявызначаным інтэгралам і абазначаецца $\int f(x)dx$.

Вызначаны інтэграл Рымана ад функцыі $f(x)$, зададзенай на адрэзку $[a, b]$, уводзіцца з дапамогай сумаў Рымана $\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, дзе $a = x_0 < x_1 < \ldots$ $\ldots < x_n = b$, $x_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta = \max \Delta x_i \to 0$. Тады вызначаны інтэграл Рымана ёсць ліміт інтэгральных сумаў σ, г.зн.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Для ўсіх непарыўных на адрэзку $[a, b]$ функцый інтэграл існуе і мае месца формула Ньютана — Ляйбніца, паводле якой $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, дзе $F(x)$ — адвольная першаісная функцыі $f(x)$. Паняцце інтэграла Рымана абагульняецца на функцыі многіх рэчаісных зменных (гл. *Кратны інтэграл*).

Пры вывучэнні ўласцівасцяў дыферэнцавальных функцый важнае значэнне маюць *Тэйлара формула* і *Тэйлара шэраг*. Калі рэчаісная функцыя $f(x)$ адной рэчаіснай зменнай x мае n-ю вытворную ў пункце x_0, то яе формула Тэйлара мае выгляд $f(x) = P_n(x) + r_n(x)$, дзе

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) +$$

$$+ \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

— паліном Тэйлара, а $r_n(x)$ — рэшткавы складнік, які можна запісаць у форме Пэана: $r_n(x) = o((x - x_0)^n)$ пры $x \to x_0$. Гэта азначае, што n разоў дыферэнцавальную функцыю f у дастаткова малым наваколлі пункта x_0 можна наблізіць з адвольнай ступенню дакладнасці яе паліномам Тэйлара.

Асабліва важныя ў М.а. *аналітычныя функцыі*, якія ў нейкім наваколлі пункта x_0 можна запісаць у выглядзе сумы шэрагу Тэйлара

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Метад раскладання функцыі ў шэраг — эфектыўны сродак М.а., з дапамогай якога вывучаюцца ўласцівасці функцый, вылічваюцца і ацэньваюцца інтэгралы, развязваюцца алгебраічныя, дыферэнцыяльныя і некаторыя іншыя раўнанні. З дапамогай гарманічнага аналізу вывучаюцца *Фур'е шэрагі*.

Метады М.а., а дакладней метад бясконца малых, з поспехам ужываліся вучонымі старажытнай Грэцыі і сярэднявечнай Еўропы пры развязанні розных задач геаметрыі і прыродазнаўства, напрыклад пры вылічэнні плошчы фігур і работы зменнай сілы. Аднак кожная група задач развязвалася сваім метадам. Як адзінае цэлае М.а. сфармаваўся толькі ў 17—18 стст., а яго база — тэорыя лімітаў — была абгрунтаваная ў 19 ст. Першапачатковы ўклад у гэты працэс зрабілі А.Ньютан, Г.Ляйбніц, Л.Ойлер, Ж.Лягранж, К.Гаўс, А.Кашы, Б.Рыман, К.Ваерштрас. Глыбей высветліць сэнс асноўных паняццяў М.а. дазволіла развіццё ў 19—20 стст. тэорыі мностваў, тэорыі меры, тэорыі функцый рэчаіснай зменнай, што вызначыла таксама разнастайныя абагульненні гэтых паняццяў.

Сістэматычнае развіццё М.а. у Беларусі звязанае з адкрыццём у 1921 г. БДУ. Даследаванні значна пашырыліся з сярэдзіны 50-х гг. Атрыманы істотныя вынікі ў галіне камплекснага аналізу і яго дастасаванняў (Ф.Гахаў, М.Ламбін, Э.Зверовіч), лікавых метадаў камплекснага аналізу (У.Крылоў), тэорыі апраксімацыі (А.Турэцкі, В.Русак, А.Пякарскі, В.Прохараў, Я.Роўба), тэорыі спецыяльных функцый (А.Марычаў, В. Ерафеенка, С.Якубовіч), дробавага інтэгра-дыферэнцыяльнага злічэння (А.Кілбас), гарманічнага аналізу і тэорыі аператараў (В.Кротаў), функцыянальнага аналізу (М.Брыш, Ю.Ландо, Я.Радына, А.Антаневіч, А.Лебедзеў, В.Еравенка).

МАТЭМАТЫ́ЧНЫЯ АЛІМПІЯ́ДЫ ў Беларусі — спецыяльна арганізаваныя спаборніцтвы ў ведах па матэматыцы сярод навучэнцкай моладзі з мэтай пошуку таленавітых асобаў і развіцця іх здольнасцяў.

Ідэя М.а. у блізкім да сучаснага выглядзе ўзнікла ў Венгрыі пры канцы 19 ст.

У 1935 г. у Ленінградзе адбылася першая алімпіяда вучняў па матэматыцы, якая дала штуршок алімпіяднаму руху ў СССР.

Першая рэспубліканская алімпіяда вучняў Беларусі па матэматыцы адбылася ў 1951 г. Ад гэтага часу яны пачалі праходзіць рэгулярна, прычым рэспубліканскім алімпіядам папярэднічалі школьныя, раённыя, абласныя. Праз некаторы час

каманда Беларусі пачала ўдзельнічаць ва ўсесаюзнай алімпіядзе. Задачы для алімпіяд падбіраліся з мала распаўсюджаных зборнікаў, задачнікаў для вышэйшай школы, а таксама складаліся сябрамі рэспубліканскай метадычнай камісіі па правядзенні М.а. Асноўным месцам, дзе адораны вучань мог развіваць свае здольнасці, была школа. Гэта тлумачылася высокім прафесійным узроўнем і творчым стаўленнем да сваёй працы многіх настаўнікаў 50—60-х гг. Актыўна працавалі школьныя факультатывы. Пры педінстытутах, БДУ і некаторых навукова-даследчых установах былі створаныя школы юных матэматыкаў, заняткі ў якіх на грамадскіх пачатках вялі выкладчыкі ВНУ і лепшыя студэнты.

З канца 60-х гг. да 1974 г. пераможцы абласных алімпіяд траплялі адразу на ўсесаюзную. У 1975 г. рэспубліканскія алімпіяды былі ўзноўлены. У перыяд да 1991 г. некаторыя беларускія вучні траплялі ў склад каманды Савецкага Саюза і паспяхова ўдзельнічалі ў міжнародных алімпіядах. Бронзавыя медалі заваявалі А.Карлюкоў і В.Бірын, срэбныя — І.Лысёнак і У.Ціценка, залатыя — Л.Барысаў.

З 1992 г. каманда Беларусі выступае на міжнародных алімпіядах як каманда асобнай краіны. За гэты час (да 2000 г.) каманда прывезла 17 бронзавых медалёў, 10 срэбных і 6 залатых (С.Шых, А.Кохан (двойчы), І.Лосеў, І.Ражноў, А.Усніч). Каманда ўпэўнена ўваходзіць у 20 лепшых краін (з 80—85), а на алімпіядах 1999 і 2000 гг. была 6-й і 7-й (наперадзе Германіі, Англіі, Францыі, Японіі).

Найбольшы ўклад у поспех камандаў школьнікаў Беларусі на працягу апошніх 20 гадоў зроблены прафесарамі В.Бернікам, С.Мазанікам, А.Мельнікавым, А.Таўгенем, дацэнтамі І.Вaraновічам, І.Жуком, Я.Барабанавым, В.Каскевічам, выкладчыкамі матэматыкі М.Волкавым, М.Навумікам.

МАТЭМАТЫ́ЧНЫЯ ЗНА́КІ — сістэмы знакаў (сімвалаў), якімі карыстаюцца пры матэматычных вылічэннях.

Узнікненне матэматычнай сімволікі цесна звязанае з агульным развіццём паняццяў і метадаў матэматыкі. Першыя М.з. — *лічбы.* У працах старажытнагрэцкага вучонага Дыяфанта сустракаюцца пачаткі літарных абазначэнняў. Сучасная алгебраічная сімволіка ўзнікла ў 15—17 стст. Развіццё і ўдасканаленне матэматычнай сімволікі спрыяла з'яўленню новых раздзелаў матэматыкі і матэматычнай логікі.

Асноўныя матэматычныя знакі

Знак	Значэнне	Калі і кім уведзены
$+$	складанне	Я.Відман, 1489
$-$	адыманне	
$\times$, $\cdot$	множанне	У.Оўтрэд, 1631, Г.Ляйбніц, 1698
$:$	дзяленне	Г.Ляйбніц, 1684
a^n	ступень	Р.Дэкарт, 1637
$\sqrt{\ }$	корань	А.Жырар, 1629
log	лагарыфм	Б.Кавальеры, 1932
sin, cos	сінус, косінус	Л.Ойлер, 1748
tg	тангенс	Л.Ойлер, 1753
dx, d^2x	дыферэнцыял	Г.Ляйбніц,1675
$\int ydx$	інтэграл	
lim	ліміт	У.Гамільтан, 1853
$=$	роўнасць	Р.Рэкард, 1557
$\equiv$	тоесна	Б.Рыман, 1857
$<, >$	больш, менш	Т.Гарыят, 1631
$\parallel$	паралельнасць	У.Оўтрэд, 1667
∞	бясконцасць	Дж.Уоліс, 1655
e	аснова натуральных лагарыфмаў	Л.Ойлер, 1736
π	тасунак даўжыні акружыны да яе дыяметра	У.Джонс, 1706, Л.Ойлер, 1736
i	уяўная адзінка	Л.Ойлер, 1777
$\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$	адзінкавыя ўзаемна перпендыкулярныя вектары	У.Гамільтан, 1853
$f(x)$	функцыя	Л.Ойлер, 1734
x, y, z	невядомыя або зменныя велічыні	Р.Дэкарт, 1637
a, b, c	адвольныя сталыя	Р.Дэкарт, 1637
$\bar{r}$	вектар	А.Кашы, 1853

МАТЭМАТЫ́ЧНЫЯ КАНФЕРЭ́НЦЫІ Ў БЕЛАРУ́СІ — перыядычныя нарады вучоных-матэматыкаў для абмеркавання вынікаў і распрацоўкі асноўных кірункаў навуковых даследаванняў у галіне матэматыкі ў Беларусі.

У даваенны перыяд адбыліся тры Усебеларускія матэматычныя канферэнцыі. Першая праходзіла ў лютым 1926 г. на педагагічным факультэце БДУ. На канферэнцыі былі агучаны 13 дакладаў на метадычныя тэмы і 4 навуковыя даклады. Абмяркоўваліся таксама праблемы стварэння беларускамоўнай матэматычнай тэрміналогіі. Вынікі гэтага абмеркавання былі ўлічаны пры ўкладанні Інстытутам беларускай культуры тэрміналагічных слоўнікаў. Другая канферэнцыя займалася ў асноўным пытаннямі выкладання матэматыкі і фізікі ў школах. Трэцяя канферэнцыя была арганізаваная АН БССР і БДУ 3—6 студзеня 1934 г. У працы канферэнцыі ўдзельнічалі супрацоўнікі навукова-даследчых устаноў, выкладчыкі ВНУ і тэхнікумаў. Абмяркоўваліся пытанні выкладання матэматыкі і фізікі, а таксама навуковыя і метадалагічныя праблемы. Актыўны ўдзел у гэтых канферэнцыях бралі акад. Ц.Бурстын, прафесары У.Дамброўскі, Я.Пятосін, У.Дыдырка, дацэнты М.Ламбін, А.Мацісава, А.Пахімоўская, В.Пісневіч, Г.Сагаловіч і інш.

У пасляваенны перыяд традыцыя правядзення матэматычных канферэнцый агульнарэспубліканскага ўзроўню была адноўлена ў 60-х гадах (але іх нумарацыя асобная).

Першая рэспубліканская канферэнцыя матэматыкаў Беларусі была праведзена 25—28 студзеня 1964 г. у БДУ. Ініцыятарам яе склікання выступілі матэматычны факультэт БДУ, а таксама Інстытут матэматыкі і вылічальнай тэхнікі АН БССР. У складзе аргкамітэта канферэнцыі былі рэктар БДУ праф. А.Сеўчанка (старшыня), прафесары Ф.Гахаў, А.Іваноў (намеснікі старшыні), дацэнт М.Брыш (навуковы сакратар), а таксама прафесары М.Яругін, Дз.Супруненка, А.Турэцкі, дацэнты А.Гусак, В.Жураўскі, Я.Іваноў, Л.Тутаеў, А.Фядэнка, старшы выкладчык І.Дорскі. Акрамя трох пленарных пасяджанняў працавалі шэсць секцый: звычайныя дыферэнцыяльныя раўнанні; вылічальная матэматыка; алгебра і матэматычная логіка; тэорыя функцый і матэматычная фізіка; геаметрыя; методыка выкладання матэматыкі. У працы канферэнцыі ўдзельнічаў 241 чалавек: з Беларусі — 200 матэматыкаў, з іншых рэспублік СССР — 41 чалавек. Значнасць канферэнцыі ў тым, што гэта быў масавы форум матэматыкаў Беларусі, на якім абмяркоўваўся стан матэматычных даследаванняў у БССР і шляхі павышэння яго ўзроўню. Матэрыялы канферэнцыі выдадзены ў 1965 г.

Другая рэспубліканская канферэнцыя матэматыкаў Беларусі адбылася 27—30 чэрвеня 1967 г. у БДУ. У яе рабоце ўдзельнічалі 398 чалавек: 260 матэматыкаў з Беларусі і 138 навукоўцаў з іншых рэспублік СССР, сярод іх 20 дактароў і 77 кандыдатаў фізіка-матэматычных навук. Адбыліся два пленарныя паседжанні, на якіх з гадзіннымі дакладамі выступілі акад. Дз.Супруненка ("Развіццё матэматыкі ў Беларусі за 50 гадоў") і д-р фізіка-матэматычных навук У.Платонаў ("Пра некаторыя кірункі сучаснага развіцця матэматыкі"). На васьмі секцыйных паседжаннях былі заслуханы 262 даклады. Матэрыялы канферэнцыі выдадзены ў 1968 г.

Трэцяя рэспубліканская канферэнцыя матэматыкаў Беларусі прайшла 4—7 чэрвеня 1971 г. у БДУ. Сярод 478 яе ўдзельнікаў былі 32 дактары і 160 кандыдатаў фізіка-матэматычных навук. У канферэнцыі бралі ўдзел таксама матэматыкі 44 гарадоў СССР. Колькасць секцый пашырылася да 12, на іх былі заслуханы 470 дакладаў, прычым 286 зроблены навукоўцамі з Беларусі. Тэзісы дакладаў надрукаваныя да пачатку канферэнцыі.

Чацвёртая рэспубліканская канферэнцыя матэматыкаў Беларусі "Праблемы развіцця дастасоўных матэматычных даследаванняў" адбылася 3—4 чэрвеня 1975 г. у БДУ. Удзел у канферэнцыі ўзялі 550 матэматыкаў з Беларусі і некаторых рэгіёнаў СССР. Праграма канферэнцыі і зборнік тэзісаў (507 дакладаў) былі надрукаваныя да пачатку канферэнцыі. На пленарным паседжанні з інфармацыяй пра асноўныя кірункі навуковых даследаванняў і найбольш істотныя вынікі, атрыманыя ў Беларусі, выступілі акадэмікі Ф.Гахаў, У.Крылоў, У.Платонаў, Дз. Супруненка, прафесары Ю.Багданаў, В.Вядзернікаў. Праца канферэнцыі была арганізаваная ў 10 секцыях. Матэматыкі Беларусі зрабілі 354 даклады.

Пятая рэспубліканская канферэнцыя матэматыкаў Беларусі працавала 29—31 кастрычніка 1980 г. у Гродзенскім дзяржаўным універсітэце. На паседжанні з дакладам "Развіццё матэматыкі ў Беларусі ў даваенны перыяд" выступіў праф. А.Гусак. Да пачатку канферэнцыі былі апублікаваныя праграма і зборнік тэзісаў (у 2 частках), у які ўлучаны тэзісы 461 даклада. У канферэнцыі ўдзельнічалі 394 чалавекі, пераважная большасць якіх з Беларусі.

Шостая рэспубліканская канферэнцыя матэматыкаў Беларусі праходзіла 29 верасня — 2 кастрычніка 1992 г. у Гро-

дзенскім дзяржаўным універсітэце. Тэзісы 610 дакладаў у 4 частках былі апублікаваныя да пачатку канферэнцыі. На пленарным паседжанні заслуханы даклады чл.-кар. АН Беларусі Л.Яновіча і праф. І.Мартынава. Упершыню за пасляваенны час шэраг навуковых паведамленняў быў зроблены на беларускай мове. На секцыі "Гісторыя матэматыкі і методыка выкладання ў ВНУ" абмяркоўваліся таксама праблемы беларускай матэматычнай тэрміналогіі і напісання навучальнай матэматычнай літаратуры на беларускай мове.

Сёмая Беларуская матэматычная канферэнцыя адбылася ў БДУ 18—22 лістапада 1996 г. Аргкамітэт узначальвалі акад. І.Гайшун і праф. А.Казулін. У складзе 38 сяброў аргкамітэта былі прафесары, рэктары, загадчыкі кафедраў, дэканы факультэтаў розных ВНУ Беларусі, а таксама дырэктары, загадчыкі аддзелаў некаторых інстытутаў АН Беларусі. Тэзісы 518 дакладаў у 3 частках былі надрукаваныя да пачатку канферэнцыі. Для ўдзелу ў працы беларускай канферэнцыі падалі заявы 86 матэматыкаў іншых краінаў (Азербайджана, Алжыра, Германіі, Грузіі, ЗША, Іарданіі, КНР, Латвіі, Літвы, Польшчы, Расіі, Узбекістана, Украіны, Францыі, Японіі).

Восьмая Беларуская матэматычная канферэнцыя праведзена 19—24 чэрвеня 2000 г. Арганізатарамі канферэнцыі выступілі *Беларускае матэматычнае таварыства*, БДУ, Інстытут матэматыкі НАН Беларусі, Дзяржкамітэт па навуцы і тэхналогіях, Міністэрства адукацыі Рэспублікі Беларусь. Для ўдзелу ў канферэнцыі былі пададзены 766 заяваў матэматыкаў з Беларусі і 34 — з іншых краінаў, у тым ліку 87 дактароў і больш за 300 кандыдатаў навук. Інфармацыйныя матэрыялы і тэзісы дакладаў у 4 частках былі надрукаваныя да пачатку канферэнцыі (яны змяшчалі 733 тэзісы). Праца была арганізавана ў 15 секцыях, паседжанні якіх адбываліся ў БДУ, Інстытуце матэматыкі і Інстытуце тэхнічнай кібернетыкі НАН Беларусі, Беларускім дзяржаўным педагагічным універсітэце.

МАТЭМАТЫ́ЧНЫЯ ТАБЛІ́ЦЫ — табліцы, якія змяшчаюць лікавыя значэнні якой-небудзь функцыі, вылічаныя для пэўных значэнняў яе аргумента (або аргументаў). М.т. умоўна падзяляюць на групы: 1) арыфметычныя табліцы для выканання простых падлікаў: табліцы множання, квадратаў, кубаў, развязкаў, а таксама пэўныя табліцы тэорыі лікаў, напрыклад табліцы простых лікаў; 2) табліцы элементарных функцый: алгебраічных выразаў, лагарыфмаў, трыганаметрычных, гіпербалічных і іншых функцый; 3) табліцы спецыяльных (вышэйшых трансцэндэнтных) функцый: гама-функцый, інтэграла імавернасці, артаганальных мнагаскладаў, цыліндрычных функцый розных тыпаў, гіпергеаметрычных функцый, сферычных функцый, эліптычных функцый Якобі, эліптычных інтэгралаў; 4) табліцы матэматычных канстантаў: лікаў π, e і інш. Шматлікія табліцы спецыяльнага прызначэння складзеныя і складаюцца ў матэматычнай статыстыцы, астраноміі, гідраўліцы, геадэзіі і інш.

Для складання табліцы значэнняў функцыі $y = f(x)$ (табуляванні) звычайна выбіраюць дыскрэтныя значэнні зменнай x, якія размешчаныя адзін ад аднаго на некаторай адлегласці (крок табліцы), падлічваюць адпаведныя ім значэнні з той або іншай дакладнасцю. Для вылічэння значэнняў y, размешчаных паміж таблічнымі значэннямі, выкарыстоўваецца інтэрпаляцыя. Для вылічэння М.т. загадзя вызначаюць яе дакладнасць і абсяг змены аргумента, крок выбіраюць так, каб інтэрпаляцыя была простай і дазваляла вылічваць прамежкавыя значэнні з прынятай у М.т. дакладнасцю.

Працэс складання М.т. раней ажыццяўляўся ўручную або з дапамогай простых механічных сродкаў (арыфмометраў, настольных электрычных машын), са з'яўленнем камп'ютараў вылічэнне М.т. значна спрасцілася.

МАТЭМАТЫ́ЧНЫЯ ТЭРМІНАЛАГІ́ЧНЫЯ СЛО́ЎНІКІ — даведкавыя выданні, якія ўтрымліваюць тэрміналагічную лексіку па матэматыцы. Беларускамоўную матэматычную тэрміналогію змяшчаюць наступныя выданні:

1. Арытмэтычная тэрмінолёгія (Беларуская Школьная Рада; Укладзена Камісіяй Менскага Беларус. пед. ін-ту). — Вільня, 1921. — 8 с.

2. Беларуская навуковая тэрмінолёгія. Вып. 1. Элемэнтарная матэматыка (Арытмэтыка. Альгэбра. Гэомэтрыя. Трыгономэтрыя. Асновы аналітычнай гэомэтрыі і вышэйшага аналізу). 901 тэрмін. Дадатак: Слоўнік беларускіх тэрмінаў. — Менск, 1922. — 50 с.

3. *Дуж-Душэўскі К., Ластоўскі В.* Слоўнік геамэтрычных і трыганамэтрычных тэрмінаў і сказаў: (Расійска-беларускі і беларуска-расійскі) — Коўна, 1923. — 128 с.

4. Слоўнік матэматычнае тэрмінолёгіі: Проект. — Менск, 1927. — 144 с.

5. *Сухая Т., Еўдакіменка Р., Траццякевіч В., Гудзень Н.* Тэрміналагічны слоўнік па вышэйшай матэматыцы для ВНУ. — Мн., 1993. — 183 с.

Каля 6000 тэрмінаў. 2 часткі: Руска-беларуская і беларуска-руская. Дадатак: Некаторыя словазлучэнні (рускія і беларускія). Вядомыя матэматыкі.

6. Русско-белорусский математический словарь / Под общ. ред. Я.В.Радыно. — Мн., 1993. — 239 с. 10000 тэрмінаў. Дадатак: Слоўнік імёнаў.

7. Воднеў У.Т., Навумовіч А.Ф., Навумовіч Н.Ф. Малы матэматычны слоўнік. — Мн., 1994. — 144 с. Тэрміны беларускія, рускія, тлумачэнні на беларускай мове. Дадатак: Слоўнік руска-беларускі.

8. Латоцін Л.А. Руска-беларускі слоўнік матэматычных тэрмінаў. — Магілёў, 1994. — 228 с. 9368 словаў і словазлучэнняў.

9. Сельвіч С.Ф. Руска-беларускі матэматычны даведнік. — Мн., 1995. — 122 с. Рускія і беларускія тэрміны падаюцца тэматычна ў асобных раздзелах даведніка.

10. Костюкович Н.Н., Люштик В.В., Щербин В.К. Русско-белорусский словарь математических, физических и технических терминов / Под ред. Н.Н.Костюковича. — Мн., 1995. — 512 с. Блізу 18500 словаў і словазлучэнняў.

МАШЫ́НА (франц. machine, ад лац. machina — прылада) — абстрактная канструкцыя, якая ажыццяўляе перапрацоўку інфармацыі. Часам замест слова М. ужываюць тэрміны «абстрактная машына», «аўтамат». Штуршком да ўзнікнення гэтых паняццяў стала паняцце алгарытму, якое ўвайшло ў матэматычную практыку ў сярэдзіне 1930-х гг. Найбольшае пашырэнне атрымалі М., якія перапрацоўваюць дыскрэтную інфармацыю, — *концыя аўтаматы* і *Т'юрынга машына*. Існуе цесная сувязь паміж *абстрактнымі машынамі* і *кампутарамі*, якія рэальна працуюць.

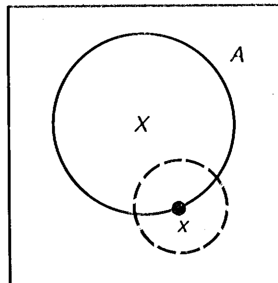
МАШЫ́ННА-АРЫЕНТАВА́НАЯ МО́ВА — мова *праграмавання*, якая дазваляе пры стварэнні праграм улічваць асаблівасці сістэмы камандаў і выяўлення інфармацыі ў вылічальнай машыне (чым адрозніваецца ад універсальных праблемна-арыентаваных моваў праграмавання). Найпрасцейшыя М.-а.м. — *асэмблеры*, якія поўнасцю захоўваюць структуру машыннай праграмы, дазваляюць выкарыстоўваць сімвалавыя абазначэнні для камандаў і адрасоў памяці, а таксама збіраць праграмы з некалькіх асобна напісаных кавалкаў.

МАШЫ́ННАЯ ГРА́ФІКА — комплекс матэматычных, праграмных і тэхнічных сродкаў, якія дазваляюць кампутару ўспрымаць і ўзнаўляць вобразную і графічную інфармацыю. Значэнне М.г. у *праграмным забеспячэнні* кампутараў нарастае. М.г. патрабуе развітога апарату праектыўнай геаметрыі, тэорыі паверхняў. Задачы М.г. спрычыніліся да стварэння новага абсягу дастасоўнай матэматыкі — в ы л і ч а л ь н а й г е а м е т р ы і.

МЕДЫЯ́НА (ад лац. mediana — сярэдняя) — 1) М. у г е а м е т р ы і — адрэзак простай, які злучае вяршыню трохвугольніка з сярэдзінай супрацьлеглай ёй стараны. Тры М. трохвугольніка перасякаюцца ў адным пункце — цэнтры цяжару трохвугольніка і падзяляюцца гэтым пунктам у тасунку 2:1 (калі лічыць ад вяршыні да асновы); 2) М. у т э о р ы і і м а в е р н а с ц я ў — адна з характарыстык размеркавання значэнняў *выпадковай велічыні*. Для выпадковай велічыні X з непарыўнай функцыяй размеркавання $F(x)$ М. m вызначаецца як развязак раўнання $F(x)=\frac{1}{2}$. X прымае як значэнні, большыя за m, так і значэнні, меншыя за m, з імавернасцю 1/2.

МЕ́ЖАВАЯ ЎМО́ВА — гл. *Краявая задача.*

МЕ́ЖАВЫ ПУНКТ м н о с т в а X — пункт тапалагічнай прасторы A ($A \supset X$), у кожным наваколлі якога разам з пунктамі з X існуюць і пункты з $A \setminus X$ (рыс.). М.п. з'яўляецца адначасова п у н к т а м д о т ы к у мностваў X і $A \setminus X$.



МЕ́РА м н о с т в а — абагульненне паняцця адрэзка, плошчы фігуры, аб'ёму цела, якое ўзнікае ў тэорыі функцый рэчаіснай зменнай у сувязі з абагульненнем інтэграла.

Разгледзім злічальна-адытыўную функцыю μ і σ-алгебру A нейкага мноства X. К о н ц а - а д ы т ы ў н а й М. называецца неадмоўная канца-адытыўная функцыя мностваў μ, калі $\mu(\varnothing)=0$. Пры дадатковай умове злічальнай адытыўнасці функцыя μ называецца М. Напрыклад, няхай X — адвольнае непустое мноства, A — σ-алгебра падмностваў X, $\{x_1, x_2, ...\}$ — злічальнае падмноства

X, p_1, p_2, ... — неадмоўныя лікі. Тады функцыя $\mu(E)=\sum_{n=1}^{\infty} p_n \chi_{x_n}(E)$, дзе $\chi_x(E)=1$, $x \in E$, і $\chi_x(E)=0$, $x \notin E$, ёсць М., вызначаная на X. Другі прыклад М. — *Лебэга мера*. Не кожная концая адытыўная М. абавязкова ёсць М. Пара (X, A) называецца вымернай прасторай, тройка (X, A, μ) — прасторай з М. (у прыватным выпадку $\mu(X)=1$ — імавернаснай прасторай), мноствы з A — вымернымі мноствамі. Існуюць абагульненні паняцця М. у розных кірунках: на здабыткі прастораў, на тапалагічныя прасторы і інш.

МЕРАМО́РФНАЯ ФУ́НКЦЫЯ — адназначная функцыя ў абсягу камплекснай зменнай, аналітычная ў гэтым абсягу, з выняткам асобных пунктаў, дзе яна мае полюсы. Калі мноства полюсаў М.ф. бясконцае, то ўсе лімітавыя пункты неабходна належаць да мяжы абсягу.

Кожную мераморфную ў нейкім абсягу функцыю можна запісаць у выглядзе тасунку аналітычных у гэтым абсягу функцый без агульных нулёў. Мае месца і адваротнае. Рацыянальная функцыя (г.зн. тасунак паліномаў) — прыватны выпадак М.ф., для якой бясконцы пункт з'яўляецца полюсам або пунктам аналітычнасці. Асноўныя кірункі ў тэорыі М.ф.: пытанні існавання і будавання М.ф. з зададзенымі асаблівасцямі (гэта развязвае тэарэма Мітаг-Лёфлера пра раскладанне М.ф. на простыя дробы); пытанні размеркавання значэнняў М.ф. (тэорыя Р.Неванліны).

МЕРЫДЫЯ́Н (ад лац. meridianus — паўдзённы) — вялікі паўкруг сферы, які выходзіць з полюса.

МЕТАЛО́ГІКА — тэорыя, якая даследуе логікавыя тэорыі. М. апісвае законы будавання логікавых формул, аксіёмы і г.д. Часам да М. далучаюць не ўсе сродкі логікі, а толькі яе канструктыўную частку.

МЕТАМАТЭМА́ТЫКА, доказаў тэорыя — раздзел матэматычнай логікі, які вывучае фармалізаваныя тэорыі; тэорыя, у якой даследуюцца матэматычныя доказы.

Узнікненне М. звязанае з прапанаванай Д.Гільбэртам праграмай абгрунтавання матэматыкі. Праблема абгрунтавання матэматыкі стала асабліва вострай у канцы 19 — начатку 20 ст. пасля таго, як у тэорыі мностваў Кантара былі знойдзеныя супярэчнасці і ўзнікла пытанне аб прычынах іх з'яўлення і шляхах пераадолення. Д.Гільбэрт, Л.Браўэр, Б.Расэл, Э.Цэрмела і іншыя прапанавалі розныя шляхі развязання гэтага пытання. Д.Гільбэрт прапанаваў праграму доказу несупярэчлівасці матэматыкі, якую ён меў намер здзейсніць у два этапы. Спачатку трэба фармалізаваць матэматыку (або яе асобныя раздзелы) — пабудаваць яе фармалізаваную сістэму, з аксіём якой з дапамогай дакладна вызначаных правілаў вывядзення магчыма атрымаць усе матэматычныя тэарэмы і толькі іх. На другім этапе Д.Гільбэрт збіраўся даказаць несупярэчлівасць матэматыкі, прычым несупярэчлівасць ён разумеў як адсутнасць двух сцверджанняў, адно з якіх ёсць адмаўленне другога. Такім чынам, аб'ектам даследавання становяцца доказы ў фармалізаваных сістэмах.

Дзеля пераканання ў несупярэчлівасці доказу разв珠жанні, з дапамогай якіх ён зроблены, павінны быць даволі простымі, каб нельга было ўсумніцца ў іх праўдзівасці. Метады развражанняў, якія выкарыстоўваюцца ў М., Д.Гільбэрт называе фінітнымі, і яны не павінны выкарыстоўваць паняцце актуальнай бясконцасці.

Такім чынам, М. (паводле Д.Гільбэрта) — гэта даследаванне матэматычных доказаў фінітнымі сродкамі; мэта М. — даказаць несупярэчлівасць матэматыкі. Доказ несупярэчлівасці фінітнымі сродкамі выратаваў бы класічную матэматыку ад крытыкі інтуіцыяністаў і прыхільнікаў іншых кірункаў і тых абмежаванняў, якія яны стараліся накласці на яе.

Але праграма Д.Гільбэрта аказалася нездзяйснялънай. К.Гёдэль (1931) даказаў, што адвольная несупярэчлівая фармалізацыя арыфметыкі няпоўная ў тым сэнсе, што заўсёды можна знайсці праўдзівае арыфметычнае сцверджанне, якое нельга развязаць сродкамі дадзенай фармальнай сістэмы. Такім чынам, надзеі на фармалізацыю ўсёй класічнай матэматыкі не спраўдзіліся. Акрамя таго, К.Гёдэль паказаў, што калі фармальная сістэма арыфметыкі несупярэчлівая, то сцверджанне пра яе несупярэчлівасць можна сфармуляваць у гэтай сістэме, але яго нельга даказаць сродкамі гэтай сістэмы, г.зн. нельга атрымаць доказ несупярэчлівасці фінітнымі сродкамі (калі лічыць фінітнымі тыя сродкі, якімі карыстаюцца ў фармальных сістэмах). Нягледзячы на няўдачу прапанаванага падыходу да абгрунтавання матэматыкі, М. адыграла значную ролю ў развіцці *матэматычнай логікі*. З дапамогай сродкаў, шырэйшых за тыя, якія ўжываюцца ў фармальнай арыфметыцы, і ў той жа час даволі надзейных, Г.Генцэн (1936) даказаў яе несупярэчлівасць.

Апошнім часам пры даследаванні фармалізаваных матэматычных тэорый выкарыстоўваюць і нефінітныя метады, а сам тэрмін М. часам ужываецца як сінонім «тэорыі доказаў».

МЕТАМО́ВА — мова, на якой даследуюць нейкую іншую мову, мову-аб'ект. Калі нехта вывучае, напрыклад, ангельскую з дапамогай беларускай, то М. — беларуская мова, мова-аб'ект — ангельская. М. можа супадаць з мовай-аб'ектам, калі, напрыклад, граматыка беларускай мовы выкладаецца на беларускай мове. Матэматыка звычайна даследуе фармалізаваныя мовы-аб'екты з дапамогай якой-небудзь натуральнай мовы ў якасці М. Фармалізацыі М. знаходзяць дастасаванні пры даследаванні моваў праграмавання.

МЕТАТЭО́РЫЯ — тэорыя, аб'ект даследавання якой — нейкая іншая тэорыя (аб'ектная тэорыя). У аксіяметрычнай тэорыі аб'екты, што даследуюцца, характарызуюцца нейкім мноствам аксіём. Усе сцверджанні, якія выводзяцца з аксіём логікавымі сродкамі, з'яўляюцца тэарэмамі гэтай тэорыі. Але ўжо сцверджанні пра ўласцівасці сістэмы аксіём (несупярэчлівасць, незалежнасць) — гэта тэарэмы М., напрыклад, тэарэма пра незалежнасць V пастулата Эўкліда ад іншых аксіём ёсць тэарэма М.

МЕТРЫЗАВА́ЛЬНАЯ ПРАСТО́РА — тапалагічная прастора, тапалогія якой утвараецца пэўнай метрыкай паводле правіла: пункт належыць замыканню мноства, калі і толькі калі ён знаходзіцца на нулявой адлегласці ад гэтага мноства. Прыкмету метрызавальнасці вызначыў П.Урысон (1923): кожная нармальная прастора (і нават кожная рэгулярная прастора — А.Ціханаў, 1925) са злічальнай базай метрызавальная.

МЕ́ТРЫКА (грэц. metrikē ад metron — мера, памер) — рэчаісная лікавая функцыя, вызначаная на мностве ўпарадкаваных параў элементаў нейкага мноства X ($\rho: x \times x \to \mathbf{R}$), якая адпавядае наступным умовам (аксіёмы): 1) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$; 2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (сіметрычнасць); 3) $\rho(x, y) \le \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (няроўнасць трохвугольніка), дзе x, y, z — адвольныя элементы мноства X. Функцыю ρ называюць таксама функцыяй адлегласці, а лік $\rho(x, y)$ — адлегласцю паміж элементамі x і y.

З аксіём М. вынікае, што для адвольных x і y праўдзіцца $\rho(x, y) \ge 0$, г. зн. адлегласць, якая праўдзіць аксіёмы 1—3, неадмоўная. На адным і тым жа мностве М. можа быць уведзеная рознымі спосабамі. Напрыклад, на плоскасці за адлегласць паміж пунктамі x і y, якія маюць каардынаты (x_1, y_1) і (x_2, y_2), можна ўзяць не толькі звычайную эўклідаву адлегласць

$$\rho_1(x, y) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

але і $\rho_2(x, y) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ або $\rho_3(x, y) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$ і інш. У вектарнай прасторы М. часта задаюцца нормай, іншы раз — з дапамогай *скалярнага здабытку*. Мноства з уведзенай на ім М. называецца *метрычнай прасторай*.

МЕТРЫ́ЧНАЯ ПРАСТО́РА — мноства, на якім зададзеная *метрыка*. Адно і тое ж мноства можна метрызаваць рознымі спосабамі, і звычайна ўвядзенне той або іншай метрыкі дыктуецца характарам пастаўленай задачы. У якасці М.п. могуць разглядацца мноствы станаў функцый і адлюстраванняў, адвольныя падмноствы эўклідавых і гільбэртавых прастораў. Разгляд метрыкі важны пры вывучэнні розных паняццяў, напрыклад пры даследаванні збежнасці (шэрагаў, паслядоўнасцяў функцый), пры развязанні задач апраксімацыі і г.д. Развіццё тэорыі М.п. ішло на некалькіх асноўных кірунках.

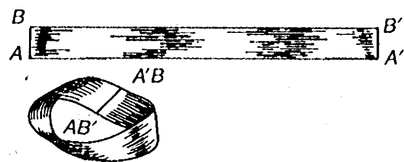
Агульная тэорыя М.п. У ёй даследуюцца ўласцівасці М.п., інварыянтныя ў дачыненні да *ізаметрый* — біектыўных адлюстраванняў «на», якія не мяняюць адлегласць. Да ліку такіх уласцівасцяў належаць поўнасць, абмежаванасць, цалкам абмежаванасць. Уласцівасці такога тыпу называюцца метрычнымі. Тапалагічная тэорыя М.п. Аб'ект яе вывучэння — уласцівасці М.п., якія захоўваюцца пры *гомеамарфізмах*, сярод іх, напрыклад, кампактнасць, злучнасць. Уласцівасці гэтага тыпу называюцца тапалагічнымі. Тэорыя прастораў, на якіх зададзена метрыка, узгодненая з якой-небудзь алгебраічнай структурай (напрыклад, вектарнай прасторай або групай). Сюды можна ўлучыць эўклідавы прасторы, перадгільбэртавы і гільбэртавы прасторы, банахавы прасторы і банахавы алгебры. Вынікі, якія тут маюцца, істотна звязаныя з разглядам важных у ідэйным дачыненні ўласцівасцяў метрык або нормаў, але на змесце цалкам належаць да адпаведных раздзелаў алгебры і функцыянальнага аналізу. Разгляд спецыяльных метрык мае важнае значэнне пры даследаванні неэўклідавых геаметрый, у дыферэнцыяльнай геаметрыі, механіцы і фізіцы.

МЕТРЫ́ЧНАЯ ТЭО́РЫЯ ЛІ́КАЎ — раздзел *лікаў тэорыі*, у якім з дапамогай тэорыі меры вывучаюцца мноствы лікаў з пэўнымі арыфметычнымі ўласцівасцямі. М.т.л. мае шмат агульнага з *імавернасцяў тэорыяй*, што дае магчымасць выкарыстоўваць метады і вынікі гэтай навукі ў тэорыі лікаў. Шмат задач, якія датычаць арыфметычных уласцівасцяў асобных лікаў, могуць мець і метрычную інтэрпрэтацыю. Гэта дае магчымасць выявіць усю з'яву цалкам, а часам даволі проста развязаць праблемы, якія для канкрэтных лікаў яшчэ не развязаныя. Напрыклад, паслядоўнасць *дробавых частак лікаў* $\{\alpha q^n\}_{n=1}^{\infty}$ пры кожным натуральным $q \geq 2$ раўнамерна размеркаваная для амаль усіх (паводле меры Лебэга) $\alpha \in \mathbf{R}$; але і зараз (2001) нічога не вядома пра размеркаванне паслядоўнасці $\{\sqrt{2}\, 2^n\}_{n=1}^{\infty}$.

МЕТРЫ́ЧНАЯ ТЭО́РЫЯ ФУ́НКЦЫЙ — раздзел *функцый рэчаіснай зменнай тэорыі*, у якім уласцівасці вывучаюцца на аснове паняцця *меры* мностваў. Клас непарыўных функцый недастаткова шырокі для апісання складаных працэсаў, якія адбываюцца на практыцы і патрабуюць тэарэтычнага асэнсавання. Напрыклад, клас непарыўных функцый незамкнёны ў дачыненні да лімітавага пераходу. Абагульненнем непарыўнай функцыі з'яўляецца *вымерная функцыя*.

Спачатку азначаецца *вымернае мноства E* разам з класам мностваў A, замкнёных у дачыненні да тэарэтычна-мноствавых аперацый. Рэчаісная функцыя $f(\omega)$, $\omega \in E$, называецца в ы м е р н а й, калі $\{f(\omega) < x\} \in A$ для кожнага рэчаіснага $x \in R$. Класічныя тэарэмы Лебэга і Ягорава даюць падставу лічыць, што збежнасць адвольнай паслядоўнасці вымерных функцый раўнамерная, калі не звяртаць увагу на мноствы адвольна малой меры. Для вымерных функцый можна пабудаваць паняцце інтэграла (гл. *Лебэга інтэграл*), які дазваляе значна пашыраць клас інтэгравальных функцый, што мае важнае значэнне як для матэматыкі, так і для шматлікіх дастасаванняў. Больш глыбокую тэорыю вымерных функцый можна пабудаваць, калі на іх накласці дадатковыя абмежаванні. Так атрымліваецца тэорыя вымерных функцый, інтэгравальных з квадратам, тэорыя абсалютна непарыўных функцый.

МЁБІЮСА ЛІСТ — аднабаковая паверхня (гл. *Аднабаковыя і двухбаковыя паверхні*), якая атрымліваецца пры склейванні супрацьлеглых старон AB і $A'B'$ прамавугольнай палоскі $ABB'A'$ (гл. рыс.) так, што пункт A супадае з B', A' з B і старана



AB супадае з $A'B'$ усімі пунктамі. М.л. вывучалі ў 1858—65 гг. нямецкія матэматыкі А.Мёбіюс і Ё.Лістынг незалежна адзін ад аднаго.

МЁБІЮСА ФУ́НКЦЫЯ — арыфметычная функцыя $\mu(n)$ натуральнага аргумента n: $\mu(1) = 1$; $\mu(n) = 0$, калі n дзеліцца на квадрат простага ліку; у процілеглым выпадку $\mu(n) = (-1)^k$, дзе k — колькасць простых множнікаў у раскладзе ліку n. Увёў А.Мёбіюс (1832).

МІЛЬЁН — лік, які паказваецца як адзінка з 6 нулямі (1000000) або ў выглядзе ступені 10^6.

МІЛЬЯ́РД — лік, які паказваецца як адзінка з 9 нулямі (1000000000) або ў выглядзе ступені 10^9.

МІНАРА́НТА (франц. minorante ад minorer — абвяшчаць меншым) ф у н к ц ы і — функцыя, значэнні якой не большыя за адпаведныя значэнні дадзенай функцыі. Параўнай: *Мажаранта*.

МІНІМА́КС — экстрэмум тыпу $\inf \sup F(x, y)$, $\min \max F(x, y)$, $y \in Y$, $x \in X$ і г.д. М. можна разумець (напрыклад, у тэорыі пошукаў развязкаў, у даследаванні аперацый, у тэорыі гульняў) як найменшыя страты з тых, якія нельга прадухіліць суб'екту, што развязвае праблему ў найгоршых для яго ўмовах. Лікавае значэнне М. вызначае гарантаваную страту. М. — адзін з асноўных прынцыпаў пры матэматычным мадэляванні ва ўмовах недакладнасці. Лікавае значэнне М. не меншае за лікавае значэнне адпаведнага *максіміну*. Аналітычны пошук (знаходжанне) М. (а таксама максімінаў) часта бывае вельмі цяжкай задачай, і ў такіх выпадках М. знаходзяць з дапамогай лікавых метадаў (гл. *Максімін*).

МІНІМА́КСНАЯ ЗАДА́ЧА — задача пра пошук мінімальных значэнняў функцый тыпу $f(x) = \max_{y \in Y} F(x, y)$, $x \in X$, дзе F — непарыўная разам з F_x' функцыя, а Y — кампакт. Гэтыя функцыі наогул н я г л а д к і я, але пры слабых дапушчэннях дыферэнцавальныя па кірунках. Разам з выпуклымі функцыямі яны складаюць адзін з найбольш дакладна даследаваных класаў нягладкіх

функцый. Для іх атрыманыя неабходныя ўмовы мінімуму як пры адсутнасці, так і пры наяўнасці абмежаванняў. Для развязвання М.з. распрацаваныя лікавыя метады.

МІНІМА́КСУ ПРЫ́НЦЫП — прынцып аптымальнасці ў антаганістычных гульнях, што прадпісвае ўдзельнікам гульні выбіраць стратэгіі, на якіх дасягаецца максімальна гарантаваны выйгрыш (таму М.п. часам называюць прынцыпам найвялікшага гарантаванага выніку). Няхай $\Gamma = (X, Y, F)$ — антаганістычная гульня. Тады адпаведна М.п. удзельнікі гульні выбіраюць стратэгіі (калі яны існуюць), на якіх дасягаюцца вонкавыя экстрэмумы адпаведных максімінаў $\max\limits_{x \in X} \inf\limits_{y \in Y} F(x, y)$ і мінімаксаў $\min\limits_{y \in Y} \sup\limits_{x \in X} F(x, y)$. Калі праўдзіцца роўнасць

$$\max_{x \in X} \inf_{y \in Y} F(x, y) = \min_{y \in Y} \sup_{x \in X} F(x, y), \qquad (1)$$

то пара стратэгій удзельнікаў гульні, якія рэалізуюць М.п., ёсць седлавы пункт функцыі F, яны называюцца аптымальнымі стратэгіямі ўдзельнікаў гульні. Калі роўнасць (1) не мае месца, але праўдзіцца роўнасць

$$\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} F(x, y) = \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} F(x, y), \qquad (2)$$

тады стратэгіі, якія рэалізуюць вонкавыя экстрэмумы з дакладнасцю да адвольнага $\varepsilon > 0$, называюцца ε-аптымальнымі стратэгіямі. Роўнасці (1) і (2) праўдзяцца не заўсёды. Тэарэмы, у якіх даказваюцца роўнасці (1) і (2), называюцца тэарэмамі пра мінімаксы. Гл. таксама *Матрычныя гульні.*

МІНІМА́ЛЬНАЯ ПАВЕ́РХНЯ — паверхня, у якой сярэдняя крывізна ва ўсіх пунктах роўная нулю. Няхай у прасторы зададзеная нейкая замкнёная крывая. Трэба знайсці сярод усіх магчымых паверхняў, якія праходзяць праз гэтую крывую, паверхню з найменшай плошчай унутры крывой. Развязкам задачы з'яўляецца М.п. (адсюль назоў). Прыклад М.п. дае *шрубавая паверхня.* Для знаходжання М.п. $z = f(x, y)$ трэба развязаць дыферэнцыяльнае раўнанне з частковымі вытворнымі другога парадку. Ж.Плато (1849) прапанаваў канструяваць М.п. з дапамогай мыльных плёнак, нацягнутых на дротавы каркас.

МІНІМА́ЛЬНЫ ЭЛЕМЕ́НТ частковаўпарадкаванага мноства — элемент, для якога ў мностве няма элемента, строга меншага за яго.

МІ́НІМУМ (ад лац. minimum — найменшае) функцыі — найменшае значэнне функцыі, якая прымае рэчаісныя значэнні. Непарыўная ў пункце x_0 функцыя $f(x)$ мае ў x_0 М. (лакальны), калі існуе σ-акруга I_σ пункта x_0 такая, што для ўсіх $x \in I_\sigma$ выконваецца няроўнасць $f(x) \geq f(x_0)$. Найменшае значэнне $f(x)$ на ўсім зададзеным мностве X называецца абсалютным (глабальным) М. на гэтым мностве.

МІНКО́ЎСКАГА НЯРО́ЎНАСЦЬ — няроўнасць выгляду

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

дзе $a_k, b_k \in \mathbf{R}$, $k = \overline{1, n}$, і $p > 1$. Пры $p = 2$ М.н. называецца няроўнасцю трохвугольніка. М.н. мае аналагі для бясконцых шэрагаў і інтэгралаў. Няхай, напрыклад, f, g — інтэгравальныя функцыі ў нейкім абсягу $x \in \mathbf{R}^n$. Тады пры $p > 1$

$$\left(\int_X |f + g|^p \, dv\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_X |f|^p \, dv\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |g|^p \, dv\right)^{\frac{1}{p}}.$$

МІНКО́ЎСКАГА ПРАСТО́РА — прастора з метрычнай формай

$$ds^2 = dt - \frac{1}{c^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

(для параўнання метрычная форма эўклідавай прасторы $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$). Тут $c \in R$, x, y, z — рэчаісныя зменныя, а t — час. М.п. мае фундаментальнае значэнне ў спецыяльнай тэорыі рэлятыўнасці.

МІНКО́ЎСКАГА ТЭАРЭ́МА — 1) М.т. пра выпуклае цела — тэарэма геаметрыі лікаў, якую даказаў Г.Мінкоўскі: няхай T — замкнёнае выпуклае цела з цэнтрам сіметрыі ў пачатку каардынат і аб'ёмам $V(T)$. Тады кожная пунктавая крата Λ вызначніка $d(\Lambda)$, для якой $V(T) \geq 2^n d(\Lambda)$, мае ў T пункт, адрозны ад 0; 2) М.т. пра лінейныя няроўнасці: для рэчаісных лікаў a_{ij}, $c_j >$ > 0 сістэма няроўнасцяў

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j\right| \leq c_1, \quad \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right| < c_j, \quad 2 \leq i \leq n,$$

мае развязак $\bar{x} \in \mathbf{Z}^n, \bar{x} \neq 0$, калі $c_1, \ldots, c_n \geq |\det(a_{ij})|$. М.т. маюць шматлікія дастасаванні ў *алгебра-*

ічнай тэорыі лікаў, цэлалікавым праграмаванні, дыяфантавых набліжаннях.

МІНО́Р (ад лац. minor — меншы) k-га парадку матрыцы — вызначнік матрыцы, якая ўтвораная з элементаў, размешчаных на скрыжаванні адвольна выбраных k радкоў і k слупкоў гэтай матрыцы. М. k-га парадку ёсць *вызначнік* матрыцы памеру $k \times k$. Усяго кожная матрыца памеру $n \times m$ мае $C_n^k \cdot C_m^k$ мінораў парадку k. М. першага парадку ёсць элементы матрыцы. Калі нумары слупкоў, у якіх размешчаныя М., супадаюць з нумарамі радкоў, то такі М. называецца галоўным. У матрыцы выкрэсліваюцца слупкі і радкі, у якіх размешчаныя М. Вызначнік B атрыманай матрыцы памеру $(n-k)\times(n-k)$ называецца дапаўняльным мінорам да гэтага М. Лік $(-1)^{i_1+\ldots+i_k+j_1+\ldots+j_k} B$, дзе $i_1, \ldots, i_k$, $j_1, \ldots, j_k$ — нумары радкоў і слупкоў, у якіх размешчаны М., называецца алгебраічным дапаўненнем да гэтага М.

МІ́НУС (ад лац. minus — менш) — знак (гарызантальная рыска –) для абазначэння дзеяння адымання, а таксама для абазначэння адмоўных лікаў, процілеглых элементаў. Да прыкладу, a–b; –3; –c.

МІНУ́ТА (ад лац. minutus — маленькі, дробны) — адзінка плоскага вугла, роўная 1/60 *градуса*, абазначаецца знакам ′ ; М. падзяляецца на 60 секунд (60″).

МІ́ТАГ-ЛЁФЛЕРА ТЭАРЭ́МА — адна з асноўных тэарэм аналітычных функцый, якая дае для мераморфнай функцыі аналаг раскладу рацыянальнай функцыі на простыя дробы. Няхай $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ — паслядоўнасць розных камплексных лікаў

$$|a_1| \le |a_2| \le \ldots,\ \lim_{n\to\infty} a_n = \infty,$$

$\{Y_n\}$ — паслядоўнасць рацыянальных функцый выгляду

$$y_n(z) = \sum_{k=1}^{l_n} \frac{c_{n_k}}{(z-a_n)^k}, \qquad (1)$$

дзе a_n — адзіны полюс адпаведнай функцыі $Y_n(z)$. Тады існуюць мераморфныя функцыі $f(z)$ у плоскасці **C** камплекснай зменнай z, якія маюць полюсы ў пунктах a_n і толькі ў іх з зададзенымі галоўнымі часткамі (1) шэрагаў Лёрана, што адпавядаюць пунктам a_n. Усе функцыі $f(z)$ выяўляюцца ў выглядзе раскладу Мітаг-Лёфлера

$$f(z) = h(z) + \sum_{n=1}^{\infty} (Y_n(z) + P_n(z)), \qquad (2)$$

дзе $P_n(z)$ — мнагасклады, якія падбіраюцца па a_n і $Y_n(z)$ такім чынам, каб шэраг (2) раўнамерна (пасля адкідвання канцай колькасці складнікаў) збягаўся на ўсякім кампакце $K \subset C$, $h(z)$ — адвольная цэлая функцыя.

МНАГАГРА́НЕВЫ ВУ́ГАЛ, мнагагранневы кут — прыватны выпадак *цялеснага вугла.*

МНАГАГРА́НЕВЫ КУТ — тое, што *мнагагранневы вугал.*

МНАГАГРА́ННІК — канцы набор многавугольнікаў у трохмернай прасторы, дзе кожная старана адвольнага многавугольніка належыць яшчэ аднаму з астатніх многавугольнікаў і ніякі паднабор гэтага набору многавугольнікаў не мае адзначанай уласцівасці. Вяршыні і стораны многавугольнікаў называюцца вяршынямі і кантамі М. Самі многавугольнікі называюцца гранямі М. Просты М. — калі ніякая пара сумежных яго граняў не мае агульных пунктаў. (Гл., напрыклад, *Піраміда, Прызма.*)

МНАГАЗЛУ́ЧНЫ АБСЯ́Г — абсяг у лінейна злучнай прасторы, які не з'яўляецца адназлучным. У М.а. D абавязкова існуюць замкнёныя шляхі, не гаматопныя нулю (г. зн. замкнёныя шляхі, якія нельга непарыўна дэфармаваць у пункт, застаючыся ўвесь час у М.а. D). Парадкам злучнасці плоскага абсягу D прасторы $\mathbf{R}^2$ (або **C**, $\hat{\mathbf{C}}$) называецца колькасць k злучных кампанентаў яго мяжы. У выпадку $k = 1$ абсяг D — адназлучны; калі $1 < k < +\infty$ — канцазлучны абсяг. Калі k не канцая, то абсяг называецца бясконцазлучным. Выдаляючы з канцазлучнага абсягу D парадку k пункты $k-1$ жарданавых дугаў, якія злучаюць парамі кампаненты мяжы, можна заўсёды атрымаць адназлучны абсяг $D^* \subset D$.

МНАГАЗНА́ЧНАЯ АНАЛІТЫ́ЧНАЯ ФУ́НКЦЫЯ — поўная аналітычная функцыя камплекснай зменнай, для якой існуюць сама меней два элементы з рознымі значэннямі функцыі ў адным і тым жа пункце. Кожны элемент М.а.ф. называецца таксама адназначнай галінай гэтай функцыі. Вылучэнне адназначных галінаў М.а.ф. ажыццяўляецца вылучэннем з абсягу яе азначэння пэўных ліній — гэтак званых разрэ-

з а ў — і заданнем значэння галіны ў якім-небудзь пункце. У якасці дзеянняў над М.а.ф. разглядаюць дзеянні і з іх асобнымі галінамі, вылучанымі ў адным абсягу. Вывучэнне М.а.ф. праводзіцца ў двух кірунках: замест плоскага абсягу вызначэння для кожнай М.а.ф. будуецца гэтак званая *рыманава паверхня*, на якой гэтая функцыя ўжо адназначная; высвятляюцца ўмовы, пры якіх аналітычны працяг нейкага элемента ў плоскім абсягу не прыводзіць да мнагазначнасці (тэарэма монадраміі).

МНАГАЗНА́ЧНАЯ ЛО́ГІКА — раздзел *матэматычнай логікі*, які даследуе матэматычныя мадэлі логікі выказванняў. Гэтыя мадэлі адлюстроўваюць дзве галоўныя рысы логікі выказванняў — множнасць праўдзівасці выказванняў і магчымасць будавання новых складаных выказванняў з дадзеных пры дапамозе логікавых аперацый, якія дазваляюць знаходзіць значэнні складаных выказванняў на падставе зыходных. У агульным выпадку М.л. ёсць абагульненне алгебры логікі.

Гістарычна першыя мадэлі М.л. — гэта двухзначная логіка Дж.Буля (сярэдзіна 19 ст.), якая таксама называецца алгебрай логікі, трохзначная логіка Я.Лукасевіча (1920) і *k*-значныя логікі Э.Поста (1921). Гэта ўсё канцазначныя логікі. У 2-й палове 20 ст. з'явіліся даследаванні, якія належаць як да злічальназначнай логікі, так і для кантынуумзначнай логікі.

МНАГАЗНА́ЧНАЯ ФУ́НКЦЫЯ — функцыя $f: X \to Y$, якая ставіць у адпаведнасць кожнаму элементу $x \in X$ нейкае падмноства $f(x)$ мноства Y, прычым існуе хоць бы адно падмноства $y = f(x) \subset Y$, якое змяшчае не менш за два элементы. М.ф. можна разглядаць як адназначную функцыю з X у 2^Y, дзе 2^Y — мноства ўсіх падмностваў мноства Y. М.ф. могуць узнікнуць пры развязванні раўнанняў, імі часта з'яўляюцца няяўныя і адваротныя функцыі. Напрыклад, адваротная да функцыі $y = x^2$ ёсць двухзначная функцыя $x = \pm\sqrt{y}$, а да функцыі $y = \operatorname{tg} x$ — бясконцазначная функцыя $x = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} y + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Добра вывучаны шырокі клас М.ф. камплекснай зменнай. Многія ўласцівасці М.ф. выяўленыя ў выпадку, калі X і Y — тапалагічныя прасторы.

МНАГАЛІ́СТАВАЯ ФУ́НКЦЫЯ — абагульненне паняцця *адналіставай функцыі*. Функцыя $f(z)$, аналітычная або мераморфная ў абсягу D камплекснай плоскасці z, называецца *p*-л і с т а в а й у D ($p = 1, 2, \ldots$), калі яна прымае ў гэтым абсягу кожнае сваё значэнне w не болей як p разоў, пры гэтым існуе сама меней адно значэнне w_0, якое $f(z)$ прымае роўна p разоў. Інакш кажучы, для p-ліставай у абсягу D функцыі раўнанне $f(z) = w$ пры кожным w мае не больш за p каранёў у D; пры гэтым існуе $w = w_0$, для якога такіх каранёў у D роўна p. Пры $p = 1$ функцыя а д н а л і с т а в а я, а пры $p > 1$ — м н а г а л і с т а в а я.

З геаметрычнага пункту гледжання для p-ліставай функцыі над кожным пунктам плоскасці $\mathbf{C}_w$ знаходзіцца не болей як p пунктаў рыманавай паверхні, на якую функцыя $w = f(z)$ адлюстроўвае абсяг D (пры гэтым існуе сама меней адзін пункт w_0, над якім знаходзіцца p пунктаў паверхні). М.ф., як і адналіставыя, вывучаюцца ў розных кірунках: з пункту гледжання характарыстыкі скажэння абсягу пры яго адлюстраваннях гэтымі функцыямі; ацэнкі каэфіцыентаў для шэрагаў, якія выяўляюць гэтыя функцыі, і г.д.

МНАГАМЕ́РНАЕ НАРМА́ЛЬНАЕ РАЗМЕРКАВА́ННЕ — размеркаванне выпадковай велічыні $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots, \xi_n(\omega))$ непарыўнага тыпу, для якой шчыльнасць размеркавання мае выгляд

$$P_\xi(x) = P_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= (2\pi)^{\frac{-n}{2}} \sqrt{|G|} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(x_i - a_i) g_{ij} (x_j - a_j)\right\},$$

дзе $G = \| g_{ij} \|_{n \times m}$ — неадмоўна вызначаная матрыца. Найбольш часта выкарыстоўваюць у мнагамерным статыстычным аналізе, у тэорыі выпадковых працэсаў, напрыклад пры вывучэнні *вінэрава працэсу* і *гаўсава працэсу*.

МНАГАМЕ́РНАЕ РАЗМЕРКАВА́ННЕ — размеркаванне мнагамернай выпадковай велічыні. Пад гэтым разумеюць супольнае размеркаванне рэчаісных выпадковых велічыняў

$$\xi(\omega) = (\xi_1(\omega),\ \xi_2(\omega), \ldots, \xi_n(\omega)),$$

зададзеных на адной імавернаснай прасторы $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots, \xi_n(\omega)$. М.р. адназначна вызначаецца функцыяй размеркавання

$$F_{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= P(\{\omega : \xi_1(\omega) \le x_1,\ \xi_2(\omega) \le x_2, \ldots, \xi_n(\omega) \le x_n\})$$

n рэчаісных зменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Як і ў аднамерным выпадку, найбольш часта ўжываюцца дыскрэтныя і абсалютна непарыўныя М.р.

МНАГАМÉРНАЯ ВЫПАДКÓВАЯ ВЕЛІЧЫНЯ́ — сукупнасць *вымерных функцый.* Няхай на нейкай імавернаснай прасторы (Ω, F, P) вызначаныя n вымерных функцый $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots, \xi_n(\omega)$. Сукупнасць гэтых функцый $\xi(\omega)$ вызначае адлюстраванне $(\Omega, F) \to (\mathbf{R}^n, \beta^n)$, дзе $\mathbf{R}^n$ — n-мерная рэчаісная прастора, β^n — сістэма барэлевых мностваў на $\mathbf{R}^n$. Гэтая сукупнасць $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots, \xi_n(\omega))$ называецца М.в.в. (або выпадковым вектарам). Апісваецца з дапамогай функцыі n аргументаў

$$F_\xi(x) = F_{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= P(\{\omega : \xi_1(\omega) \le x_1, \xi_2(\omega) \le x_2, \ldots, \xi_n(\omega) \le x_n\}),$$

якая называецца функцыяй размеркавання n-мернай выпадковай велічыні.

МНАГАМÉРНАЯ ГЕАМÉТРЫЯ — геаметрыя прастораў, памернасць якіх большая за 3. У больш вузкім сэнсе М.г. — гэта геаметрыя n-мерных прастораў, якія вывучаюцца ў *аналітычнай геаметрыі* і *лінейнай алгебры.* Аснова такіх прастораў — паняцце n-мернай *вектарнай прасторы* V^n, якое ўводзіцца для адвольнага натуральнага ліку n і абагульняе ўласцівасці аперацый складання звычайных вектараў і множання вектараў на рэчаісныя лікі. На падставе паняцця n-мернай вектарнай прасторы ўводзіцца паняцце n-мернай *афіннай прасторы* A^n, элементы якой называюць, як і ў звычайнай прасторы, пунктамі.

У прасторы A^n азначаюцца падпрасторы адвольнай памернасці k, $0 \le k \le n$, якія называюцца k-мернымі плоскасцямі. Паняцце k-мернай плоскасці і яе ўласцівасці абагульняюць паняцці звычайных простай і плоскасці, а таксама іх уласцівасці. На падставе паняцця афіннай прасторы ўводзіцца паняцце n-мернай эўклідавай прасторы E^n, якое з'яўляецца самым поўным абагульненнем звычайнай прасторы E^3. У E^n па аналогіі з E^3 уводзяцца паняцці адлегласці паміж пунктамі, перпендыкулярнасці, n-мернага куба, $(n-1)$-мернай сферы, n-мернага аб'ёму, руху і г.д. У E^n, як у E^3, ёсць прамавугольныя сістэмы каардынат, што ўтвараюць n парамі перпендыкулярных простых — каардынатных восяў, якія праходзяць праз фіксаваны пункт — пачатак каардынат. Калі пункты A і B маюць каардынаты $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ і $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ адпаведна, тады адлегласць паміж A і B вылічаецца па формуле

$$\rho(A, B) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2}.$$

МНАГАМÉРНЫ ВЫПАДКÓВЫ ПРАЦЭ́С — выпадковы працэс, значэннямі якога з'яўляюцца вектары.

МНАГАМÉРНЫ СТАТЫСТЫ́ЧНЫ АНА́ЛІЗ — раздзел *матэматычнай статыстыкі*, прысвечаны метадам будавання аптымальных *планаў збору, сістэматызацыі і апрацоўкі* шматмерных статыстычных звестак. М.с.а. накіраваны на выяўленне характару і структуры ўзаемасувязяў паміж кампанентамі мнагамернай прыкметы, якая даследуецца, і прызначаны для атрымання навуковых і практычных вынікаў. Па змесце М.с.а. можа быць умоўна падзелены на тры асноўныя раздзелы: М.с.а. мнагамерных размеркаванняў і іх асноўных характарыстык; М.с.а. характару і структуры ўзаемасувязяў паміж кампанентамі даследаванай мнагамернай прыкметы; М.с.а. геаметрычнай структуры даследаванай сукупнасці мнагамерных назіранняў.

МНАГАСКЛА́Д (палінам) ад n зменных — алгебраічны выраз $f(x_1, \ldots, x_n)$, які з'яўляецца сумай конечнай колькасці складнікаў выгляду $a_{k_1, k_2, \ldots, k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$, дзе k_i — цэлыя дадатныя лікі, a — каэфіцыенты з нейкага поля P. Напрыклад, М. ступені n ад адной зменнай x мае выгляд $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$, дзе $a_0, \ldots, a_n \in P$.

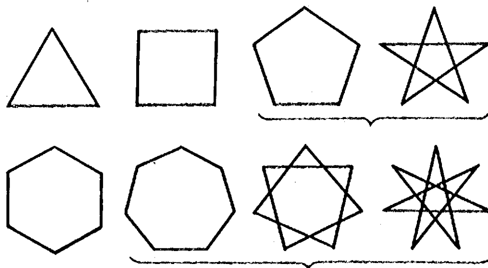
Два М. роўныя, калі роўныя іх каэфіцыенты пры аднолькавых складніках (у дачыненні да зменных). Ступенню складніка $a x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$, $a \ne 0$, называецца лік $k_1 + k_2 + \ldots + k_n$, ступенню М. — найвышэйшая са ступеняў яго складнікаў. М., усе складнікі якога маюць адну і тую ж ступень, называецца аднародным М., або формай. М., які дзеліцца толькі сам на сябе і на элементы поля P, называецца непрыводным над полем P (у процілеглым выпадку — прыводным). Кожны М. над полем P адназначна раскладаецца ў здабытак непрыводных над полем P М. У дачыненні да складання і множання сукупнасць усіх М. ад n невядомых над полем P утварае кольца $P[x_1, \ldots, x_n]$.

МНАГАСТА́ЙНАСЦЬ — тапалагічная прастора з *атласам* лакальных картаў. Звычайна М. азначае дыферэнцыяльную М. класа C^m $(m > 0)$. Такім чынам, лакальнае будаванне М. такое ж, як і прасторы $\mathbf{R}^n$. Паняцце М. абагульняе паняцце паверхні на адвольную памернасць. М. — адзін з асноўных аб'ектаў матэматыкі, шырока выкарыс-

тоўваецца ў розных галінах фізікі, механікі, хіміі, псіхалогіі і іншых навук.

Упершыню азначэнне М. даў Б.Рыман (1864), які зыходзіў з ідэй К.Гаўса і Г.Грасмана. Сучаснае паняцце М. сфармуляванае ў пачатку 20 ст. М. — аб'ект даследавання ў матэматычным аналізе, дыферэнцыяльнай геаметрыі і тапалогіі; алгебраічная геаметрыя вывучае М. з асаблівасцямі. Пры вывучэнні М. з імі звязваюцца новыя М., надзеленыя дадатковымі структурамі. Напрыклад, вектарныя расслаенні выкарыстоўваюцца пры будаванні характарыстычных класаў М. Сучасная дыферэнцыяльная геаметрыя заснаваная на выкарыстанні галоўных і далучаных расслаенняў. Розныя структуры на М. азначаюцца як рэдукцыя галоўнага расслаення рэпераў першага і вышэйшага парадкаў. Уласцівасці структур на М. адлюстроўваюць уласцівасці самой М. Напрыклад, характарыстычныя класы вызначаюцца крывізнёй злучнасці. Асноўныя праблемы: класіфікацыі ў тапалогіі, вывучэнне ўласцівасцяў адлюстраванняў у дыферэнцыяльнай тапалогіі і аналізе, вывучэнне структур на М. дыферэнцыяльнай геаметрыі.

МНОГАВУГО́ЛЬНІК — геаметрычная фігура, утвораная замкнёнай ламанай лініяй. Калі n пунктаў $A_1, A_2, ..., A_n$ паслядоўна злучыць адрэзкамі простых $A_1A_2, A_2A_3, ..., A_{n-1}A_n, A_nA_1$, то атрымліваецца М., у якога гэтыя пункты называюцца в я р ш ы н я м і, а адрэзкі — с т а р а н а м і.



М. называецца а р ы е н т а в а н ы м, калі паказаны кірунак яго абыходу, г.зн. на кожнай старане паказаны яе пачатак і канец, прычым пачатак кожнай з іх супадае з канцом папярэдняй. М. называецца п л о с к і м, калі ўсе яго вяршыні належаць да адной плоскасці. Плоскія М. бываюць с а м а н е п е р а с я к а л ь н ы я (кожная старана і вяршыня не маюць пунктаў, якія належаць да іншых старон і вяршыняў) і с а м а п е р а с я к а л ь н ы я. Саманеперасякальны плоскі М. падзяляе пункты плоскасці, якой ён належыць, на два абсягі: н у т р а н ы (яму не можа належаць уся прастая) і в о н к а в ы. Плоскія М. (гл. рыс.) бываюць в ы п у к л ы я (адвольны адрэзак з канцамі, якія належаць нутранаму абсягу, увесь належыць гэтаму абсягу) і н я в ы п у к л ы я. Выпуклы М. называецца п р а в і л ь н ы м, калі ўсе яго стораны і ўсе нутраныя вуглы роўныя. Сума нутраных вуглоў адвольнага саманеперасякальнага М. з n старанамі роўная $\pi(n-2)$. На рыс. пададзеныя ўсе правільныя (як выпуклыя, так і нявыпуклыя) М. ад трохвугольніка да сямівугольніка.

МНОГАКРЫТЭ́РНАЯ АПТЫМІЗА́ЦЫЯ — раздзел матэматычнага праграмавання, прысвечаны праблемам выбару прынцыпаў аптымальнасці і метадаў пошуку іх рэалізацый у экстрэмальных задачах з некалькімі крытэрамі.

МНО́ЖАННЕ — адна з асноўных матэматычных аперацый, якая двум лікам a і b (с у м н о ж н і к а м) ставіць па пэўных правілах трэці лік c (з д а б ы т а к). Абазначаецца знакам × або · ; у літарных выразах пішуць $a \times b$, $a \cdot b$ або проста ab.

М. р а ц ы я н а л ь н ы х л і к а ў $\frac{m}{n}$ і $\frac{p}{q}$ вызначаецца роўнасцю $\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq}$.

М. і р а ц ы я н а л ь н ы х л і к а ў вызначаецца як ліміт здабытку іх рацыянальных набліжанняў, а М. к а м п л е к с н ы х л і к а ў задаецца роўнасцю $\alpha\beta = (a+bi)(c+di) = ac-bd+i(ad+bc)$. М. лікаў камутатыўнае і асацыятыўнае і звязанае са *складаннем* законам *дыстрыбутыўнасці.* У *алгебры* М. можа называцца ўсякая алгебраічная аперацыя. У пэўных выпадках гэтая аперацыя ёсць абагульненне звычайнага М. лікаў, напрыклад М. кватэрніёнаў, матрыц, пераўтварэнняў. Аднак уласцівасці М. лікаў (напрыклад, камутатыўнасць) могуць пры гэтым не захоўвацца.

МНО́ЖАННЕ ІМАВЕ́РНАСЦЯЎ — тэрмін для знаходжання імавернасці $P = P(A_1 \cap ... \cap A_n)$. Імавернасць P роўная імавернасці падзеі A_1, памножанай на імавернасць падзеі A_2 пры ўмове, што падзея A_1 адбылася, ..., памножанай на імавернасць падзеі A_n пры ўмове, што падзеі $A_1, A_2, ..., A_n$ адбыліся. Для *незалежных падзей* формула спраўджваецца:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)...P(A_n).$$

МНО́ЖНІК — сімвал b у *здабытку* ab. Гл. *Множанне.*

МНО́ЖЫВА — сімвал a у *здабытку* ab. Гл. *Множанне.*

МНО́СТВА — асноўнае паняцце матэматыкі; *неазначальнае паняцце*. Таму паняццю М. можна даць толькі тлумачэнне: М. — набор, сукупнасць, збор якіх-небудзь аб'ектаў (названых яго элементамі). "Мноства ёсць многае, якое ўяўляецца як адзінае" (Г.Кантар).

Калі элемент a належыць мноству M, то гэта запісваюць $a \in M$, калі не належыць, то $a \notin M$, або $a \bar{\in} M$. М. можна задаць, калі назваць яго элементы або характарыстычную ўласцівасць (г.зн. уласцівасць, якую маюць усе элементы гэтага М. і толькі яны). Калі концае мноства M змяшчае элементы $a_1, ..., a_n$, то гэта запісваюць так: $M = \{a_1, ..., a_n\}$. Аналагічны запіс ужываюць для бясконцых М., напрыклад $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, ...\}$, $\mathbf{Z} = \{... -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$. Калі $P(x)$ — характарыстычная ўласцівасць мноства M (з элементаў x), гэта запісваюць $M = \{x \mid P(x)\}$. М., якое не змяшчае ніводнага элемента, называюць пустым і абазначаюць $\varnothing$. З М. можна здзяйсняць аперацыі *аб'яднання, дапаўнення, перасячэння мностваў, рознасці.* Для змястоўнага будавання "наіўнай" тэорыі М. такога тлумачэння паняцця М. дастаткова, бо для матэматычных тэорый істотныя стасункі паміж элементамі М., а не іх прырода. Аднак такая "наіўная" тэорыя М. супярэчлівая: у ёй знойдзены *парадоксы.*

МНО́СТВАЎ ТЭО́РЫЯ — раздзел матэматыкі, у якім вывучаюцца ўласцівасці *мностваў*, пераважна бясконцых. Калі кожны элемент мноства A з'яўляецца і элементам мноства B, то A называюць падмноствам мноства B (г.зн. мноства A — частка мноства B) і запісваюць $A \subseteq B$. Пустое мноства, паводле азначэння, не змяшчае ні аднаго элемента, яно ёсць падмноства ўсякага мноства. Непустое падмноства A мноства B, якое супадае з усім мноствам B, называюць уласным падмноствам апошняга.

З мноствамі можна выконваць аперацыі *аб'яднання, перасячэння мностваў, дапаўнення* і г.д. Аб'яднаннем (сумай) $A \cup B$ двух мностваў A і B называецца мноства ўсіх такіх элементаў, якія належаць хоць бы аднаму з іх. Перасячэннем (здабыткам) $A \cap B$ $(A \cdot B)$ двух мностваў A і B называецца мноства ўсіх такіх элементаў, якія належаць кожнаму з іх. Дапаўненнем мноства A да мноства M называюць мноства ўсіх такіх элементаў мноства M, якія мноству A не належаць. Гэта запісваюць C_{MA} або $M \setminus A$, а калі зразумела, пра якое мноства M ідзе гутарка, то пішуць $\bar{A}$. У дачыненні да аперацый аб'яднання $\cup$, перасячэння $\cap$ і дапаўнення $\bar{\ }$ сукупнасць падмностваў кожнага мноства ёсць *булева алгебра.* Вялікае значэнне ў матэматыцы мае яшчэ адна аперацыя з мноствамі — дэкартаў (прамы) здабытак $A \times B$ мностваў A і B, які азначаецца як мноства ўсіх упарадкаваных пар выгляду (A, B), дзе $a \in A$, $b \in B$.

У М.т. вывучаецца яшчэ адно з асноўных паняццяў матэматыкі — адлюстраванне. Звычайна яму даюць такое тлумачэнне. Няхай A і B — два непустыя мноствы. Калі кожнаму элементу $x \in A$ адпавядае адзіны элемент $y \in B$, тады кажуць, што маецца адлюстраванне мноства A у мноства B, або функцыя, дадзеная на мностве A са значэннямі ў мностве B. Калі праз B абазначаюць адлюстраванне мноства A у B, то гэта запісваюць $F: A \to B$, або $A \xrightarrow{F} B$. Калі $F: A \to B$ — адлюстраванне, то кожнаму элементу $x \in A$ адпавядае элемент $y \in B$, які называюць вобразам элемента x і запісваюць $y = F(x)$, або $F: x \to y$. Адлюстраванне $F: A \to B$ называецца біектыўным (узаемна адназначным), калі, па-першае, розныя элементы з мноства A адлюстроўваюцца на розныя элементы з мноства B і, па-другое, кожны элемент $y \in B$ ёсць вобраз пэўнага элемента мноства. Калі $F: A \to B$ — біектыўнае адлюстраванне, то кажуць таксама, што існуе ўзаемна адназначная адпаведнасць паміж мноствамі A і B. Паняцце ўзаемна адназначнай адпаведнасці паміж двума мноствамі мае вялікае значэнне для колькаснага параўнання бясконцых мностваў — першага важнага пытання, якое ўзнікла пры будаванні Г.Кантарам М.т. Відавочна, што для двух концых мностваў існуе ўзаемна адназначная адпаведнасць, калі і толькі калі абодва мноствы змяшчаюць аднолькавую колькасць элементаў. Як абагульненне гэтага факта азначаюць колькасную эквівалентнасць, або роўнамагутнасць, двух бясконцых мностваў: калі можна ўсталяваць узаемна адназначную адпаведнасць паміж гэтымі мноствамі (інакш кажучы, калі існуе біектыўнае адлюстраванне аднаго мноства на другое). Затым азначаюць магутнасць мноства A (кардынальны лік) як такую ўласцівасць гэтага мноства, якую мае кожнае мноства, роўнамагутнае мноству A. Такім чынам, паняцце магутнасці мноства з'яўляецца абагульненнем паняцця колькасці элементаў концага мноства. Каштоўнасць паняцця магутнасці мноства абумоўліваецца тым, што магут-

насці мностваў можна параўноўваць паміж сабою з дапамогай дачыненняў "больш" або "менш". Гэта заснавана на тым, што для кожных двух бясконцых мностваў A і B магчымы толькі тры выпадкі: 1) у A ёсць уласнае падмноства, роўнамагутнае B, але ў B няма роўнамагутнага A; 2) у B ёсць уласнае падмноства, роўнамагутнае A, а ў A няма ўласнага падмноства, роўнамагутнага B; 3) у A ёсць уласнае падмноства, роўнамагутнае B, і ў B ёсць уласнае падмноства, роўнамагутнае A. Даказваецца, што ў трэцім выпадку мноствы A і B роўнамагутныя. У першым выпадку кажуць, што магутнасць мноства A большая за магутнасць мноства B, у другім — магутнасць B большая за магутнасць A. Значную цікавасць мае факт існавання няроўнамагутных мностваў. Напрыклад, мноства ўсіх падмностваў пэўнага мноства M мае магутнасць, большую за магутнасць M. Мноства, роўнамагутнае мноству ўсіх натуральных лікаў, называюць злічальным мноствам. Магутнасць злічальнага мноства ёсць найменшая магутнасць, якую можа мець бясконцае мноства. Магутнасць мноства ўсіх рэчаісных лікаў называюць магутнасцю кантынуума. Г.Кантар выказаў гіпотэзу (гэтак званую *кантынуум-гіпотэзу*): кожнае падмноства мноства ўсіх рэчаісных лікаў або канцае, або злічальнае, або роўнамагутнае мноству ўсіх рэчаісных лікаў (гл. таксама *Кантынуума праблема*).

Вялікую ролю ў матэматыцы маюць часткова ўпарадкаваныя, лінейна ўпарадкаваныя і зусім упарадкаваныя мноствы. Мноства A называецца часткова ўпарадкаваным, калі на ім задаецца дачыненне (частковага) парадку (абазначаецца $\leq$), г.зн. дачыненне, якое задавальняе наступныя ўмовы: 1) $x \leq x$ для кожнага $x \in A$ (рэфлексіўнасць); 2) калі $x \leq y$, $y \leq z$, то $x \leq z$ (транзітыўнасць); 3) калі $x \leq y$ і $y \leq x$, то $x = y$ (антысіметрычнасць). Часткова ўпарадкаванае мноства A, для кожных двух элементаў x, y якога або $x \leq y$, або $y \leq x$, называюць лінейна ўпарадкаваным мноствам (*ланцугом*). Лінейна ўпарадкаванае мноства называюць зусім упарадкаваным мноствам, калі кожнае яго падмноства мае найменшы элемент. (Элемент a часткова ўпарадкаванага мноства A называецца найменшым, калі $a \leq x$ для кожнага $x \in A$.) У М.т. добра вядомы прынцып зусім упарадкавання (*Цэрмела тэарэма*): кожнае мноства можна зусім упарадкаваць. Такое сцверджанне на самой справе эквівалентнае гэтак званай аксіёме выбару.

Два зусім упарадкаваныя мноствы A і B называюць ізаморфнымі (або падобнымі, або тымі, што маюць адзін парадкавы тып), калі для іх можна задаць узаемна адназначную адпаведнасць, якая захоўвае парадак элементаў (г.зн. для кожных двух элементаў a_1, $a_2 \in A$ і адпаведных ім элементаў b_1, $b_2 \in B$ з $a_1 \leq a_2$ вынікае $b_1 \leq b_2$ і наадварот). Тую ўласцівасць зусім упарадкаванага мноства A, якую мае і кожнае зусім упарадкаванае мноства B, ізаморфнае A, называюць *трансфінітным лікам* (трансфінітам), або ардынальным лікам (ардыналам), або *парадкавым лікам*. Відавочна, што ўсе канцыя зусім упарадкаваныя мноствы, якія маюць аднолькавую колькасць элементаў, ізаморфныя паміж сабою. Яны маюць адзін і той жа парадкавы тып, які можна атаясаміць з натуральнымі лікамі, што разглядаюцца тады як парадкавыя лікі (у той час, калі тыя ж натуральныя лікі, характарызуючы колькасць элементаў мноства, выступаюць у іншай ролі — як колькасныя лікі). Такім чынам, трансфінітныя лікі з'яўляюцца абагульненнем паняцця парадкавага ліку канцага мноства на бясконцыя мноствы (бо абагульненне паняцця колькасці элементаў канцага мноства прыводзіць да паняцця магутнасці мноства). Для трансфінітных лікаў можна ўвесці паняцце "больш" і "менш". Менавіта кажуць, што трансфінітны лік α меншы за трансфінітны лік β ($\alpha < \beta$), калі пэўнае (а тады і кожнае) зусім упарадкаванае мноства тыпу α ізаморфнае нейкаму адрэзку пэўнага (а тады і кожнага) мноства тыпу β (адрэзкам зусім упарадкаванага мноства A называецца падмноства ўсіх яго элементаў, папярэдніх элементу $a \in A$). Пры гэтым даказваецца, што для кожных двух трансфінітных лікаў магчымы адзін і толькі адзін з трох выпадкаў: або $\alpha < \beta$, або $\alpha = \beta$, або $\alpha > \beta$.

Часам трансфінітнымі лікамі называюць элементы зусім упарадкаванага мноства. Прынцып трансфінітнай індукцыі, які мае вялікае значэнне ў матэматыцы, з'яўляецца абагульненнем звычайнага прынцыпу матэматычнай індукцыі на адвольныя зусім упарадкаваныя мноствы: калі пэўнае выказванне мае месца для найменшага элемента зусім упарадкаванага мноства A і калі з таго, што яно мае месца і для кожнага элемента мноства A, папярэдняга зададзенаму элементу a з мноства A, вынікае, што яно мае месца і для элемента a, то дадзенае выказванне мае месца для кожнага элемента мноства A.

Уплыў М.т. на развіццё сучаснай матэматыкі вельмі вялікі: М.т. — аснова будавання практычна ўсіх матэматычных дысцыплін. Але ў пытанні

абгрунтавання матэматыкі сама М.т. патрабуе абгрунтавання тых метадаў разважання, якія ўжываюцца ў ёй: "наіўная" тэорыя мностваў Кантара супярэчлівая (у ёй знойдзены *парадоксы*).

МО́ДА — адна з лікавых характарыстык *выпадковай велічыні.* Для выпадковай велічыні ξ непарыўнага тыпу М. называецца адвольны пункт x_0 максімуму шчыльнасці імавернасці $P_\xi(x)$. Для дыскрэтнай выпадковай велічыні: калі значэнні x_k выпадковай велічыні ξ з размеркаваннем $P_k = P(\xi = x_k)$ размясціць у парадку нарастання, то пункт x называецца М., калі $P_m \geq P_{m-1}$ і $P_n \leq P_{m+1}$. Размеркаванні з адной М. называюць унімадальнымі.

МО́ДУЛЬ (ад лац. modulus — мера) — 1) М. вектара — адна з характарыстык *вектара*, яго даўжыня (норма); абазначаецца $\boldsymbol{a} \equiv a$. М. вектара роўны нулю, калі і толькі калі гэты вектар нулявы. М. вектара $\boldsymbol{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ вылічаецца па формуле $\boldsymbol{a} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$; 2) М. рэчаіснага (камплекснага) ліку — тое, што *абсалютная велічыня*; 3) М. пераходу ад лагарыфма па аснове a да лагарыфма па аснове b — лік $M = 1 / \log_a b$; выкарыстоўваецца пры вылічэннях лагарыфмаў лікаў пры розных асновах: $\log_b x = M \log_a x$; 4) М. над асацыятыўным колцам R (правы) — *абэлева група* М. такая, што для адвольных $m \in M$ і $a \in R$ вызначаны здабытак $ma \in M$. Пры гэтым для адвольных m, $n \in M$, a, $b \in R$ выконваюцца правілы: $(m + n)\,a = ma + na$; $m\,(a + b) = ma + mb$; $m\,(ab) = (ma)\,b$. Аналагічна азначаецца левы R-модуль. Гэтыя паняцці супадаюць, калі R — камутатыўнае колца. М. — абагульненне паняцця *вектарнай прасторы.* Тэорыя М. узнікла пры даследаванні арыфметыкі палёў алгебраічных лікаў як тэорыя ідэалаў колцаў, паступова набыла самастойныя рысы, стала асновай алгебраічнай K-тэорыі.

МО́МАНТ (ад лац. momentum — рухальная сіла, штуршок) — адна з лікавых характарыстык размеркавання імавернасцяў. М. парадку k ($k > 0$, цэлае) выпадковай велічыні x вызначаецца як матэматычнае спадзяванне Mx^k выпадковай велічыні x^k, калі яно існуе. Калі $F(x)$ — функцыя размеркавання выпадковай велічыні x, то $Mx^k =$ $= \int_{-\infty}^{+\infty} x^k dF(x)$ пры ўмове, што інтэграл збягаецца абсалютна. Пры вызначэнні М. у тэорыі імавернасцяў выкарыстоўваюць простую аналогію з адпаведным паняццем у механіцы: М. размеркавання масаў. Задача, у якой размеркаванне імавернасцяў вызначаецца паслядоўнасцю яго М., мае назоў *мамантаў праблема.* Яе ўпершыню разгледзеў П.Чабышоў (1874) пры даследаванні лімітавых тэарэм імавернасцяў. У матэматычнай статыстыцы для статыстычнай ацэнкі параметраў размеркавання выкарыстоўваюць *выбаркавыя моманты.*

МО́МАНТАЎ МЕ́ТАД — метад у тэорыі імавернасцяў для знаходжання размеркавання па яго *момантах.* Грунтуецца на тэарэме: няхай $F_n(x)$ — паслядоўнасць функцый размеркавання з момантамі $\alpha_k(n)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, функцыя размеркавання $F(x)$ адназначна вызначаецца сваімі момантамі β_k і $\alpha_k(n) \to \beta_k$ пры $n \to \infty$ і кожным n. Тады $F_n(x) \to F(x)$ пры $n \to \infty$ і ў кожным пункце непарыўнасці $F(x)$. А.Маркаў з дапамогай М.м. (1896) даказаў *цэнтральную лімітавую тэарэму.* М.м. выкарыстоўваюць у матэматычнай статыстыцы для ацэнак невядомых параметраў размеркавання па выніках назіранняў. Пры пэўных умовах М.м. дазваляе атрымаць асімптатычныя нармальныя ацэнкі, якія маюць матэматычнае спадзяванне, адрознае на велічыню парадку n^{-1} ад шуканага параметра.

МО́МАНТАЎ ПРАБЛЕ́МА — праблема існавання адзінага размеркавання імавернасцяў P такога, што $\mu_n = \int_a^b x^n p(dx)$ — моманты размеркавання P для ўсіх n, дзе $\mu_0 = 1$, $\mu_1, \ldots, \mu_n, \ldots$ — пэўныя сталыя. Адной з умоваў, дастатковых для таго, каб размеркаванне вызначалася сваімі момантамі, з'яўляецца ўмова Карлемана:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\mu_{2n})^{-\frac{1}{2n}} = \infty.$$

МО́НТЭ-КА́РЛА МЕ́ТАД — лікавы метад, заснаваны на мадэляванні выпадковых велічыняў і будаванні статыстычных ацэнак для шуканых велічыняў. Мадэляванне выпадковых велічыняў з дадзенымі размеркаваннямі ажыццяўляецца, як правіла, шляхам пераўтварэння аднаго або некалькіх незалежных значэнняў выпадковага ліку α, размеркаванага раўнамерна ў інтэрвале (0, 1). Калі ў разліку на М.-К.м. мадэлююцца выпадковыя велічыні, якія вызначаюцца рэальным зместам, то разлік ёсць прамое мадэляванне (імітацыя) гэтай з'явы. Тым не менш часта прамое мадэляванне не можа забяспечыць патрэбнай дакладнас-

ці ацэнак шуканых велічыняў. М.-К.м. выкарыстоўваюць таксама для ацэнкі мнагакратных інтэгралаў, для развязвання інтэгральных і дыферэнцыяльных раўнанняў.

МО́РГАНА ЗАКО́НЫ, законы дэ Моргана — наступныя дзве эквіваленцыі *алгебры логікі*: $\overline{x \wedge y} \Leftrightarrow \bar{x} \vee \bar{y}$, $\overline{x \vee y} \Leftrightarrow \bar{x} \wedge \bar{y}$, дзе $\wedge$ — кан'юнкцыя, $\vee$ — дыз'юнкцыя, $\bar{\ }$ — адмаўленне (аперацыі алгебры логікі). Даказаў О.дэ Морган (19 ст.).

МО́ЦНАЯ ВЫТВО́РНАЯ — тое, што *Фрэшэ вытворная.*

МУА́ЎРА ФО́РМУЛА — формула, якая выражае правіла для падвышэння ў ступень n камплекснага ліку z, пададзенага ў трыганаметрычнай форме: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Паводле М.ф., модуль камплекснага ліку падвышаецца ў гэтую ступень, а яго аргумент φ множыцца на паказнік ступені:

$$z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

У выпадку натуральнага n М.ф. можа быць выкарыстана для выражэння $\cos n\varphi$ і $\sin n\varphi$ праз ступені $\cos\varphi$ і $\sin\varphi$:

$$\cos n\varphi = \cos^n\varphi - C_n^2\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi +$$
$$+C_n^4\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi - \ldots,$$
$$\sin n\varphi = C_n^1\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi - C_n^3\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi + \ldots.$$

Абарачэнне М.ф. прыводзіць да формулы здабывання кораня з камплекснага ліку

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} =$$
$$= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

М.ф. даказаў А.Муаўр (1707). Сучасны яе запіс прапанаваў Л.Ойлер (1748).

МУА́ЎРА—ЛЯПЛЯ́СА ТЭАРЭ́МА — інтэгральная тэарэма пра асімптатычнае размеркаванне колькасці з'яўленняў падзеі ў выпрабаваннях Бэрнулі. Няхай здзяйсняюцца n незалежных выпрабаванняў Бэрнулі, у кожным з якіх магчымае з'яўленне падзеі A з імавернасцю p, і няхай m — колькасць з'яўленняў падзеі A у гэтых выпрабаваннях. Тады справядлівая інтэгральная лімітавая М.—Л.т.:

$$p\left\{a \le \frac{m-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le b\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}dt =$$
$$= \Phi(b) - \Phi(a),\ a < b,$$

дзе $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ — функцыя размеркавання стандартнага нармальнага закону.

МЭ́ТАВАЯ ФУ́НКЦЫЯ — функцыя, для якой шукаюць мінімальнае або максімальнае значэнне пры пэўных абмежаваннях на зменныя. Гл. таксама *Лінейнае праграмаванне.*

МЯЖА́ — сукупнасць усіх *межавых пунктаў* мноства.

НА́БЛА-АПЕРА́ТАР — тое, што *Гамільтана аператар.*

НАБЛІЖА́ЛЬНЫ ДРОБ — лік або функцыя, якія ўзнікаюць пры абрыве *непарыўнага дробу.*

НАБЛІ́ЖАНАЯ ФО́РМУЛА — формула $f(x) \approx f^*(x)$, якую атрымліваюць з формулы выгляду $f(x) = f^*(x) + \varepsilon(x)$, дзе $\varepsilon(x)$ разглядаецца як хібнасць і пасля ацэнкі адкідваецца. Часта Н.ф. атрымліваюць з дапамогай раскладання функцыі ў шэрагі, напрыклад у шэраг Тэйлара. Каб упэўнена выкарыстоўваць Н.ф., неабходна мець ацэнку рознасці паміж дакладным і набліжаным выразам функцыі, напрыклад, калі рознасць паміж $\sin x$ і двухскладам $x - \frac{x^3}{6}$ не перавышае па абсалютнай велічыні $x^5 / 120$, лёгка пераканацца, што Н.ф. $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$ дае значэнне $\sin x$ з дакладнасцю да сотых, тысячных, дзесяцітысячных, калі x адпаведна менш чым 0,89 (≈51°), 0,55 (≈32°), 0,34 (≈20°).

НАБЛІ́ЖАННЕ — тое, што *апраксімацыя.*

НАБЛІ́ЖАННЕ ФУ́НКЦЫЙ КАМПЛЕ́КСНАЙ ЗМЕ́ННАЙ — раздзел камплекснага аналізу, у якім вывучаюць пытанні набліжанага вы-

яўлення функцый камплекснай зменнай аналітычнымі функцыямі спецыяльных класаў. Напрыклад, кожную *галаморфную функцыю* ў адназлучным абсягу плоскасці камплекснай зменнай можна раўнамерна наблізіць на кампактных падмноствах гэтага абсягу (тэарэма Рунге). Многа дастасаванняў мае Н.ф.к.з. некалькіх камплексных зменных.

НАБЛІ́ЖАННЯ ФУ́НКЦЫЙ ТЭО́РЫЯ — тое, што *апраксімацыі тэорыя.*

НАВАКО́ЛЛЕ пункта a (мноства A) — адвольнае адкрытае падмноства тапалагічнай прасторы, якое змяшчае пункт x (альбо падмноства A). Часам пад Н. пункта a (мноства A) разумеюць такое адвольнае падмноства тапалагічнай прасторы, якое змяшчае пункт a (мноства A) унутры сябе.

Акругай пункта a называюць сіметрычнае Н. у дачыненні да пункта a (напрыклад, сіметрычны інтэрвал на простай $\mathbf{R}$, нутро круга адвольнага радыуса з цэнтрам у пункце a на плоскасці $\mathbf{R}^2$, нутро шара з цэнтрам у пункце a у прасторы $\mathbf{R}^3$); ε-акругай пункта a называюць акругу радыуса ε з цэнтрам у пункце a. Паняцце акругі абагульняецца на прастору $\mathbf{R}^n$, $n > 3$.

НАДЗЕ́ЙНАСЦІ ТЭО́РЫЯ — раздзел дастасоўнай матэматыкі, у якім распрацоўваюцца метады забеспячэння эфектыўнай працы сістэм. У Н.т. распрацоўваюцца не толькі колькасныя паказнікі надзейнасці вырабаў, але і даюцца пэўныя рэкамендацыі наконт забеспячэння іх надзейнасці на этапах праектавання, вытворчасці, захоўвання, эксплуатацыі і рамонту. Надзейнасць залежыць ад шматлікіх падзей, якія з'яўляюцца выпадковымі, таму значнае месца ў Н.т. займаюць *імавернасцяў тэорыя* і *матэматычная статыстыка.*

НАДПО́ЛЕ — тое, што *пашырэнне поля.*

НАЗІРА́ННЯЎ АПРАЦО́ЎКА — дастасаванне да выніку назіранняў матэматычных метадаў для атрымання высновы наконт праўдзівасці значэнняў тых або іншых велічыняў. Звычайна вынікі назіранняў X нейкай велічыні μ лічаць выпадковай велічынёй. Тады велічыню $\delta = X - \mu$ называюць памылкай вымярэнняў. Велічыня δ ёсць таксама выпадковая велічыня з матэматычным спадзяваннем $b = M\delta$. У роўнасці $X = \mu + b + (\delta - b)$ велічыню δ называюць сістэматычнай памылкай, а $(\delta - b)$ — выпадковай памылкай. Калі $X_1, X_2, ..., X_n$ — вынікі незалежных вымярэнняў велічыні μ, тады звычайна лічаць $\mu \approx \overline{X} - b = \frac{X_1 + ... + X_n}{n} - b$. Калі патрабуецца вылічыць значэнне нейкай функцыі $f(x)$ у пункце $X = \mu$, то за набліжанае значэнне прымаюць велічыню $f(\mu) = f(\overline{X} - b)$. У выпадку некалькіх невядомых параметраў Н.а. ажыццяўляецца з дапамогай *найменшых квадратаў метаду.* Больш складаныя праблемы ўзнікаюць у выпадку функцыйнай залежнасці паміж велічынямі. Тады да Н.а. дастасоўваюць метады матэматычнай статыстыкі, у прыватнасці тэорыі карэляцыі і рэгрэсіі.

НАЗО́ЎНІК — выраз b у выразе $\frac{a}{b}$. Калі b — натуральны лік, то Н. b паказвае намеры доляў адзінкі, з якіх утвораны дроб. Тэрмін Н. упершыню сустракаецца ў М.Планула (канец 13 ст.).

НАЗО́ЎНІК ГЕАМЕТРЫ́ЧНАЙ ПРАГРЭ́СІІ — гл. *Геаметрычная прагрэсія.*

НАЙБО́ЛЬШЫ АГУ́ЛЬНЫ ДЗЕ́ЛЬНІК — азначаецца для двух або некалькіх натуральных лікаў як найбольшы з лікаў, на якія падзяляецца кожны з дадзеных лікаў. Н.а.дз. карыстаюцца пры скарачэнні дробаў. Калі вядомыя расклады дадзеных лікаў на простыя множнікі, то для атрымання Н.а.дз. гэтых лікаў трэба ўзяць здабытак тых множнікаў, якія ўваходзяць ва ўсе расклады, беручы кожны найменшую колькасць разоў, якую ён трапляецца. Агульны прыём пошуку Н.а.дз. двух лікаў — гэта спосаб паслядоўнага дзялення (выкарыстаны Эўклідам у 3 ст. да н.э.). Калі Н.а.дз. двух лікаў роўны 1, тады гэтыя лікі называюць узаемна простымі. Н.а.дз. d лікаў a і b і *найменшы агульны кратны* m гэтых лікаў звязаныя стасункамі $dm = ab$. Паняцце Н.а.дз. ужываецца таксама і да мнагаскладаў.

НАЙБО́ЛЬШЫ ЭЛЕМЕ́НТ — элемент $a \in A$ (дзе A — часткова ўпарадкаванае мноства) такі, што $x \le a$ для кожнага $x \in A$.

НАЙВЫШЭ́ЙШАЙ АЛГЕБРАІ́ЧНАЙ СТУПЕ́НІ ДАКЛА́ДНАСЦІ КВАДРАТУ́РНАЯ ФО́РМУЛА — формула выгляду

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \approx \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i),$$

дзе вагавая функцыя $p(x)$ лічыцца неадмоўнай на $[a, b]$ і такой, што існуюць інтэгралы $\int_a^b x^k p(x) dx$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Вузлы x_i гэтай формулы ёсць нулі

артаганальнага на $[a, b]$ з вагой $p(x)$ мнагаскладу ступені n, каэфіцыенты c_i вызначаюцца так, што формула з'яўляецца інтэрпаляцыйнай і мае алгебраічную ступень дакладнасці $2n-1$ (дакладная для ўсіх алгебраічных мнагаскладаў $f(x)$ ступені, не вышэйшай за $2n-1$). Для мнагаскладу x^{2n} яе дакладнасць парушаецца (гл. *Гаўса квадратурная формула).*

НАЙЛЕ́ПШАЕ НАБЛІ́ЖАННЕ — 1) паняцце тэорыі набліжання функцый. Няхай $f(x)$ — адвольная непарыўная функцыя, зададзеная на нейкім адрэзку $[a, b]$, а $\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)$ — фіксаваная сістэма непарыўных функцый на $[a, b]$. Тады

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x)-a_1\varphi_1(x)-...-a_n\varphi_n(x)|=D_n(f,\varphi,a)$$

называюць адхіленнем функцыі $f(x)$ ад абагульненага мнагаскладу $P_n(x)=a_1\varphi_1(x)+...+a_n\varphi_n(x)$. Велічыня $E_n(f,\varphi)=\min_{(a_1,...,a_n)} D_n(f,\varphi,a)$ называецца Н.н. функцыі $f(x)$ з дапамогай сістэмы функцый $\varphi_1(x),...,\varphi_n(x)$.

Мнагасклад, для якога адхіленне ад функцыі $f(x)$ роўнае Н.н. (такі мнагасклад заўсёды існуе), называецца мнагаскладам, найменш адхіленым ад функцыі $f(x)$ на адрэзку $[a, b]$. Н.н. можна разглядаць і ў іншых метрыках блізкасці $P_n(x)$ да $f(x)$. Тэорыя набліжанняў узнікла з рэальных задач па тэорыі механізмаў, якія разглядзеў П.Чабышоў (1854); 2) паняцце тэорыі *дыяфантавых набліжанняў.* Дроб P/q, $P\in\mathbf{Z}$, $q\in\mathbf{N}$ называецца дробам найлепшага набліжэння для ліку α, калі

$$\min_{1\le n\le q}\left|\alpha-\frac{m}{n}\right|=|\alpha-P/q|.$$

Усе Н.н. такія, што $\left|\alpha-\frac{m}{n}\right|<\frac{1}{2n^2}$, атрымліваюць з дапамогай раскладання α у ланцуговы дроб.

НАЙЛЕ́ПШАЯ КВАДРАТУ́РНАЯ ФО́РМУЛА — формула для набліжанага вылічэння інтэграла, якая мае на дадзеным класе функцый найменшую хібнасць у параўнанні з іншымі формуламі.

Найлепшай сярод формул у класе $W^r[0,2\pi]$, $r\in\mathbf{N}$, дыферэнцавальных да парадку r, 2π-перыядычных функцый ёсць формула

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx=\sum_{k=0}^{m-1}c_k f(x_k)+R_m(f)$$

з роўнааддаленымі вузламі і роўнымі каэфіцыентамі:

$$x_k=\frac{2k\pi}{m},\ c_k=\frac{2\pi}{m},\ |R_m(f)|\le\frac{2\pi K_r}{m^r},$$

дзе K_r — канстанта Фавара. Н.к.ф. знойдзеныя таксама для многіх іншых класаў перыядычных і неперыядычных функцый (сярод формул гэтага класа і сярод квадратурных формул, у якіх акрамя значэнняў функцыі выкарыстоўваюцца значэнні некаторых вытворных у вузлах).

НАЙМЕ́НШАЕ АГУ́ЛЬНАЕ КРА́ТНАЕ — азначаецца для двух або некалькіх натуральных лікаў як найменшы дадатны лік, які дзеліцца на кожны з іх. Выкарыстоўваецца пры складанні і адыманні дробаў. Найменшы агульны назоўнік двух або некалькіх дробаў — Н.а.к. іх назоўнікаў. Калі вядомыя расклады лікаў на простыя множнікі, то для атрымання Н.а.к. гэтых лікаў трэба ўзяць здабытак усіх множнікаў, беручы кожны найбольшую колькасць разоў, якую ён трапляецца. Паняцце Н.а.к. ужываецца таксама і для мнагаскладаў. Гл. таксама *Найбольшы агульны дзельнік.*

НАЙМЕ́НШЫ ЭЛЕМЕ́НТ — элемент $a\in A$ (дзе A — часткова ўпарадкаванае мноства) такі, што $x\ge a$ для адвольнага $x\in A$.

НАЙМЕ́НШЫХ КВАДРА́ТАЎ МЕ́ТАД — адзін з асноўных метадаў тэорыі памылак для ацэнкі невядомых велічынь па выніках вымярэнняў з выпадковымі памылкамі. Няхай зроблена n незалежных назіранняў $x_1, ..., x_n$ невядомай велічыні a. Паводле Н.к.м., у якасці ацэнкі велічыні a прымаецца такі лік y, для якога будзе найменшай сума квадратаў $s(y)=\sum_{i=1}^{n}s_i(x_i-y)^2$, дзе $s_i=\frac{k}{\sigma_i^2}$ — вага выніку вымярэння, $\sigma_i^2=D\delta_i=\mu\sigma_i^2$, σ_i — квадратовае адхіленне вымярэння з нумарам i, $\delta_1=x_1-a, ..., \delta_n=x_n-a$ — выпадковыя памылкі, k — адвольны лік.

Сума $s(y)$ будзе найменшай, калі накласці $y=\bar{x}=\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{n}s_ix_i$, $s=\sum_{i=1}^{n}s_i$. Атрыманая ацэнка $\bar{x}$ велічыні a пазбаўленая сістэматычнай памылкі. Яна мае матэматычнае спадзяванне μa і дысперсію $D\bar{x}=\frac{k}{s}$. Пры роўнадакладных вымярэннях атрымліваем $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i, D\bar{x}=\frac{\sigma^2}{n}$. Калі n дастаткова вялікі, тады пры некаторых нязначных абмежаваннях можна даказаць, што размеркаванне $\bar{x}$

мала адрозніваецца ад нармальнага з матэматычным спадзяваннем μ_a і дысперсіяй k/s. У гэтым выпадку абсалютная хібнасць набліжанай роўнасці $a \approx \bar{x}$ меншая за $t\sqrt{k/s}$ з імавернасцю, блізкай да значэння інтэграла $I(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-u^2/2} du$. Калі невядомых некалькі, то добра распрацаваны толькі выпадак лінейных сувязяў вынікаў вымярэнняў з невядомымі велічынямі.

НАЙХУТЧЭЙШАГА СПУ́СКУ МЕ́ТАД — частковы выпадак *спуску метаду*, калі кірунак g^k, які паказвае спуск, выбіраецца процілеглым да $\mathbf{grad} f(x^k)$. Формулы Н.с.м. маюць выгляд $x^{k+1} = x^k - \alpha_k f'(x^k)$, $k = 0, 1, ...$, дзе параметры α_k выбіраюцца з умовы максімальнага памяншэння на кожным кроку функцыі $f(x)$. Калі функцыя $f(x)$ двойчы непарыўна дыферэнцавальная і матрыца f'' яе другіх вытворных праўдзіць для адвольных x, y няроўнасць $m\|y\|^2 \le (f''(x)y, y) \le M\|y\|^2$ з канстантамі $M \ge m > 0$, то паслядоўнасць збягаецца да развязку x^* задачы мінімізацыі функцыі $f(x)$ з хуткасцю геаметрычнай прагрэсіі з назоўнікам $q < 1$.

НАКРЫВА́ННЕ — адлюстраванне тапалагічных прастораў p: $X \to Y$, пры якім праобраз нейкага адкрытага злучнага наваколля $U(y)$ кожнага пункта $y \in Y$ распадаецца на адкрытыя злучныя кампаненты, якія з дапамогаю p гамеаморфна адлюстроўваюцца на $U(y)$. Н. — тое, што лакальна трывіяльнае *сппаставанне* з дыскрэтным пластом.

НАКРЫЦЦЁ м н о с т в а X — сям'я падмностваў гэтага мноства, аб'яднанне якіх ёсць X; сям'я падмностваў прасторы, у якой размешчана X і якое змяшчае X. У тэорыі тапалагічных прастораў натуральна разглядаюць адкрытыя Н., у якіх усе элементы — адкрытыя мноствы, бо іх элементы нясуць у сабе поўную інфармацыю пра лакальнае будаванне прасторы. На мове Н. вызначаецца памернасць паводле Лебэга *нармальнай прасторы*; яна не перавышае натуральнага ліку n, калі ў адвольнае канцае Н. можна ўмежыць адкрытае Н., кратнасць якога (г.зн. лік элементаў Н., якія змяшчаюць дадзены пункт) не перавышае n. Магчымасць у адвольнае адкрытае Н. умежыць канцае адкрытае Н. характарызуе *кампактныя прасторы*.

НАМАГРА́МА (ад грэц. nomos — закон + gramma — пісьмовы знак, выява) — рысунак для адлюстравання функцыйнай залежнасці (формула, раўнанне, сістэма раўнанняў), які дазваляе знайсці адказ на зададзеных значэннях зменных без вылічэнняў і даследаваць функцыйную залежнасць. Тэорыя і практыка будавання Н. вывучаюцца ў *намаграфіі*.

НАМАГРА́ФІЯ (ад грэц. nomos — закон + graphō — пішу) — раздзел матэматыкі, у якім вывучаюць спосабы графічнага адлюстравання функцыйных залежнасцяў. Рысункі, што атрымліваюць пры гэтым, называюцца *намаграмамі*. Кожная намаграма будуецца для пэўнай функцыйнай залежнасці ў зададзеных межах змянення зменных. На намаграмах вылічальная работа замяняецца выкананнем простых геаметрычных аперацый, пададзеных у к л ю ч ы к а р ы с т а н н я намаграмай, і счытваннем адказаў.

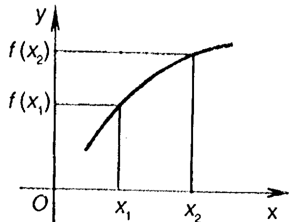
Дакладнасць вылічэння па намаграмах залежыць ад выгляду намаграфаванай залежнасці, межаў змянення зменных, памераў рысунка і выбранага тыпу намаграмы. У сярэднім намаграмы забяспечваюць атрыманне адказаў з 2—3 сапраўднымі вартаснымі лічбамі. З дапамогай намаграмаў можна даследаваць уплыў розных зменных на шуканую зменную, даць наглядную геаметрычную інтэрпрэтацыю якім-небудзь раней вядомым уласцівасцям дадзенай залежнасці, вызначыць раней невядомыя яе асаблівасці. Намаграфічныя метады даследавання выкарыстоўваюцца ў задачах на падбор параметраў эмпірычных формул па выніках назіранняў, на апраксімацыю адной функцыі іншай, на знаходжанне экстрэмальных значэнняў функцыі.

Атрымала развіццё м а ш ы н н а я Н., распрацаваны сістэмы працэдур і стандартных праграм для аўтаматычнага разліку і будавання элементаў намаграм з дапамогай камп'ютараў і графабудавання, а таксама стандартныя праграмы для аўтаматычнага канструявання, разліку і рысавання намаграм розных тыпаў.

НАРАСТА́ЛЬНАЯ ПАСЛЯДО́ЎНАСЦЬ — паслядоўнасць x_n ($n = 1, 2, ...$), для якой выконваецца няроўнасць $x_n < x_{n+1}, \forall n \in N$. Зрэдку такую паслядоўнасць называюць с т р о г а н а р а с т а л ь н а й адрозна ад н я с т р о г а й Н.п., што задавальняе для ўсіх n умову $x_n \le x_{n+1}$. Апошнюю называюць таксама *неспадальнай паслядоўнасцю*. Усякая абмежаваная зверху нарастальная (неспадальная) паслядоўнасць мае канцы ліміт.

НАРАСТА́ЛЬНАЯ ФУ́НКЦЫЯ — манатонная функцыя, значэнні якой павялічваюцца пры

павелічэнні значэнняў яе аргумента, напрыклад $2x+1$, x^3, $2x$, $\ln x$, $\arcsin x$. Функцыя $f(x)$ **н а р а с т а л ь н а я (с т р о г а) н а м н о с т в е** E, калі $f(x_1)<f(x_2)$ для адвольных x_1, x_2 з E такіх, што $x_1<x_2$ (гл. рыс.); калі выконваецца няроўнасць $f(x_1)\le f(x_2)$, то функцыя называецца н я с т р о г а н а р а с т а л ь н а й або *неспадальнай функцыяй.* Мяркуецца, што мноства E належыць абсягу вызначэння функцыі $f(x)$ (звычайна E — адрэзак, інтэрвал або паўінтэрвал).



Напрыклад, x^2 нарастае на промні $x\ge 0$; $\sin x$ — на адрэзку $-\pi/2\le x\le \pi/2$; $\operatorname{tg}x$ — на інтэрвале $-\pi/2<x<\pi/2$. Функцыю $f(x)$ называюць н а р а с т а л ь н а й у пункце x_0, калі існуе такое наваколле пункта x_0, у якім $f(x)$ з'яўляецца нарастальнай. Для таго каб функцыя была нарастальнай на інтэрвале, неабходна і дастаткова, каб яна была нарастальнай у кожным пункце гэтага інтэрвала. Дыферэнцавальная на інтэрвале (a, b) функцыя $f(x)$ нарастальная на гэтым інтэрвале, калі і толькі калі $f'(x)\ge 0$ на (a, b) і $f'(x)\ne 0$ на кожным інтэрвале, які ўваходзіць у (a, b).

НАРМАВА́ННЕ — адлюстраванне φ поля K у мноства неадмоўных рэчаісных лікаў, падпарадкаванае ўмовам: 1) $\varphi(x)\ge 0$ і $\varphi(x)=0$, калі і толькі калі $x=0$; 2) $\varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y)$; 3) $\varphi(x+y)\le$ $\le\varphi(x)+\varphi(y)$. Такое адлюстраванне называецца таксама н о р м а й або р э ч а і с н ы м а б с а л ю т н ы м з н а ч э н н е м. Калі здзейснена Н. поля K, то такое поле называюць у н а р м а в а н ы м.

Прыклад Н.: $p(x)=|x|$, $x\in R$ або C. Н. называецца н е а р х і м е д а в ы м, калі яно задавальняе ўмову $\varphi(x+y)=\max\{\varphi(x), \varphi(y)\}$, і а р х і м е д а в ы м, калі гэтая ўмова не выконваецца. Усе архімедавы Н. цалаў апісваюцца тэарэмай: калі K — цела з архімедавай нормай, то яно ізаморфнае ў с ю д ы ш ч ы л ь н а м у п а д п о л ю поля рэчаісных або камплексных лікаў або падцелу цела кватэрніёнаў з індукаваным адтуль Н. Усякае нетрывіяльнае Н. поля рацыянальных лікаў супадае ці са звычайнай абсалютнай велічынёй, ці з p-адычным Н.

НАРМАВА́ННЕ ДЫСКРЭ́ТНАЕ п о л я K — нармаванне поля K, група значэнняў якога цыклічная. Максімальны ідэал m колца Н.д. з'яўляецца г а л о ў н ы м, яго ўтваральную называюць л а к а л ь н ы м п а р а м е т р а м. Усе астатнія ідэалы ў D — гэта ступені ідэалу m, напрыклад, калі p — просты лік, то адлюстраванне $\sigma_p:\mathbf{Q}\to\mathbf{R}^+\cup\{0\}$, якое кожнаму рацыянальнаму ліку m/n ставіць у адпаведнасць лік $\cdot\,1/p^r$, дзе r — такі лік, што $\frac{m}{n}=p^r\frac{m'}{n'}$ і m', n' на p не дзеляцца, ёсць Н.д. ($\mathbf{R}^+$ — упарадкаваная група дадатных рэчаісных лікаў). σ_p называецца p-а д ы ч н ы м н а р м а в а н н е м.

НАРМА́ЛЬ (ад лац. normalis — просты) — простая, якая знаходзіцца ў нармальнай прасторы N_pS падмнагастайнасці S рыманавай мнагастайнасці M і праходзіць праз пункт p. Няхай $M=E^3$ — трохмерная эўклідава прастора з выбранай дэкартавай сістэмай каардынат. Калі S — гіперпаверхня з раўнаннем $F(x, y, z)=0$, то кіроўны вектар Н. мае выгляд

$$\mathbf{grad}\,F|_p=\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)\Bigg|_p.$$

Калі S — крывая, то ў N_pS вылучаецца г а л о ў н а я Н. (Н., якая знаходзіцца ў судатычнай плоскасці) і б і н а р м а л ь (Н., якая перпендыкулярная да судатычнай плоскасці).

НАРМА́ЛЬНАГА РАЗМЕРКАВА́ННЯ ФУ́НКЦЫЯ — у агульным выпадку вылічаюць па формуле $F_\xi(x, a, \sigma)=\Phi(t)$, дзе $t=(x-a)/\sigma$, $\Phi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ — функцыя размеркавання стандартнага *нармальнага размеркавання.* Шырока выкарыстоўваецца ў лімітавых тэарэмах тэорыі імавернасцяў (гл. *Цэнтральная лімітавая тэарэма, Ляпунова тэарэма, Муаўра—Лапляса тэарэма*).

НАРМА́ЛЬНАЕ ЛІНЕ́ЙНАЕ ПЕРАЎТВАРЭ́ННЕ, н а р м а л ь н ы а п е р а т а р — лінейны аператар f: $V\to V$ эўклідавай вектарнай або унітарнай прасторы V, перастаўляльны са сваім спалучаным аператарам: $ff^*=f^*f$. Паняцце Н.л.п. ёсць абагульненне паняццяў артаганальнага або унітарнага аператараў — для іх праўдзіцца роўнасць $f\cdot f^*=f^*f=Id$. Уласцівасці Н.л.п. падобныя да ўласцівасцяў артаганальных ці унітарных аператараў. Лінейны аператар $f:V\to V$ канцамернай унітарнай прасторы V ёсць Н.л.п., калі і толькі

калі ў V існуе ортаўнармаваны базіс, у якім f мае дыяганальную матрыцу. Лінейны аператар f: $V \to V$ канцамернай эўклідавай прасторы з V ёсць Н.л.п., калі і толькі калі існуе ортаўнармаваны базіс V, у якім f мае матрыцу

$$\mathrm{diag}\,(A_1, ..., A_k, \alpha_1, ..., \alpha_m),$$

$$A_i = r_i\begin{pmatrix} \varepsilon_i \cos\varphi_i & -\sin\varphi_i \\ \varepsilon_i \sin\varphi_i & \cos\varphi_i \end{pmatrix},\ r_i,\ \varphi_i,\ \alpha_i \in \mathbf{R},\ \varepsilon_i \in \{1, -1\}.$$

НАРМА́ЛЬНАЕ РАЗМЕРКАВА́ННЕ — размеркаванне імавернасцяў выпадковай велічыні ξ, якое мае шчыльнасць

$$P_\xi(x,a,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},\ x \in (-\infty, +\infty).$$

Пры гэтым матэматычнае спадзяванне ξ роўнае a, дысперсія — σ^2, характарыстычная функцыя мае выгляд $\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi} = e^{iat - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$, а моманты $\mu_{2k+1} = 0$, $\mu_{2k} = 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k-1)\sigma^{2k}$, дзе $\mu_k = E\,(\xi - E_\xi)^k$.

НАРМА́ЛЬНАЕ РАЎНА́ННЕ — 1) Н.р. плоскасці — раўнанне плоскасці выгляду $x \cdot \cos\alpha + y \cdot \cos\beta + z \cdot \cos\gamma - p = 0$, дзе

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},\ \cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

— кіроўныя косінусы вектара (A, B, C) плоскасці $Ax + By + Cz + D = 0$, p — адлегласць ад плоскасці да пачатку каардынат; 2) Н.р. простай на плоскасці — раўнанне простай выгляду $x\cos\Theta + y\sin\Theta - p = 0$, дзе Θ — вугал паміж воссю Ox і перпендыкулярам да простай з пачатку каардынат, p — адлегласць ад простай да пачатку каардынат.

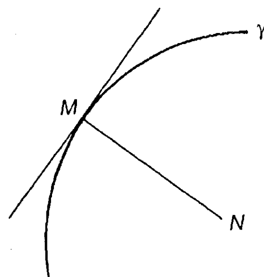
НАРМА́ЛЬНАЕ СЕ́ЧЫВА — азначаецца для паверхні σ у дадзеным яе пункце M як лінія перасячэння σ з плоскасцю, праведзенай праз нармаль у пункце M. З дапамогай Н.с. вывучаецца скрыўленне паверхні ў розных (датычных) кірунках, якія выходзяць з пункта M. Сярод гэтых кірункаў існуюць два ўзаемна перпендыкулярныя (гэтак званыя галоўныя) кірункі, для якіх нармальная крывіня (г.зн. крывіня адпаведнага Н.с.) дасягае найбольшага і найменшага значэнняў k_1 і k_2 (гэтак званыя галоўныя крывіні ў дадзеным пункце). Пры гэтым крывіні Н.с. бяруцца са знакам «+» (або «–»), калі кірунак увагнутасці сечыва супадае (супрацьлеглы) з дадатным кірункам нармалі да паверхні.

Крывіня k Н.с., праведзенага ў кірунку, які ўтварае вугал φ з першым з пазначаных галоўных кірункаў, звязаная з k_1 і k_2 формулай Ойлера: $k_n = k_1\cos^2\varphi + k_2\sin^2\varphi$. З дапамогай крывіняў Н.с. вывучаюцца таксама крывіні нахільных сечываў паверхні. Менавіта крывіню нахільнага сечыва плоскасцю П, якая праходзіць праз дадзеную датычную простую, выражаюць формулай Меньe: $k = k_n/\cos\Theta$, дзе Θ — вугал паміж плоскасцю П і нармаллю да паверхні, k_n — нармальная крывіня паверхні ў кірунку дадзенай датычнай.

НАРМА́ЛЬНАЯ ВЫТВО́РНАЯ — *вытворная* ад функцыі, узятая па нармалі да якой-небудзь крывой (або плоскасці). Няхай γ — крывая, пункт $M \in \gamma$, MN — нармаль да крывой у пункце M, а $z = f(x, y)$ — функцыя, зададзеная ў нейкім наваколлі пункта M. Тады Н.в. у пункце M ёсць

$$\lim_{N \to M} \frac{f(N) - f(M)}{NM} = \frac{\partial z}{\partial n},$$

дзе MN — адлегласць паміж M і N (гл. рыс.).



Аналагічна вызначаецца Н.в. у прасторы: няхай функцыя $u = f(x, y, z)$ вызначаная ў нейкім наваколлі пункта M, які належыць паверхні S, а MN — вонкавая (або нутраная) нармаль да паверхні S у пункце M. Тады Н.в. у пункце M ёсць

$$\lim_{N \to M} \frac{u(N) - u(M)}{NM} = \frac{\partial u}{\partial n}.$$

У тэорыі цеплаправоднасці, напрыклад, колькасць цяпла ΔQ, якое праходзіць праз элемент паверхні ΔS за час Δt, прапарцыйная велічыні $\Delta t \cdot \Delta S$ і нармальнай вытворнай $\frac{\partial U}{\partial n}$, г.зн.

$$\Delta Q = -k\frac{\partial U}{\partial n}\Delta t \cdot \Delta S.$$

Тут $u = u\,(x, y, z)$ — тэмпература.

НАРМА́ЛЬНАЯ КРЫВІНЯ́ — праекцыя k_n вектара крывіні лініі $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ на рэгулярнай паверхні $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)$ на нармаль паверхні ў разгляданым пункце. Н.к. на паверхні ёсць скалярны здабытак вектара крывіні $k\nu$ гэтай лініі і адзінкавага вектара нармалі $\boldsymbol{n}$ паверхні $k_n = k\nu \cdot \boldsymbol{n}$ або $k_n = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\cdot \boldsymbol{n}$. Адсюль, паколькі

$$d^2\boldsymbol{r}\cdot \boldsymbol{n} = \varphi_2 = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

— другая квадратовая форма паверхні,

$$ds^2 = \varphi_1 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

— першая квадратовая форма паверхні, маем $k_n = \varphi_2 / \varphi_1$, г.зн. Н.к. на паверхні роўная тасунку другой квадратовай формы паверхні да яе першай квадратовай формы, пры гэтым значэнні параметраў u, v патрэбна браць у разгляданым пункце, а іх дыферэнцыялы du, dv вылічаюцца ў гэтым пункце з раўнання лініі. Усе лініі на паверхні, якія праходзяць праз дадзены пункт і маюць у гэтым пункце агульную датычную, маюць у гэтым пункце аднолькавую Н.к., якая і называецца Н.к. паверхні.

НАРМА́ЛЬНАЯ МА́ТРЫЦА — квадратная матрыца над полем камплексных лікаў, для якой $AA^* = A^*A$, дзе A^* — матрыца, камплексна спалучаная з транспанаванай матрыцай A^{T}. Унітарныя, эрмітавы матрыцы ёсць Н.м. Для кожнай Н.м. A існуе унітарная матрыца S такая, што $S^{-1}AS$ — дыяганальная матрыца.

НАРМА́ЛЬНАЯ ПАДГРУ́ПА, нармальны дзельнік — падгрупа H групы G, якая разам з кожным элементам h змяшчае ўсе спалучаныя з ім элементы (г.зн. элементы выгляду $g^{-1}hg$, $g\in G$). Эквівалентнае азначэнне: H — Н.п. групы G, калі $g^{-1}Hg \subset H$ для кожнага элемента $g\in G$. Калі H ёсць Н.п. групы G, то кажуць, што H нармальная ў G, і пішуць $H\Delta G$. Правыя і левыя сумежныя класы групы G на Н.п. супадаюць. Пры кожным гомамарфізме φ: $G \to G'$ мноства H усіх элементаў групы G, якія пераводзяцца ў адзінку групы G' (г.зн. ядро гомамарфізму φ), ёсць Н.п. і наадварот: кожная Н.п. ёсць ядро кананічнага гомамарфізму на фактар-групе групы G па гэтай падгрупе. Група, якая не мае іншых Н.п., акрамя адзінкавай і самой сябе, называецца простай групай.

НАРМА́ЛЬНАЯ ПАСЛЯДО́ЎНАСЦЬ групы — паслядоўнасць падгрупаў $E = C_1 \subseteq C_2 \subseteq \ldots \subseteq C_k = C$ групы C, дзе C_{i-1} — *нармальная падгрупа* ў C_i. Магчыма разглядаць таксама бясконцыя паслядоўнасці, нарастальныя ці спадальныя (па ўлучэнні), у такім разе іх нумарацыя вядзецца парадкавымі лікамі (трансфінітамі). Фактарам паслядоўнасці называюць фактар-групы C_i/C_{i-1}, даўжынёй паслядоўнасці — колькасць яе фактараў, не роўных адзінцы. Дзве Н.п. называюцца ізаморфнымі, калі паміж іх фактарамі магчымае заданне такога ўзаемна адназначнага адлюстравання, пры якім адпаведныя адзін аднаму фактары ізаморфныя.

НАРМА́ЛЬНАЯ ПЛО́СКАСЦЬ — *гіперплоскасць*, якая для крывой S у эўклідавай прасторы M з'яўляецца *нармальнай прасторай*. Калі S задаецца раўнаннямі $x_i = x_i(t)$ $(i = \overline{1, n})$ у ортаўнармаванай сістэме каардынат, Н.п. у пункце $p(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ мае раўнанне $\sum_{i=1}^{n} x_i'(t)(x_i - x_i(t)) = 0$.

НАРМА́ЛЬНАЯ ПРАЕ́КЦЫЯ — 1) Н.п. на плоскасці — *паралельная праекцыя* на простую пры ўмове, што кірунак праектавання артаганальны дадзенай простай, на якую адбываецца праектаванне. Велічыня нармальнай праекцыі адрэзка даўжыні a вылічваецца па формуле $pr\,a = a\cos\varphi$, дзе φ — вугал паміж адрэзкам і простай. Калі адрэзак накіраваны, а простая арыентаваная, то вугал φ адлічваецца ад дадатнага кірунку простай і велічыня праекцыі можа быць адмоўнай; 2) Н.п. у прасторы — паралельная праекцыя на плоскасць, калі кірунак праектавання артаганальны дадзенай плоскасці.

НАРМА́ЛЬНАЯ ПРАСТО́РА — тапалагічная прастора, якая задавальняе аксіёмы T_1 і T_4 (гл. *Адддзялляльнасці аксіёмы*), г.зн. прастора, у якой аднапунктавыя мноствы замкнёныя і адвольныя два дыз'юнктавыя замкнёныя мноствы змяшчаюцца ў дыз'юнктавых адкрытых мноствах. Н.п. утвараюць прыватны выпадак цалкам рэгулярных прастораў. Усякая замкнёная падпрастора нармальная. Прастора, усе падпрасторы якой нармальныя, называецца спадчынна нармальнай. Здабытак дзвюх Н.п. не абавязкова Н.п. і нават здабытак Н.п. на адрэзак можа не быць Н.п.

НАРМА́ЛЬНАЯ ФО́РМА МА́ТРЫЦЫ A — матрыца спецыяльнага выгляду, да якой шляхам пэўных пераўтварэнняў прыводзіцца матрыца A. У залежнасці ад тыпу пераўтварэнняў, ад поля (у якім знаходзяцца каэфіцыенты), ад спецыфікі задачы разглядаюць розныя Н.ф.м. Найбольш распаўсюджаная Н.ф.м. — *жарданава нармальная форма матрыцы*.

НАРМА́ЛЬНЫ АЛГАРЫ́ТМ — адно з найбольш зручных матэматычных удакладненняў інтуіцыйнага паняцця *алгарытма*. Н.а. у фіксаваным алфавіце A азначаецца заданнем упарадкаванага канцага спісу формул падстановы ў A. Тэрмін Н.а. прапанаваў А.Маркаў (1947).

НАРМА́ЛЬНЫ АПЕРА́ТАР — замкнёны лінейны аператар A, вызначаны на шчыльнай у гільбэртавай прасторы H лінейнай мнагастайнасці D_A такі, што $AA' = A'A$, дзе A' — аператар, спалучаны з A.

НАРМА́ЛЬНЫ ВЕ́КТАР ПЛО́СКАСЦІ — вектар $N = (A, B, C)$ у дачыненні да плоскасці $Ax + By + Cz + D = 0$. Гл. *Плоскасць*.

НАРМА́ЛЬНЫ ДЗЕ́ЛЬНІК — тое, што *нармальная падгрупа*.

НА́РЫСНАЯ ГЕАМЕ́ТРЫЯ — раздзел *геаметрыі*, які вывучае адлюстраванне прасторавых формаў прадметаў, даследуе геаметрычныя ўласцівасці фігур і целаў па іх вобразах на плоскасці. З дапамогай метадаў Н.г. выконваюць усе вытворчыя рысункі, развязваюць задачы многіх раздзелаў тэхнікі, ажыццяўляюць разлік і канструяванне розных механізмаў, машын і інжынерных збудаванняў. Узнікненне і развіццё Н.г. звязанае з патрэбамі архітэктуры, мастацтва, тэхнікі. Пачаткі вучэння пра праекцыі вядомыя са старажытнасці. Навуковыя асновы заклалі французскія вучоныя Ж.Дэзарг і галоўным чынам Г.Монж, які з'яўляецца стваральнікам метаду артаганальнага праектавання.

НАТУРА́ЛЬНЫ ЛАГАРЫ́ФМ — лагарыфм, аснова якога ёсць лік $e = 2{,}71828...$ Н.л. ліку N абазначаецца $\ln N$. Першыя табліцы Н.л. лікаў ад 1 да 1000 надрукаваў Дж.Спэйдэл (1619); назоў належыць П.Менголі (1659) і М.Меркатару (1668), абазначэнне ln — А.Прынсхейму (1893).

НАТУРА́ЛЬНЫ ЛІК — элемент паслядоўнасці $N = (1, 2, 3, ...)$ дадатных цэлых лікаў. Гістарычна ўзніклі пры падліку м а г у т н а с ц і тых або іншых мностваў рэальнага свету і з'явіліся адной з першых грунтоўных абстракцый. Сістэма Н.л. задавальняе а к с і ё м у і н д у к ц ы і: адвольнае падмноства мноства N з 1, якое разам з лікам n змяшчае і $n + 1$, супадае з N. Гл. *Лікаў тэорыя*, *Пэана аксіёмы*.

НАТУРА́ЛЬНЫЯ РАЎНА́ННІ КРЫВО́Й — раўнанні, якія даюць выраз крывіні k і кручэння σ крывой як функцыі даўжыні яе дугі: $k = k(S)$, $\sigma = \sigma(S)$ адпаведна. Функцыі $k(S)$ і $\sigma(S)$ не залежаць ад становішча крывой у прасторы, а залежаць толькі ад формы крывой. Такім чынам, форму крывой адназначна вызначаюць яе Н.р.к. Для адвольных функцый $f(s)$ і $\varphi(s)$, з якіх першая дадатная, заўсёды існуе крывая, што $k_r(s) = f(s)$, $\sigma_r(s) = \varphi(s)$.

НАХІ́ЛЬНАЯ д а п р о с т а й l (п л о с к а с ц і) — простая, што перасякае зададзеную простую l (плоскасць) пад вуглом, які адрозніваецца ад прамога.

НЕАБМЕЖАВА́НАЯ ЛІ́КАВАЯ ПАСЛЯДО́ЎНАСЦЬ — паслядоўнасць, у якой для адвольнага дадатнага ліку A існуе элемент x_{n_0} лікавай паслядоўнасці такі, што $|x_{n_0}| \geq A$. Калі праўдзіцца няроўнасць $x_{n_0} \geq A$ ($x_{n_0} \leq -A$), то лікавая паслядоўнасць называецца н е а б м е ж а в а н а й з в е р х у (з н і з у).

НЕАБМЕЖАВА́НАЯ ФУ́НКЦЫЯ — функцыя $f\colon E \to \mathbf{R}$ такая, што для адвольнага дадатнага ліку A існуе $x \in E$, для якога выконваецца няроўнасць $|f(x)| \geq A$. Калі для адвольнага рэчаіснага ліку A існуе $x \in E$, для якога выконваецца няроўнасць $f(x) \geq A$ ($f(x) \leq A$), то функцыю f называюць н е а б м е ж а в а н а й з в е р х у (з н і з у). Напрыклад, Н.ф. $1 - 2^x$ — абмежаваная зверху; x^2 — абмежаваная знізу; $\ln x$ — Н.ф. зверху і знізу.

НЕАБХО́ДНЫЯ І ДАСТАТКО́ВЫЯ ЎМО́ВЫ — умовы, без выканання якіх нейкае сцверджанне A не можа быць праўдзівым (н е а б х о д н ы я ў м о в ы) і, адпаведна, пры якіх A абавязкова праўдзіцца (д а с т а т к о в ы я ў м о в ы). Напрыклад, падзельнасць сумы лічбаў натуральнага ліку на 9 ёсць Н. і д.ў. падзельнасці самога ліку на 9. Часам замест «неабходна і дастаткова» ўжываюць выразы «калі і толькі калі» або «ў тым і толькі тым выпадку». Звычайна матэматычнае даследаванне пачынаецца з пошуку дастатковых умоў, якія ў працэсе паглыблення ў сутнасць пашыраюцца і набліжаюцца да неабходных умоў. Гл. таксама *Крытэр*.

НЕАЗНАЧА́ЛЬНАЕ ПАНЯ́ЦЦЕ, п е р ш а с н а е п а н я ц ц е — зыходнае матэматычнае паняцце, якому пры будаванні пэўнай тэорыі не даецца строгае азначэнне. У гэтак званай з м я с т о ў н а й а к с і я м а т ы ц ы (дзе аксіёмы лічацца праўдзівымі з-за сваёй наглядпасці) Н.п. уводзяцца апісальна, адпаведна іх сэнсу ў рэальнасці. Да прыкладу, *пункт*, *простая лінія*, *плоскасць*, *мноства*. У фармальнай аксіяматыцы неазначальным паняццям не надаецца ніякага змястоўнага сэнсу.

НЕАРЫЕНТАВА́ЛЬНЫ МНАГАГРА́ННІК — *мнагаграннік*, які нельга арыентаваць, г.зн. арыентаваць грані так, каб кожны кант, па якім дзве грані сумежныя, меў адваротныя кірункі.

НЕАРЫЕНТАВА́НЫ ГРАФ — *граф*, які змяшчае толькі канты.

НЕАСАБЛІ́ВАЯ МА́ТРЫЦА — тое, што *незвыродная матрыца*.

НЕВЫПРАСТА́ЛЬНАЯ КРЫВА́Я — крывая, якая не мае канцай *даўжыні*. Пры гэтым даўжынёй крывой лініі называюць ліміт паслядоўнасці даўжыняў ламаных, умежаных у гэтую лінію, калі даўжыня найбольшага адрэзка імкнецца да нуля. Гл. таксама *Выпрастальная крывая*.

НЕДЫФЕРЭНЦАВА́ЛЬНАЯ ФУ́НКЦЫЯ — функцыя, якая не мае *дыферэнцыяла*. У выпадку функцыі адной зменнай Н.ф. — гэта функцыя, якая не мае канцай вытворнай. Функцыя $y=|x|$ — Н.ф. у пункце $x=0$, прычым для яе існуюць у гэтым пункце левая і правая вытворныя, якія не роўныя паміж сабой. Непарыўная функцыя $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ пры $x\neq 0$ і $f(0)=0$ — Н.ф. у пункце $x=0$, прычым яна не мае ў гэтым пункце вытворнай ні злева, ні справа.

Прыклады непарыўных на ўсёй лікавай восі функцый, недыферэнцавальных ва ўсіх пунктах, пабудавалі Б.Бальцана (1830) і К.Ваерштрас (1860). Н.ф. Ваерштраса задаецца шэрагам

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a^n\cos(b^n\pi x),$$

дзе $a\in(0,1)$, b — няцотны натуральны лік, $a\cdot b>1+\frac{3\pi}{2}$. Для функцый многіх зменных дыферэнцавальнасць у пункце не раўназначная існаванню ў гэтым пункце ўсіх частковых вытворных першага парадку. Напрыклад, функцыя

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2>0\\ 0, & x=y=0\end{cases}$$

— Н.ф. у пункце (0, 0), аднак яна мае частковыя вытворныя ва ўсіх пунктах плоскасці, прычым апошнія разрыўныя ў пункце (0, 0).

НЕЗАЛЕ́ЖНАСЦЬ — адно з галоўных паняццяў у *імавернасцяў тэорыі*. У розных выпадках карыстаюцца таксама тэрмінамі — статыстычная незалежнасць, стахастычная незалежнасць. Дап шчэнне Н. разгляданых падзей, выпрабаванняў выпадковых велічыняў было звычайным мерк ваннем у задачах, якія разглядаліся ў матэматы най тэорыі імавернасцяў з моманту яе ўзнікненн

НЕЗАЛЕ́ЖНАСЦЬ ВЫПАДКО́ВЫХ ВЕЛ ЧЫ́НЯЎ — адна з галоўных уласцівасцяў *выпа ковых велічыняў*. Няхай $\xi_k(\omega)$, $k=\overline{1,n}$, — выпа ковыя велічыні, вызначаныя на імавернасн прасторы (Ω,F,P), $A_k=\{\omega:\xi_k(\omega)\in B_k\}$, дзе B $k=\overline{1,n}$, — барэлевы мноствы. Выпадковыя вел чыні $\xi_k(\omega)$, $k=\overline{1,n}$, называюць незалежны ў сукупнасці, калі, як бы ні выбіралі мно твы B_k, $k=\overline{1,n}$, падзеі A_k, $k=\overline{1,n}$, ёсць незалежн ў сукупнасці (гл. *Незалежныя падзеі*). Выпадк выя велічыні $\xi_k(\omega)$, $k=\overline{1,n}$, называюць нез лежнымі парамі, калі $\forall B_i, B_k$, $1\le i<k\le$ падзеі A_k і A_i ёсць незалежныя. Выпадковыя вел чыні, незалежныя ў сукупнасці, з'яўляюцца нез лежнымі і парамі. Для незалежнасці $\xi_k(\omega)$, $k=\overline{1}$ у сукупнасці неабходна і дастаткова, каб

$$F_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(x_1,\ldots,x_n)=\prod_{k=1}^{n}F_{\xi_k}(x_k),\ \forall x_k,\ k=\overline{1,n}.$$

У выпадку абсалютна непарыўнай функцыі ра меркавання для гэтага неабходна і дастаткова в кананне наступнай роўнасці для шчыльнасцяў:

$$P_{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\prod_{k=1}^{n}P_{\xi_k}(x_k).$$

НЕЗАЛЕ́ЖНАСЦЬ СІСТЭ́МЫ АКСІЁМ — уласцівасць сістэмы аксіём дадзенай аксіяматы най тэорыі: кожная аксіёма — вынік з мноства а татніх аксіём гэтай тэорыі. Сістэма аксіём, як мае такую ўласцівасць, называецца незале най. Незалежнасць дадзенай аксіёмы пэўнай а сіяматычнай тэорыі азначае, што ёсць такая інтэ прэтацыя, пры якой гэтая аксіёма няпраўдзівая, ўсе астатнія яе аксіёмы праўдзівыя (гэтак зван семантычная незалежнасць). Будава не такой інтэрпрэтацыі з'яўляецца класічным м тадам доказу незалежнасці. Пры будаванні аксі матычнай тэорыі ў выглядзе фармальнай сістэм дзе вынік фармалізуецца як выводнасць, аксіё лічыцца незалежнай, калі яна не можа быць выв дзеная з іншых аксіём з дапамогай *вывядзен правілаў* дадзенай фармальнай тэорыі. Павод тэарэмы Гёдэля пра поўнасць, для шматлікіх фа мальных сістэм незалежнасць у фармальнай сі тэме супадае з семантычнай незалежнасцю.

НЕЗАЛЕЖНЫЯ ПАДЗЕІ — выпадковыя падзеі A і B, для якіх праўдзіцца роўнасць $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Калі $P(A) > 0$, гэта раўназначна таму, што $P(B \mid A) = P(B)$. Падзеі $A_1, A_2, ..., A_n$ называюць незалежнымі ў сукупнасці, калі для адвольных набораў індэксаў $\{i_1, i_2, ..., i_m\}$ такіх, што $1 \le i_1 < i_2 < ... < i_m \le n$, $2 \le m \le n$, мае месца роўнасць

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_m}) = \prod_{k=1}^{m} P(A_{i_k}).$$

Калі роўнасць праўдзіцца толькі ў выпадку $m = 2$, то падзеі называюцца незалежнымі парамі. З незалежнасці ў сукупнасці вынікае незалежнасць парамі, у адваротным выпадку — не заўсёды.

НЕЗВЫРОДНАЕ ЛІНЕЙНАЕ ПЕРАЎТВАРЭННЕ — лінейнае пераўтварэнне f вектарнай прасторы V, вобраз якой $f(V) = \{u \in V \mid u = f(v), v \in V\} = V$. Лінейнае пераўтварэнне ёсць Н.л.п., калі і толькі калі вызначнік яго матрыцы не роўны нулю. Для кожнага Н.л.п. існуе адваротнае лінейнае пераўтварэнне f^{-1} (г.зн. $f \cdot f^{-1}(u) = f^{-1} \cdot f(u) = u \; \forall u \in V$). Усе Н.л.п. вектарнай прасторы над полем утвараюць групу, якая называецца *поўнай лінейнай групай*.

НЕЗВЫРОДНАЯ МАТРЫЦА, неасаблівая матрыца — квадратная матрыца, вызначнік якой не роўны нулю. Для кожнай Н.м. над полем існуе адваротная матрыца. Усе ўласныя значэнні Н.м. не роўныя нулю. Н.м. і толькі яны з'яўляюцца матрыцамі незвыродных пераўтварэнняў. Матрыцы, якія не з'яўляюцца Н.м., называюцца звыроднымі або асаблівымі.

НЕЗЛІЧАЛЬНАЕ МНОСТВА — бясконцае мноства, паміж элементамі якога і мноствам натуральных лікаў не існуе ўзаемна адназначнай адпаведнасці. Мноствы ірацыянальных і рэчаісных лікаў — Н.м. Мноства рацыянальных лікаў — злічальнае.

НЕКАРЭКТНАЯ ЗАДАЧА, некарэктна сфармуляваная задача — задача, для якой не выконваецца хоць бы адна з умоў, характэрных для карэктна сфармуляванай задачы. Н.з. узнікаюць у класе адваротных задач, калі нейкая велічыня z не можаназірацца непасрэдна (бачна толькі яе праяўленне Az). Неабходна развязаць раўнанне $Az = u$. Прычым апаратар A^{-1}, калі ён нават існуе, можа мець дрэнныя аналітычныя ўласцівасці. Н.з. апраксімуюцца *карэктнымі задачамі*. Пры гэтым дастасоўваюцца дэтэрмінаваныя і імавернасныя метады.

НЕКАРЭЛЯВАНЫЯ ВЕЛІЧЫНІ — выпадковыя велічыні ξ і η, для якіх *карэляцыі каэфіцыент* роўны нулю. Калі кожная пара з велічыняў $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ некарэляваная, то $D\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right) = \sum_{k=1}^{n} D\xi_k$.

НЕКЛАСІЧНЫЯ ЛОГІКІ — логікі, якія адрозніваюцца ад класічнай. Да іх далучаюць наступныя логікі: інтуіцыйную, мнагазначную, мадэльную, імавернасную, індукцыйную, злічальназначную, кантынуумзначную і інш. Н.л. апісваюцца логікавыя законы, якія перадаюцца іншымі логікавымі сродкамі або з іншых метадалагічных асноў. Напрыклад, у імавернаснай логіцы выказванням, акрамя праўды і няпраўды, прыпісваюцца прамежкавыя значэнні, названыя імавернасцямі праўдзівасці выказванняў, ступенямі іх праўдападобнасці.

НЕЛІНЕЙНАЕ ПРАГРАМАВАННЕ — раздзел *матэматычнага праграмавання*, прысвечаны тэорыі і метадам знаходжання экстрэмумаў (максімумаў або мінімумаў) нелінейных функцый некалькіх зменных пры наяўнасці дадатковых абмежаванняў на гэтыя зменныя, якія маюць форму роўнасцяў і (або) няроўнасцяў. Агульная фармулёўка задачы Н.п. палягае ў наступным: знайсці мінімум мэтавай функцыі $f(x)$ пры ўмовах $g_i(x) \le 0$, $i = 1, ..., m$; $h_j(x) = 0$, $s = 1, ..., k$, дзе $x = (x_1, ..., x_n)$. Пункт x, які задавальняе ўсе $m + k$ абмежаванні задачы, называецца дапушчальным (або дапушчальным развязкам задачы Н.п.). Дапушчальны пункт, у якім функцыя f прымае найменшае значэнне ў параўнанні з іншымі дапушчальнымі пунктамі (блізкімі да дадзенага), называецца аптымальным (або лакальна аптымальным) развязкам. У залежнасці ад уласцівасцяў функцый f, g_i, h_j у Н.п. вылучаецца шэраг раздзелаў: *выпуклае праграмаванне* (f, g_i — выпуклыя функцыі, h_j — афінныя функцыі), *квадратовае праграмаванне* (f — квадратовая форма або сума лінейнай і квадратовай формаў, а g_i, h_i — афінныя функцыі), геаметрычнае праграмаванне (f і g_i — функцыі спецыяльнага віду, h_j — афінныя функцыі). Аснова ўсіх лікавых метадаў Н.п. — умовы аптымальнасці.

Неабходныя ўмовы аптымальнасці першага парадку палягаюць у наступным. Калі x^* — лакальна аптымальны пункт, то пры выкананні пэўных дадатковых патрабаванняў існуюць такія лікі (множнікі Лягранжа) $\lambda_1^* \ge 0, ..., \lambda_m^* \ge 0$ і

$\mu_1^*, ..., \mu_k^*$, што ўсе частковыя вытворныя функцыі Лягранжа

$$L(x,\lambda^*,\mu^*) = f(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^* g_i(x)+\sum_{j=1}^{k}\mu_j^* h_j(x)$$

задач Н.п. становяцца роўнымі нулю пры $x = x^*$, г.зн.

$$\frac{\partial L(x^*,\lambda^*,\mu^*)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, ..., n,$$

прычым $\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, i = 1, ..., m$. Неабходныя (дастатковыя) умовы аптымальнасці другога парадку абагульняюць аналагічныя ўмовы лакальнага мінімуму функцыі адной зменнай і фармулююцца з дапамогай першых і другіх частковых вытворных функцый f, g_i, h_j. Адзін з метадаў Н.п. — метад штрафных функцый. Ён зводзіць задачу Н.п. з абмежаваннямі да задачы Н.п. без абмежаванняў шляхам фармавання штрафной функцыі, якая ўтвараецца з мэтавай функцыі задачы далучэннем «штрафаў» за парушэнне яе абмежаванняў.

Метады Н.п. дазваляюць, як правіла, атрымаць пункт, які адпавядае з азначанай хібнасцю тым або іншым умовам аптымальнасці. Такім чынам, яны прыводзяць, наогул кажучы, да лакальнага оптымуму (выняткак складаюць задачы Н.п., у якіх кожны лакальны оптымум з'яўляецца аптымальным пунктам, напрыклад задачы выпуклага праграмавання). Метады Н.п., якія гарантавана прыводзяць да аптымальнага пункта ў кожнай задачы Н.п., зводзяцца да прагляду вельмі вялікай колькасці пунктаў, а таму прыдатныя толькі для задач Н.п. з малой колькасцю зменных. Практычныя задачы Н.п. змяшчаюць значную колькасць зменных і абмежаванняў. Таму нават найбольш эфектыўныя метады Н.п. патрабуюць выкарыстання камп'ютараў. Гл. таксама *Аперацый даследаванне*.

НЕЛІНЕЙНАЕ РАЎНАННЕ — алгебраічнае, або трансцэндэнтнае, раўнанне $\varphi(x) = 0$, дзе $\varphi(x)$ — нелінейная функцыя рэчаіснай зменнай. Сістэмай Н.р. называюць сістэму $\varphi_i(x_1, ..., x_n) = 0, i = 1, ..., n$, якая не з'яўляецца сістэмай лінейных алгебраічных раўнанняў. Дакладныя развязкі Н.р. і сістэм Н.р. атрымліваюцца толькі ў прыватных выпадках, і таму галоўныя метады развязання Н.р. набліжаныя. Адзін з галоўных метадаў развязання Н.р. — *ітэрацыі метад*: раўнанне або сістэма раўнанняў замяняюцца эквівалентнымі раўнаннямі $p(x) = x$, $x = (x_1, ..., x_n)$. Дастасоўваюцца таксама *Ньютана метад*, *лінеявання метад*.

НЕЛІНЕЙНЫ АПЕРАТАР — адлюстра не A вектарнай прасторы X у вектарную прас Y, якое не з'яўляецца лінейным (не абавяз $A(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2) = \alpha_1Ax_1+\alpha_2Ax_2$). Калі Y — мноств чаісных або камплексных лікаў, то Н.а. на юць нелінейным функцыяналам

НЕМАГЧЫМАЯ ПАДЗЕЯ — падзея, я дадзеных умовах не можа з'явіцца ні пры які ставінах. Калі (Ω, F, P) — імавернасная праст Н.п. — гэта падзея $\varnothing \in F$, якая не адбываецц адным элементарным зыходам $\omega \in \Omega$, таму $P(\varnothing$

НЕНАРАСТАЛЬНАЯ ПАСЛЯДОЎНАС паслядоўнасць $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, для якой выконваецц роўнасць $x_n \geq x_{n+1}$, $\forall n \in N$. Усякая абмежа знізу Н.п. мае канцы ліміт (збягаецца), а ў неабмежаваная знізу Н.п. разбягаецца.

НЕНАРАСТАЛЬНАЯ ФУНКЦЫЯ — ф цыя, значэнні якой не павялічваюцца пры п чэнні значэнняў яе аргумента; функцыя f: (дзе $E \subset \mathbf{R}$) такая, што для адвольных x_1, x_2 з тва E, падпарадкаваных умове $x_1 < x_2$, выкон ца няроўнасць $f(x_1) \geq f(x_2)$. Калі x_0 — праваба (левабаковы) лімітавы пункт мноства E, f Н.ф. і мноства $\{y: y = f(x), x > x_0, x \in E\}$ ($\{y: y =$ $x < x_0, x \in E\}$) абмежаванае зверху (зніз функцыя $f(x)$ мае пры $x \to x_0 + 0$ ($x \to$ канцы ліміт. Калі паказаныя мноствы не аб ваныя зверху (знізу), то $f(x)$ мае бясконцы роўны $+\infty$ ($-\infty$).

НЕПАРАМЕТРЫЧНАЯ СТАТЫСТЫЧ ГІПОТЭЗА — статыстычная гіпотэза, дл веркі якой выкарыстоўваюцца метады ма тычнай статыстыкі, якія не ўжываюць вед функцыйны выгляд генеральных размеркава Тыповы прыклад Н.с.г. — праверка ўзгодне Задача праверкі ўзгодненасці палягае ў тым па выбарцы, якая мае генеральную функцы меркавання G, патрабуецца праверыць гі пра тое, што $G = F$, дзе F — зададзеная не ная функцыя размеркавання. Непараметр характар задачы выяўляецца ў непараметры ці альтэрнатывы, якая можа быць сфармуля напрыклад, у аднабаковым варыянце: F $F > G$ або ў двухбаковым: $F \neq G$. Іншыя в прыклады Н.с.г. — гэта праверка сіметрыі лежнасці або выпадковасці.

НЕПАРАМЕТРЫЧНЫЯ МЕТАДЫ — ды матэматычнай статыстыкі. Іх сутнасць пасрэдная ацэнка і праверка гіпотэз пра тэа нае размеркаванне імавернасцяў. Асабл

Н.м. у тым, што мы загадзя нічога не ведаем пра ўласцівасці шуканага размеркавання. Прыклад Н.м. — крытэр згоды тэарэтычнай і эмпірычнай функцый размеркавання (к р ы т э р К а л м а г о р а в а).

Няхай вынікі n незалежных назіранняў маюць функцыю размеркавання, $F(x)$ і $F_n(x)$ — эмпірычная функцыя размеркавання, пабудаваная па n незалежных назіраннях. Няхай P_n — найбольшае па абсалютнай велічыні значэнне рознасці $F_n(x) - F(x)$. Выпадковая велічыня $\sqrt{n}D_n$ мае ў выпадку непарыўнасці $F(x)$ функцыю размеркавання $k_n(\lambda)$, якая не залежыць ад $F(x)$ і імкнецца з ростам n да ліміту $k(\lambda) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty}(-1)^j e^{-2j^2\lambda^2}$. Адсюль пры дастаткова вялікіх n для імавернасці $p_{n,\lambda}$ няроўнасці $\sqrt{n}p_n \geq \lambda$ атрымліваецца набліжаны выраз $p_{n,\lambda} \approx 1 - k(\lambda)$. Значэнні функцыі $F(\lambda)$ зведзеныя ў табліцу і зараз стандартным чынам можна прымаць або не прымаць гіпотэзу, якая правяраецца.

НЕПАРЫ́ЎНАЕ АДЛЮСТРАВА́ННЕ — адлюстраванне f: $X \to Y$ тапалагічнай прасторы X у тапалагічную прастору Y такое, што для адвольнага пункта $x_0 \in X$ і для адвольнага наваколля $V = V(f(x_0))$ яе вобраза $f(x_0)$ існуе такое наваколле $U = U(x_0)$ пункта x_0, што $f(U) \subset V$ (абагульненае азначэнне непарыўнасці функцыі рэчаіснай зменнай на мове наваколляў).

НЕПАРЫ́ЎНАЕ РАЗМЕРКАВА́ННЕ — размеркаванне выпадковай велічыні ξ такое, што яе функцыя размеркавання F_ξ ёсць непарыўная функцыя. Пры гэтым адвольнае фіксаванае значэнне ξ можа прымаць толькі з імавернасцю 0. Паводле тэарэмы Жардана, адвольнае размеркаванне імавернасцяў ёсць сумесь *дыскрэтнага размеркавання* і Н.р. Важнае месца сярод непарыўных размеркаванняў займаюць а б с а л ю т н а Н.р. У гэтым выпадку $F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_\xi(t)dt$, дзе амаль скрозь (паводле меры Лебэга) $F'_\xi(x) = P_\xi(x)$, $P_\xi(x)$ — шчыльнасць размеркавання імавернасцяў выпадковай велічыні ξ.

НЕПАРЫ́ЎНАСЦІ АКСІЁМА — аксіёма, на якой грунтуецца непарыўнасць мноства рэчаісных лікаў. Можа мець розныя фармулёўкі. Напрыклад: усякае сечыва рэчаісных лікаў вызначаецца нейкім лікам (*дэдэкіндава аксіёма*); адвольная сям'я ўкладзеных адрэзкаў мае непустое перасячэнне (*Кантара аксіёма*).

НЕПАРЫ́ЎНАСЦІ МО́ДУЛЬ ф у н к ц ы і — велічыня $w(\delta)$, звязаная з дадзенай функцыяй $f(x)$ адной або некалькіх зменных $x \in G \subset \mathbf{R}^n$ наступным чынам: $w(\delta) = \sup_{|x_1 - x_2| < \delta} |f(x_1) - f(x_2)|$, дзе дакладная верхняя мяжа бярэцца па ўсіх x_1 і x_2 з дадзенага мноства G.

НЕПАРЫ́ЎНАСЦЬ — адно з найважнейшых матэматычных паняццяў. Сустракаецца ў дзвюх асноўных канцэпцыях — Н. м н о с т в а і Н. а д л ю с т р а в а н н я. Гістарычна раней матэматычна апрацаванае паняцце *непарыўнага адлюстравання*, або *непарыўнай функцыі*, чым лагічна папярэдняе яму паняцце Н. мноства. Азначэнне Н. адлюстравання залежыць ад таго, як у мноствах X і Y азначаныя лімітавыя дачыненні. Мноства элементаў з вызначанымі лімітавымі дачыненнямі паміж імі называюць *тапалагічнай прасторай.* У тэрмінах тэорыі тапалагічных прастораў звычайна і апісваюцца паняцці, якія характарызуюць уласцівасці Н. розных мностваў матэматычных аб'ектаў.

НЕПАРЫ́ЎНАЯ ВЫПАДКО́ВАЯ ВЕЛІЧЫНЯ́ — выпадковая велічыня ξ, для якой існуе неадмоўная функцыя $P_\xi(x)$, што задавальняе пры кожным x роўнасць $F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} P_\xi(t)dt$, дзе $F_\xi(x)$ — *размеркавання функцыя* выпадковай велічыні ξ. Функцыю $P_\xi(x)$ называюць ш ч ы л ь н а с ц ю р а з м е р к а в а н н я імавернасцяў выпадковай велічыні ξ.

НЕПАРЫ́ЎНАЯ ГРУ́ПА — тое, што *тапалагічная група.*

НЕПАРЫ́ЎНАЯ КРЫВА́Я — мноства пунктаў $M(x, y)$ плоскасці, каардынаты якіх задавальняюць роўнасць $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, дзе φ і ψ — непарыўныя функцыі аргумента t на нейкім адрэзку $[a, b]$. Інакш, Н.к. ёсць непарыўны вобраз $[a, b]$. Аналагічна азначаецца Н.к. у прасторы.

НЕПАРЫ́ЎНАЯ ФУ́НКЦЫЯ — функцыя, якая атрымлівае бясконца малы прырост пры бясконца малым прыросце аргумента. Дакладней, функцыя $f(x)$ называецца непарыўнай у пункце x_0, калі яна вызначаная ў гэтым пункце і калі для адвольнага $\varepsilon > 0$ існуе такое $\delta > 0$, што пры $|x - x_0| < \delta$ выконваецца няроўнасць $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Гэтае азначэнне раўназначнае наступнаму: функцыя $f(x)$ непарыўная ў пункце x_0, калі пры $x \to x_0$ значэнне

функцыі $f(x)$ імкнецца да ліміту $f(x_0)$. Функцыя $f(x)$ называецца **н е п а р ы ў н а й н а м н о с т в е** D, калі яна непарыўная ў кожным пункце $x \in D$. Аналагічна вызначаецца непарыўная функцыя некалькіх зменных.

НЕПАРЫ́ЎНЫ АПЕРА́ТАР — тое, што *непарыўнае адлюстраванне.* Тэрмін ужываецца ў тапалагічных вектарных прасторах.

НЕПАРЫ́ЎНЫ ДРОБ, л а н ц у г о в ы д р о б — адзін з важнейшых спосабаў выяўлення лікаў і функцый. Н.д. ёсць выраз выгляду

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n + \ddots}}},$$

дзе a_0 — адвольны цэлы лік, $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — натуральныя лікі, якія называюць **н я п о ў н ы м і д з е л я м і** або элементамі дадзенага Н.д.

Да Н.д., які ёсць пэўны лік a, можна прыйсці, калі запісаць гэты лік у выглядзе $a = a_0 + 1/\alpha_1$, дзе a_0 — цэлы лік і $0 < 1/\alpha_1 < 1$, а потым запісаць у тым жа выглядзе α_1 і г.д. Колькасць элементаў Н.д. можа быць концай ці бясконцай, у залежнасці ад чаго Н.д. называюць **к о н ц ы м** або **б я с к о н ц ы м** і абазначаюць адпаведна $[a_0; a_1, a_2, \ldots, \ldots, a_n]$ ці $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$.

НЕПРЫВО́ДНАЕ РАЎНА́ННЕ — алгебраічнае раўнанне, якое нельга прывесці да выгляду $f(x)\, g(x) = 0$, дзе $f(x)$, $g(x)$ — мнагасклады ступені большай за нуль.

НЕПРЫВО́ДНЫ МНАГАСКЛА́Д н а д к о л ц а м K — мнагасклад $f(x_1, \ldots, x_n) = f$ ад n зменных над колцам K, які нельга прывесці да выгляду $f = gh$, дзе f і g — мнагасклады над K ступені большай за нуль (мнагасклад выгляду $f = gh$ называецца **п р ы в о д н ы м**). Н.м. над колцам K можа быць прыводным над пашырэннем гэтага колца. Так, мнагасклад $x^2 - 2$ непрыводны над полем рацыянальных лікаў, але прыводны над полем рэчаісных лікаў: $x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$. Кожны Н.м. ад адной зменнай над полем P ёсць здабытак лінейных множнікаў над адпаведным пашырэннем L поля P (г.зн. прыводны над L). Для кожнага поля P існуюць абсалютна Н.м. ад дзвюх і больш зменных усякай ступені (г.зн. мнагасклады, якія застаюцца непрыводнымі пры адвольным пашырэнні поля P).

НЕПРЫВО́ДНЫ МО́ДУЛЬ, п р о с т ы м о д у л ь — модуль M над колцам R з адзінкай, які не мае нетрывіяльных падмодуляў. Прыклады: 1) калі $R = \mathbf{Z}$ — колца цэлых лікаў, то Н.м. над R — гэта абэлевы групы простых парадкаў; 2) калі R — цела, тады Н.м. над R — гэта аднамерныя вектарныя прасторы над R. Правы R-модуль M непрыводны, калі і толькі калі ён ізаморфны R/ρ, дзе ρ — нейкі максімальны правы ідэал у R. Калі M — непрыводны R-модуль, то колца эндамарфізмаў M — цела (**л е м а Ш у р а**), у прыватнасці калі M — алгебра над алгебраічна замкнёным полем R, то $\mathrm{End}_K(M) \cong K$.

НЕПРЭДЫКА́ТНАЕ АЗНАЧЭ́ННЕ — азначэнне пэўнага аб'екта праз дачыненні паміж гэтым аб'ектам і ўсімі аб'ектамі пэўнага мноства, якому належыць аб'ект, што азначаецца. Класічны прыклад Н.а.: "A — жыхар вёскі, які голіць усіх тых і толькі тых жыхароў гэтай вёскі, якія самі не голяцца". Тут аб'ект азначаецца з дапамогай мноства жыхароў вёскі, якому ён сам належыць. На гэтым азначэнні заснаваная вядомая антыномія "вясковы цырульнік".

Пры разглядзе фармалізаваных моваў паняцце Н.а. удакладняецца наступным чынам. Азначэнне называецца **н е п р э д ы к а т н ы м,** калі яно задае аб'ект (які азначаецца) з дапамогай формулы, што мае зменную, магчымае значэнне якой — гэты аб'ект. Так, азначэнне $S = \{x \mid x \notin x\}$ ёсць непрэдыкатнае, бо яно змяшчае зменную x, магчымае значэнне якой — адвольныя мноствы (у тым ліку мноства S, якое азначаецца). Гэтае мноства ляжыць у аснове парадокса Расэла.

Тэрмін Н.а. увёў Ж.Пуанкарэ, які ўпершыню выказаўся супраць скарыстання Н.а. у матэматыцы, бо паводле сваёй формы Н.а. маюць характар "заганнага кола". Б.Расэл лічыў Н.а. крыніцай усіх *парадоксаў* у тэорыі мностваў.

НЕРАЗВЯЗА́ЛЬНАСЦЬ — немагчымасць развязання дадзенай задачы дакладна акрэсленымі сродкамі. Адрозніваюць неразвязальнасць задачы будавання пэўных геаметрычных аб'ектаў з дапамогай цыркуля і лінейкі; алгарытмічную неразвязальнасць, калі доказанае неіснаванне алгарытму, з дапамогай якога было б магчыма атрымаць адказ на пытанне (напрыклад, 10-я праблема Гільбэрта); фармальную неразвязальнасць, пры якой у пэўнай фармальнай сістэме сцвярджаецца існаванне выказвання, якое нельга ні даказаць, ні абвергнуць у гэтай сістэме (гл. *Гёдэля тэарэмы*

пра няпоўнасць), і інш. Калі пашырыць фармальную сістэму за кошт новых аксіём, то дадзеную задачу можна развязаць у пашыранай сістэме. Існаванне неразвязальных выказванняў мае істотнае значэнне для развіцця тэорыі, выклікае неабходнасць яе развіцця, пошуку новых фундаментальных паняццяў, якія б маглі быць пакладзены ў аснову тэорыі.

НЕРУХО́МЫ ПУНКТ адлюстравання — пункт $x \in X$ такі, што $f(x) = x$, дзе f — адлюстраванне мноства X у сябе. Доказы існавання Н.п. і метады іх знаходжання маюць істотнае значэнне для матэматыкі, бо да іх зводзяцца развязкі многіх задач. Адзін з пашыраных метадаў, які скарыстоўвае ідэю Н.п., — *сціскальных адлюстраванняў прынцып.*

НЕСПАДА́ЛЬНАЯ ПАСЛЯДО́ЎНАСЦЬ — паслядоўнасць $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ такая, што для ўсіх $n = 1, 2, \ldots$ выконваецца няроўнасць $x_n \leq x_{n+1}$.

НЕСПАДА́ЛЬНАЯ ФУ́НКЦЫЯ — функцыя, значэнні якой не памяншаюцца пры павелічэнні значэнняў яе аргумента. Функцыю $f(x)$ называюць неспадальнай на мностве E, калі $f(x_1) \leq$ $\leq f(x_2)$ пры адвольных $x_1, x_2 \in E$ такіх, што $x_1 < x_2$.

НЕСТАНДА́РТНАЯ МАДЭ́ЛЬ — мадэль матэматычнай тэорыі, не ізаморфная яе стандартнай мадэлі (той, што бралася пад увагу пры будаванні тэорыі). Упершыню Н.м. арыфметыкі ў яўным выглядзе пабудаваная Т.Сколемам (1934). Пазней былі пабудаваныя Н.м. матэматычнага аналізу, у якім разам са звычайнымі, стандартнымі рэчаіснымі лікамі прысутнічаюць новыя, у тым ліку бясконца малыя і бясконца вялікія.

Першыя з іх большыя за нуль, але меншыя за кожны дадатны рэчаісны лік. Элементы такой сістэмы можна параўноўваць па велічыні, з імі можна выконваць арыфметычныя дзеянні. Так, вынікам дзялення стандартнага ліку на бясконца малую з'яўляецца бясконца вялікі лік. Для кожнага стандартнага ліку існуе наваколле бясконца блізкіх да яго нестандартных лікаў. Разгляд Н.м. прывёў да стварэння асобнага матэматычнага раздзела — нестандартнага аналізу. Нават ужо зараз (2001) многія складаныя вынікі ў матэматыцы значна спрашчаюцца дзякуючы Н.м.

НЕСУВЫМЕ́РНЫЯ ВЕЛІЧЫ́НІ — гл. *Сувымерныя і несувымерныя велічыні.*

НЕСУМЯШЧА́ЛЬНАСЦЬ — уласцівасць пэўнага класа формул у мове дадзенай фармальнай сістэмы S, якая палягае ў тым, што ў выніку далучэння гэтага класа да мноства аксіём сістэмы S атрымліваецца супярэчлівая сістэма, г.зн. сістэма, якая не мае ўласцівасці *несупярэчлівасці.* У прыватнасці, калі клас, які складаецца з адной формулы, несумяшчальны з фармальнай сістэмай, то ён змяшчае концы падклас, таксама несумяшчальны з гэтай сістэмай. Для шырокага класа фармальных сістэм Н. формулы φ мае месца, калі і толькі калі ў сістэме можна вывесці адмаўленне $\neg\varphi$ гэтай формулы.

НЕСУПО́ЛЬНАЯ СІСТЭ́МА — сістэма, якая не мае развязкаў.

НЕСУПО́ЛЬНЫЯ ПАДЗЕ́І — выпадковыя падзеі, адначасовае ажыццяўленне якіх немагчымае; выпадковыя падзеі A і B такія, што $A \cap B = \varnothing$.

НЕСУПЯРЭ́ЧЛІВАСЦЬ — уласцівасць аксіяматычнай тэорыі (АТ), якая палягае ў тым, што ў гэтай тэорыі нельга атрымаць супярэчлівасць, г.зн. даказаць праўдзівасць нейкага сцверджання разам з праўдзівасцю яго адмаўлення або даказаць праўдзівасць сцверджання, якое непраўдзівае. АТ, што маюць такую ўласцівасць, называюцца несупярэчлівымі. Для АТ класічнай матэматыкі Н. мае месца, калі і толькі калі існуе сцверджанне, якое фармулюецца ў дадзенай тэорыі і недаказальнае ў ёй.

Паняцце і метады доказу Н. АТ удакладняліся разам з развіццём *аксіяматычнага метаду.* На першым этапе развіцця АТ, калі першапачатковыя, неазначальныя паняцці мелі пэўны змястоўны сэнс, пытанне аб Н. практычна не ўздымалася. Лічылася, што аксіёмы праўдзівыя паводле сваёй нагляднасці, відавочнасці (правераныя на "вопыце"), а таму праўдзівыя і ўсе сцверджанні гэтай АТ. На тым і была заснаваная інтуіцыйная ўпэўненасць у Н. АТ, напрыклад, геаметрыі Эўкліда. Такі погляд на АТ часам называюць змястоўным або матэрыяльнай аксіяматыкай. Але будаванне неэўклідавай геаметрыі разбурыла гэтае інтуіцыйнае меркаванне. Узнік новы этап будавання АТ, які называецца фармальным аксіяматычным метадам. У працэсе будавання фармальных АТ, у якіх першапачатковым, неазначальным паняццям не надаецца ніякага змястоўнага сэнсу, упершыню паўстала пытанне Н. АТ. Так, геаметрыя Лабачэўскага адрозніваецца ад геаметрыі Эўкліда аксіёмай пра паралельныя простыя, што супярэчыць інтуіцыйным уяўленням, з-за якіх праўдзі-

вай лічыцца аксіёма Эўкліда. Таму Н. геаметрыі Лабачэўскага нельга ўбачыць непасрэдна з "вопыту", яна патрабуе свайго абгрунтавання. Першыя вынікі наконт Н. АТ былі атрыманыя з дапамогай гэтак званага метаду інтэрпрэтацый, калі першапачатковым, неазначальным паняццям разгляданай тэорыі супастаўляюць пэўныя матэматычныя аб'екты, прычым аксіёмы робяцца праўдзівымі сцверджаннямі пра гэтыя аб'екты. Такі метад мае параўнальны характар, ён зводзіць пытанне пра Н. адной тэорыі да пытання Н. іншай тэорыі. Такім чынам, напрыклад, Н. геаметрыі Лабачэўскага была зведзеная да Н. геаметрыі Эўкліда, а пытанне пра Н. апошняй зведзенае да пытання пра Н. арыфметыкі.

Другі метад доказу Н. прапанаваў Д.Гільбэрт у межах яго праграмы абгрунтавання матэматыкі, якая прадугледжвала два этапы. На першым этапе трэба знайсці пэўную АТ як фармальную сістэму. Сцверджанне пра Н. фармальнай сістэмы азначае, што сярод доказаў гэтай фармальнай сістэмы няма двух такіх, адзін з якіх з'яўляецца доказам пэўнай формулы φ, а другі — доказам яе адмаўлення $\overline{\varphi}$. На другім этапе, аналізуючы доказы ў адпаведных фармальных сістэмах, трэба даказаць Н. асноўных раздзелаў матэматыкі. Тэорыя, аб'екты якой — адвольныя матэматычныя доказы, называецца *метаматэматыкай*, або тэорыяй доказаў. Праграма Гільбэрта, акрамя таго, прадугледжвала скарыстанне ў метаматэматыцы тых метадаў і паняццяў, надзейнасць якіх не выклікае сумневу. Але, на жаль, гэтая праграма Гільбэрта невыканальная. Другая тэарэма Гёдэля пра няпоўнасць сцвярджае, што Н. АТ, якая ўлучае арыфметыку, не можа быць даказаная з дапамогай сродкаў самой разгляданай тэорыі. Такім чынам, Н. такой тэорыі можа быць давердзеная з дапамогай сродкаў некаторай больш моцнай тэорыі. На такім шляху і былі атрыманыя доказы Н. фармальнай арыфметыкі (Г.Генцэн, 1936; П.Новікаў, 1943).

НЕЎЛАСЦІВЫ ІНТЭГРАЛ — інтэграл ад функцыі па неабмежаваным прамежку або ад неабмежаванай функцыі. Няхай функцыя вызначаная на $[a, b)$, $-\infty < a < b \le +\infty$ і інтэгравальная (паводле Рымана або Лебэга) на ўсякім канцавым адрэзку $[a, A] \subset [a, b)$. У выпадку $b = +\infty$ з дапамогаю фармальнага лімітавага пераходу азначаецца Н.і. І роду як

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx; \qquad (1)$$

пры канцым b і неабмежаванасці функцыі ў гэтым пункце азначаецца Н.і. ІІ роду:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+\infty}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx; \qquad (2)$$

Пункт b называецца асаблівым пунктам функцыі.

Калі ліміты (1) і (2) існуюць (канцыя), то адпаведны Н.і. называюць збежным, у процілеглым выпадку — разбежным. Напрыклад, Н.і. І роду

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}, \quad p>0, \qquad (3)$$

збягаецца пры $p > 1$ і разбягаецца пры $p \le 1$. Н.і. ІІ роду

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p} \qquad (4)$$

збягаецца пры $p < 1$ і разбягаецца пры $p \ge 1$. Аналагічна азначаюцца (пры адпаведных дапушчэннях) Н.і. І роду па прамежках $-\infty \le a < b < +\infty$ і $-\infty \le a < b \le +\infty$ і Н.і. ІІ роду, калі a — асаблівы пункт. Калі асаблівы пункт c ёсць нутраны пункт $[a, b]$, то Н.і. ІІ роду азначаецца наступным чынам:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1\to+0}\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2\to+0}\int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx.$$

Для Н.і. маюць месца агульныя ўласцівасці інтэгралаў: лінейнасць, адытыўнасць, манатоннасць, тэарэма пра сярэдняе. Справядлівыя формулы інтэгравання часткамі, замены зменнай і формула Ньютана—Ляйбніца, у якіх узнікае дадаткова аперацыя лімітавага пераходу. Для высвятлення збежнасці Н.і. ад знакасталых функцый выкарыстоўваюць *параўнання прыкмету*. Н.і. называецца абсалютна збежным, калі збягаецца інтэграл ад модуля падынтэгральнай функцыі. Усякі абсалютна збежны інтэграл збягаецца. Існуюць Н.і., якія збягаюцца, але неабсалютна, напрыклад

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx \ \text{ і } \ \int_0^1 \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}dx.$$

Вядомыя розныя прыкметы збежнасці Н.і. ад функцый адвольнага знака. Збежнасць Н.і. можна выразіць у тэрмінах збежных шэрагаў.

Да Н.і. належаць таксама інтэгралы ў сэнсе галоўнага значэння. Няхай функцыя f вызначаная на інтэрвале $(a, b) \subset \mathbf{R}$, акрамя, можа, пункта $c \in (a, b)$ і няхай $\forall\varepsilon > 0$ функцыя f інтэгравальная (павод

ле Рымана або Лебэга) на мностве $(a, b) \setminus U(c,\varepsilon)$, дзе $U(c,\varepsilon)$ — ε-акруга пункта c. Калі існуе ліміт

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx+\int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx\right)=V.p.\int_a^b f(x)dx,$$

то яго называюць **інтэгралам у сэнсе галоўнага значэння** (абазначэнне *V.p.* ад французскага Valeur principal — галоўнае значэнне). З існавання Н.і. II роду вынікае існаванне адпаведнага інтэграла ў сэнсе галоўнага значэння. Адваротнае, увогуле, няпраўдзіцца, напрыклад, $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}$ разбягаецца, а $V.p.\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}=0$ збягаецца. Аналагічна азначаюць Н.і. у сэнсе галоўнага значэння і для бясконца аддаленага пункта. Тэорыя Н.і. абагульняецца для функцый многіх зменных.

НЕЎЛАСЦІ́ВЫ ІНТЭРВА́Л — адвольны інтэрвал выгляду $(-\infty,+\infty)$ або $(-\infty, a)$, $(b,+\infty)$, дзе a, b — концыя рэчаісныя лікі. Першы з іх ёсць уся лікавая вось, а два апошнія называюцца яшчэ **адкрытымі промнямі**.

НЕЎЛАСЦІ́ВЫЯ ЭЛЕМЕ́НТЫ — тое, што *бясконца аддаленыя элементы*.

НЕФІКСАВА́НАЯ КО́СКА — адзін са сродкаў выяўлення лікаў у камптары. Лік b з Н.к. у агульным выпадку мае выгляд $b=\pm m\cdot R^p$, дзе m — мантыса, R — аснова сістэмы лічэння, p — парадак. Такое выяўленне рэчаісных лікаў — аднолькава эфектыўны сродак запісу як вельмі малых, так і вельмі вялікіх лікаў. Для захоўвання парадку і мантысы ліку з Н.к. звычайна адводзіцца фіксаваная колькасць разрадаў, што накладвае абмежаванні на велічыню парадку. Вынікі арыфметычных аперацый у машыне з Н.к. аўтаматычна перапрацоўваюцца ў звычайны стан сумавальнай прыладай машыны.

НЕЭЎКЛІ́ДАВА ГЕАМЕ́ТРЫЯ — геаметрыя, якая адрозніваецца ад *эўклідавай геаметрыі*. З пункту гледжання аксіяматычнага будавання геаметрыі сістэма аксіём Н.г. змяшчае тую або іншую аксіёму, якая не можа быць выведзеная з аксіём эўклідавай геаметрыі, напрыклад *Лабачэўскага геаметрыя*, *Рымана геаметрыя*.

Сістэма аксіём геаметрыі Лабачэўскага можа быць атрыманая з сістэмы аксіём Гільбэрта эўклідавай геаметрыі заменай толькі адной аксіёмы — аксіёмы паралельнасці. У геаметрыі Лабачэўскага аксіёма паралельнасці фармулюецца: у плоскасці праз дадзены пункт, які не ляжыць на дадзенай простай, праходзіць не менш як дзве простыя, якія не перасякаюць дадзеную. Геаметрыя Рымана адрозніваецца ад геаметрыі Эўкліда і Лабачэўскага тым, што ў ёй кожныя дзве простыя на плоскасці перасякаюцца. Гэтая ўласцівасць геаметрыі Рымана патрабуе таксама змены аксіём парадку ў сістэме аксіём Гільбэрта. З пазіцыі **аналітычнай геаметрыі** над Н.г. маюць на ўвазе геаметрыю вектарнай прасторы V над полем рэчаісных лікаў $\mathbf{R}$, забяспечаную білінейнай формай, для якой асацыяваная квадратовая форма не з'яўляецца дадатна вызначанай, напрыклад, калі $\dim V=4$ і квадратовая форма мае выгляд $-x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$, то геаметрыя называецца **геаметрыяй Мінкоўскага** (аснова геаметрыі тэорыі рэлятыўнасці). З пазіцыі дыферэнцыяльнай геаметрыі эўклідава геаметрыя — гэта геаметрыя поўнай адназлучнай рыманавай мнагастайнасці сталай крывіні, роўнай 0.

НЕ́ПЭРАВЫ АНАЛО́ГІІ — формулы *сферычнай трыганаметрыі*. Выкарыстоўваюцца для развязання *сферычных трохвугольнікаў* па дадзеных дзвюх старанах a, b і вугле C паміж імі або па дадзеных двух вуглах A, B і прылеглай да іх старане c:

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\frac{\sin(a-b)/2}{\sin(a+b)/2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2},$$

$$\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}=\frac{\cos(a-b)/2}{\cos(a+b)/2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2},$$

$$\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}=\frac{\sin(A-B)/2}{\sin(A+B)/2}\operatorname{tg}\frac{c}{2},$$

$$\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}=\frac{\cos(A-B)/2}{\cos(A+B)/2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}.$$

НЁТЭРЫНА КО́ЛЦА — асацыятыўнае колца з адзінкай, у якім кожны дакладна нарастальны ланцужок левых (адпаведна правых) ідэалаў абрываецца на канцым нумары. Пры гэтым левае Н.к. не абавязкова будзе правым Н.к. і наадварот. Дуальным чынам уводзіцца паняцце *артынавага колца*. Фактар-колца і канцая прамая сума Н.к. будзе зноў Н.к., але падколца Н.к. можа не быць нётэрыным. Кожнае з *галоўных ідэалаў колца* (напрыклад, колца цэлых лікаў $\mathbf{Z}$) — нётэрына. Калі A — камутатыўнае Н.к., то колца мнагасkладаў на A ад канцай колькасці зменных зноў нётэрына (**тэарэма Гільбэрта пра базіс**). Назоў Н.к. дадзены ў гонар Э.Нётэр, якая сістэматычна даследавала такія колцы і атрымала шэраг вынікаў наконт іх.

НІДЗЕ́ НЕ ШЧЫ́ЛЬНАЕ МНО́СТВА — мноства A тапалагічнай прасторы X, якое не з'яўляецца *шчыльным мноствам* ні ў якім адкрытым мностве $B \subset X$.

НІ́ЖНІ ІНТЭГРА́Л Дарбу — ліміт ніжніх інтэгральных сумаў Дарбу. Няхай f: $[a, b] \to \mathbf{R}$ — абмежаваная функцыя. Падзелім адрэзак $[a, b]$ на n частак пунктамі $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ і абазначым $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $m_i = \inf\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$, $\Delta = \max\limits_i \Delta x_i$, $i = \overline{1, n}$. Тады сума $s = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$ называецца ніжняй інтэгральнай сумай Дарбу, а велічыня $I_* = \lim\limits_{\Delta \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$, якая заўсёды існуе і з'яўляецца лімітам ніжніх інтэгральных сумаў Дарбу пры імкненні дыяметра падзелу Δ да нуля, называецца Н.і. Дарбу. Больш дакладна гэта азначае: існуе такі лік I_*, што для адвольнага $\varepsilon > 0$ можна знайсці такі лік $\delta > 0$, што для ўсіх ніжніх інтэгральных сумаў Дарбу s, падпарадкаваных умове $\Delta < \delta$, будзе выконвацца няроўнасць $|I_* - s| < \varepsilon$. Тады лік I_* называюць Н.і. Дарбу функцыі $f(x)$ на адрэзку $[a, b]$.

НІ́ЖНІ ЛІМІ́Т — 1) Н.л. паслядоўнасці $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ у тапалагічнай прасторы X — сукупнасць усіх пунктаў $p \in X$, кожнае наваколле якіх перасякаецца з усімі мноствамі паслядоўнасці, пачынаючы з якога-небудзь нумара. Гл. *Верхні і ніжні ліміты*; 2) Н.л. функцыі $f(x)$ у пункце x_0 — ліміт ніжніх граняў мноства значэнняў функцыі $f(x)$ у акрузе пункта x_0. Н.л. функцыі абазначаецца $\varliminf\limits_{x \to x_0} f(x)$. Няхай f: $X \to \mathbf{R}$ зададзеная на метрычнай прасторы X. Калі $x_0 \in X$ і $U(x_0, \varepsilon)$ — ε-акруга пункта x_0 ($\varepsilon > 0$), то

$$\varliminf_{x \to x_0} f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\inf_{x \in U(x_0, \varepsilon)} f(x) \right].$$

У кожным пункце $x \in X$ у функцыі $f(x)$ існуе Н.л. $f(x)$, прычым функцыя $f(x)$ — паўнепарыўная знізу на прасторы X.

НІ́ЖНЯЯ МЯЖА́ мноства — характарыстыка мноства рэчаісных лікаў. Няхай зададзена пэўнае падмноства X мноства рэчаісных лікаў. Лік a называецца Н.м. мноства X, калі для кожнага $x \in X$ праўдзіцца няроўнасць $x \geq a$. Мноства X пры гэтым называюць абмежаваным знізу.

НІЛЬПАТЭ́НТНАЯ ГРУ́ПА — група G, якая мае нармальную паслядоўнасць такую, што кожны яе фактар G_{i+1} / G_i знаходзіцца ў цэнтры фактар-групы G / G_i (такая паслядоўнасць называецца цэнтральнай паслядоўнасцю). Мінімальная даўжыня такога шэрагу n называецца ступенню нільпатэнтнасці групы G. Н.г. утвараюць клас, прамежкавы паміж класамі *абэлевых групаў* і *развязальных групаў*, прычым абэлевы групы — гэта дакладна Н.г. ступені 1.

Прыкладамі Н.г. служаць групы унітрохвугольных матрыц фіксаванага парадку над асацыятыўным кольцам з адзінкай. Кожная падгрупа і кожная фактар-група Н.г. самі нільпатэнтныя. Прамы здабытак канцай колькасці Н.г. нільпатэнтны. Канцыя p-групы нільпатэнтныя. Канцая група нільпатэнтная, калі і толькі калі яна ёсць прамы здабытак сваіх падгрупаў Сілава.

НІЛЬПАТЭ́НТНЫ ІДЭА́Л — ідэал M (аднабаковы або двухбаковы) кольца K, для якога існуе натуральны лік n, што $M^n = \{0\}$, інакш кажучы, здабытак адвольных n элементаў ідэалу M роўны нулю. Напрыклад, у кольцы верхніх трохвугольных матрыц над полем Н.і. утвараюць матрыцы з нулявой галоўнай дыяганаллю. У кольцы $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ усе ўласныя ідэалы нільпатэнтныя.

НІЛЬПАТЭ́НТНЫ ЭЛЕМЕ́НТ — элемент $a \neq 0$ кольца A такі, што $a^n = 0$ для нейкага натуральнага n. Напрыклад, у кольцы матрыц $M_n(K)$ над полем K матрыца A нільпатэнтная, калі і толькі калі яе характарыстычны паліном ёсць x^n. Калі кольца A камутатыўнае, мноства яго Н.э. (разам з нулём кольца A) ёсць ідэал I, які супадае з перасячэннем усіх простых ідэалаў A (нільрадыкал кольца A).

НО́ЙМАНА ЗАДА́ЧА, другая краявая задача — адна з *краявых задач*, якая фармулюецца для дыферэнцыяльных раўнанняў з частковымі вытворнымі другога парадку. У некаторых выпадках (у прыватнасці, для *Ляпляса раўнання*) Н.з. палягае ў пошуку развязку ў нейкім абсягу, прычым гэты развязак павінны мець на мяжы абсягу зададзеную нармальную вытворную. Задачу ўпершыню сістэматычна даследаваў К.Нойман (1877).

НО́ЙМАНА ТЭАРЭ́МА пра мінімаксы — тэарэма пра існаванне ў кожнай *матрычнай гульні* аптымальнай стратэгіі.

НО́РМА — абагульненне паняцця *абсалютнай велічыні* ліку. Нормай $\|x\|$ элемента x вектарнай прасторы X над полем рэчаісных або камплексных лікаў называюць адлюстраванне $x \to \|x\|$

вектарнай прасторы X у мноства рэчаісных лікаў **R**, падпарадкаванае ўмовам: $\|x\| \geq 0$, прычым $\|x\| = 0$ толькі пры $x = 0$; $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ для кожнага скаляра λ; $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ для ўсіх x, $y \in X$ (а к с і ё м а т р о х в у г о л ь н і к а). Вектарная прастора з Н. называецца ў н а р м а в а н а й п р а с т о р а й. З дапамогай Н. ва ўнармаванай вектарнай прасторы можна азначыць Н. для лінейных функцыяналаў $f(x)$ па формуле

$$\|f\| = \sup \frac{\|f(x)\|}{\|x\|},$$

а для лінейных аператараў A па формуле

$$\|A\| = \sup \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Знак $\|\cdot\|$ для абазначэння Н. увёў Э.Шміт (1908).

***NP*-ПО́ЎНАЯ ЗАДА́ЧА** — адно з цэнтральных паняццяў тэорыі складанасці вылічэнняў, якое характарызуе параўнальную *задачы складанасць*. Гэтае паняцце датычыць толькі задач пазнавання ўласцівасцяў, г.зн. задач, якія маюць усяго два магчымыя адказы — "так" або "не". Інакш кажучы, кожнаму ўваходу такой задачы адпавядае адказ "так" або "не". Напрыклад, задача, ці ёсць у графе гамільтанаў цыкл, — гэта задача пазнавання, прычым уваходамі з адказам "так" будуць *графы гамільтанавы*.

Няхай *NP* абазначае клас усіх задач, што можна развязаць недэтэрмінаванай машынай Т'юрынга, часавая складанасць якой абмежаваная палінomам ад памеру задачы. Спрошчана, прыналежнасць да класа *NP* азначае, што калі ўваход гэтай задачы мае адказ "так", то існуе эфектыўная працэдура праверкі гэтага факта. Напрыклад, у задачы пазнавання гамільтанавасці, якая ўваходзіць у *NP*, такая працэдура зводзілася б да праверкі таго, што дадзеная паслядоўнасць вяршыняў гамільтанавага графа вызначае гамільтанаў цыкл у гэтым графе. Пераважная большасць вядомых камбінаторных задач пасля іх перафармулявання ў выглядзе задач пазнавання трапляюць у клас *NP*. Кажуць, што задача A_1 паліномна пераўтвараецца ў задачу A_2, калі існуе паліномны ад памеру ўваходу задачы A_1 алгарытм, які ператварае кожны ўваход I_1 задачы A_1 ва ўваход I_2 задачы A_2, прычым уваход I_1 мае адказ "так", калі і толькі калі адказ "так" мае ўваход I_2. Задача называецца *NP*-п о ў н а й, калі яна належыць класу *NP* і ўсякая задача з *NP* паліномна пераўтвараецца ў яе. Такім чынам, клас *NP*-п.з. складаецца з "найбольш цяжкіх" задач класа *NP*. Распазнавальныя варыянты большасці камбінаторных задач, вядомых сваёй цяжкасцю, ёсць *NP*-п.з. Гэта датычыць, напрыклад, *камівояжора задачы* і задачы *цэлалікавага праграмавання*. Пашыраная думка, што ніякую *NP*-п.з. нельга развязаць паліномным алгарытмам, хоць строгі доказ гэтага факта невядомы. Пытанне пра тое, ці сапраўды не існуе іншых паліномных алгарытмаў развязання *NP*-п.з., лічыцца цэнтральным нявысветленым пытаннем у тэорыі складанасці вылічэнняў.

***NP*-ЦЯ́ЖКАЯ ЗАДА́ЧА** — задача, да якой паліномна зводзіцца ўсякая задача з *NP* (гл. *NP-поўная задача*). Паліномная зводнасць задачы z_1 да задачы z_2 азначае, што існуе алгарытм A_1 развязання задачы z_1, які выкарыстоўвае ў якасці падпраграмы гіпатэтычны алгарытм A_2 развязання задачы z_2, прычым алгарытм A_1 паліномны, калі паліномны A_2. Клас *NP*-ц.з. ёсць пашырэнне класа *NP*-поўных задач, паколькі ў яго ўваходзяць і задачы, што не належаць *NP*. У гэты клас, напрыклад, уваходзяць тыя аптымізацыйныя задачы, якія ўваходзяць у *NP*.

НУЛЬМЕ́РНАЯ ПРАСТО́РА — тапалагічная прастора X з $\operatorname{ind} X = 0$ (гл. *Памернасці тэорыя*) або, інакш кажучы, прастора X, дзе для кожнага пункта $x \in X$ і наваколля U ($x \in U$) знойдзецца наваколле V такое, што $x \in U \subset V$ і V адначасова адкрытае і замкнёнае. Нульмернымі прасторамі з'яўляюцца мноства **Q** са звычайнай эўклідавай тапалогіяй, кожная дыскрэтная прастора, а таксама тапалагічны здабытак адвольнай колькасці нульмерных прастораў.

НУЛЬ-ПАСЛЯДО́ЎНАСЦЬ — *фундаментальная паслядоўнасць*, ліміт якой роўны нулю.

НУЛЬ ФУ́НКЦЫІ к а м п л е к с н а й з м е н н а й — такі пункт яе абсягу вызначэння, у якім функцыя а н а л і т ы ч н а я і прымае нулявое значэнне. Калі $f(x) \neq 0$ у нейкай акрузе свайго нуля $z = a$, то п а р а д к а м н у л я называюць нумар першага няроўнага нулю каэфіцыента ў раскладзе $f(z)$ у шэраг Тэйлара ў гэтым пункце. Калі $a \neq \infty$, парадак Н.ф. супадае з нумарам першай ненулявой вытворнай $f(z)$ пры $z = a$. Нулі аналітычнай функцыі маюць у л а с ц і в а с ц ь і з а л я в а н а с ц і: для кожнага нуля функцыі $f(z)$, тоесна няроўнай нулю, існуе такая акруга, у якой $f(z) \neq 0$ усюды, з выняткам $z = a$.

НУЛЯ́—АДЗІ́НКІ ЗАКО́Н — сцверджанне ў тэорыі імавернасцяў, паводле якога адвольная

падзея, ажыццяўленне якой вызначаецца толькі адвольна аддаленымі элементамі паслядоўнасці незалежных выпадковых падзей ці выпадковых велічыняў, мае імавернасць 0 ці 1. Напрыклад, калі $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ — нейкая паслядоўнасць незалежных падзей, то для падзеі A, вызначанай бясконцай колькасцю ажыццяўлення падзей A_k: $A=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$, абавязкова будзе $P(A)=0$ або $P(A)=1$. Гэты факт заўважыў Э.Барэль (1909), а А.Калмагораў (1928) даказаў тэарэму, паводле якой імавернасць збежнасці шэрагу $\sum_{i=1}^{\infty}x_i$ можа быць толькі нуль або адзінка, дзе $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — паслядоўнасць незалежных выпадковых велічыняў.

НУЛЯВА́Я МА́ТРЫЦА — *матрыца*, кожны элемент якой нулявы.

НУЛЯВЫ́ ВЕ́КТАР — *вектар*, у якога супадаюць пачатак і канец. Н.в. мае нулявую даўжыню.

НУТРАНА́Я ГЕАМЕ́ТРЫЯ — раздзел геаметрыі, што вывучае толькі тыя ўласцівасці паверхні і фігур на ёй, якія можна атрымаць з дапамогаю вымярэнняў на самой паверхні, не выходзячы ў абдымную прастору. Так, адлегласць паміж двума пунктамі на паверхні азначаецца як найменшая з даўжыняў крывых, што ляжаць на паверхні і злучаюць гэтыя пункты.

Найпрасцейшыя выпадкі Н.г.: планіметрыя — Н.г. плоскасці; геаметрыя на сферы, з якою супадае ў першым набліжанні геаметрыя зямной паверхні, што ўзнікла ў сувязі з задачамі картаграфіі. У агульных геаметрычных тэорыях паняццю Н.г. надаецца агульны сэнс, які палягае ў тым, што пэўная фігура з гледзішча яе Н.г. разглядаецца як нейкая прастора сама ў сабе. Асновы Н.г. стварыў К.Гаўс (1827).

НУТРАНА́Я КРЫВІНЯ́ мнагастайнасці — мера скрыўленасці мнагастайнасці, якая залежыць толькі ад яе метрычных уласцівасцяў. Н.к. апісваецца *тэнзарам крывіні*, залежным ад каэфіцыентаў метрычнага тэнзара, іх першых і другіх вытворных. Н.к. паверхні эўклідавай прасторы ёсць яе *гаўсава крывіня*.

НУТРАНА́Я МЕ́РА мноства — дакладная верхняя мяжа мераў замкнёных мностваў, што змяшчаюцца ў зададзеным мностве. Гл. *Мера*.

НУТРАНО́Е АДЛЮСТРАВА́ННЕ — непарыўнае адкрытае і нульмернае адлюстраванне (праваобраз кожнага адкрытага мноства ёсць адкрытае мноства і вобраз кожнага адкрытага мноства таксама ёсць адкрытае мноства; нульмернасць азначае, што ніякі кантынуум не адлюстроўваецца ў адзіны пункт). Найважнейшы прыклад Н.а. — *мераморфныя функцыі* адной камплекснай зменнай.

НУТРАНЫ́ АЎТАМАРФІ́ЗМ групы G — аўтамарфізм Int(g), які задаецца формулай $\text{Int}(g)(x) = g^{-1}x\,g$ для кожнага элемента $x \in G$, дзе g — фіксаваны элемент групы G. Мноства Int G усіх Н.а. — гэта нармальная падгрупа ў групе Aut G аўтамарфізмаў групы. Гэтая група ізаморфная $G/Z(G)$, дзе $Z(G)$ — цэнтр групы G. Аўтамарфізм, які не з'яўляецца нутраным, называецца вонкавым.

НУТРАНЫ́ ПУНКТ мноства — пункт b мноства X, якое разглядаецца як тапалагічная прастора, што мае адкрытае наваколле U_b і $U_b \subset X$. Сукупнасць Н.п. утварае нутро мноства.

НУТРО́ мноства — гл. *Нутраны пункт*.

НЬЮ́ТАНА БІНО́М — формула, якая выражае адвольную натуральную ступень сумы двух складнікаў (бінома) праз ступені гэтых складнікаў:

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \ldots + C_n^k a^{n-k}b^k + \ldots + b^n,$$

дзе k, n — натуральныя лікі, a, b — адвольныя лікі, C_n^k — *біномныя каэфіцыенты*. Прыватныя выпадкі Н.б. пры $m = 2$ і $n = 3$:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Біномныя каэфіцыенты маюць уласцівасці: усе яны цэлыя дадатныя лікі; краявыя каэфіцыенты роўныя адзінцы; каэфіцыенты складнікаў, што знаходзяцца на роўнай адлегласці ад канцоў, аднолькавыя; каэфіцыенты нарастаюць ад канцоў да сярэдзіны; сума ўсіх каэфіцыентаў роўная 2^n. Формула Н.б. для цэлых дадатных паказнікаў была вядомая да А.Ньютана; ён адзначыў (1664—65) магчымасць распаўсюджання гэтага раскладу і на выпадак дробавага або адмоўнага паказніка (строгае абгрунтаванне даў Н.Абэль, 1826).

НЬЮ́ТАНА ІНТЭРПАЛЯЦЫ́ЙНАЯ ФО́РМУЛА — форма запісу *Лягранжа інтэрпаляцыйнай формулы*:

$$L_n(x) = f(x_0) + (x-x_0)f(x_0,x_1) + \\ +(x-x_0)(x-x_1)f(x_0,x_1,x_2) + \ldots \qquad (1) \\ \ldots + (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})f(x_0,x_1,\ldots,x_n),$$

дзе $f(x_0,x_1,...,x_k)$, $k=\overline{1,n}$, — падзеленыя рознасці k-га парадку, г.зн.

$$f(x_0,x_1)=\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1},$$

$$f(x_0,x_1,x_2)=\frac{f(x_0,x_1)-f(x_1,x_2)}{x_0-x_2},$$

. . . .

$$f(x_0,x_1,...,x_n)=\frac{f(x_0,x_1,...,x_{n-1})-f(x_1,x_2,...,x_n)}{x_0-x_n}.$$

Формула (1), якая разглядалася А.Ньютанам, называецца Н.і.ф. для няроўных прамежкаў. У выпадку, калі

$$x_1-x_0=x_2-x_1=...=x_n-x_{n-1}=h,$$

з дапамогай формулы

$$f(x_0,x_1,...,x_k)=f^k_{k/2}:(h^k\cdot k!),\quad k=\overline{0,n},$$

дзе $f^k_{k/2}$ — концыя рознасці, $t=\dfrac{x-x_0}{h}$, атрымоўваецца формула

$$L_n(x)=L_n(x_0+th)=f_0+t\cdot f^1_{1/2}+\frac{t(t-1)}{2}f^2_1+...$$

$$...+\frac{t(t-1)...(t-n-1)}{n!}f^n_{n/2},\qquad(2)$$

якая называецца Н.і.ф. для інтэрпаляцыі наперад. Калі ж замена зменных у мнагаскладзе (1) выконваецца на вузлах $x_0,x_{-1},...,x_{-n}$, дзе $x_{-k}=x_0-kh$, то прыходзім да Н.і.ф. для інтэрпаляцыі назад:

$$L_n(x)=L_n(x_0+th)=f_0+tf^1_{-1/2}+\frac{t(t+1)}{2!}f^2_{-1}+...$$

$$...+\frac{t(t+1)...(t+n-1)}{n!}f^n_{-n/2}.\qquad(3)$$

Формулы (2), (3) зручныя для будавання табліц зададзенай функцыі $f(x)$, калі пункт x знаходзіцца ў пачатку або ў канцы табліцы, бо ў такім разе дадаванне аднаго ці некалькіх вузлоў (для падвышэння дакладнасці набліжання) не патрабуе паўтарэння яшчэ адзін раз усёй выкананай работы, як гэта мае месца пры выкарыстанні формулы Лягранжа.

НЬЮТАНА МЕТАД, датычных метад — метад набліжанага пошуку развязкаў раўнання

$$f(x)=0,\qquad(1)$$

дзе f — дыферэнцавальная функцыя. Паслядоўныя набліжанні Н.м. вылічаюцца па формулах

$$x^{k+1}=x^k-(f'(x^k))^{-1}f(x^k),\ k=0,1,2,...\ .\qquad(2)$$

Калі функцыя f двойчы непарыўна дыферэнцавальная, x^* — просты корань раўнання (1) і пачатковае набліжанне x^0 размешчанае дастаткова блізка да x^*, тады Н.м. мае квадратовую збежнасць, г.зн. $|x^{k+1}-x^*|\le C|x^k-x^*|^2$, дзе C — канстанта, якая залежыць толькі ад функцыі f і пачатковага набліжання x^0.

Часта замест (2) для развязання задачы (1) выкарыстоўваюць гэтак званы мадыфікаваны метад Ньютана:

$$x^{k+1}=x^k-[(f'(x^0))]^{-1}f(x^k).\qquad(3)$$

Пры адных і тых жа ўмовах, пры якіх Н.м. мае квадратовую збежнасць, метад (3) мае лінейную збежнасць, г.зн. збягаецца з хуткасцю геаметрычнай прагрэсіі з назоўнікам, меншым за адзінку. У дачыненні да развязання нелінейнага аператарнага раўнання $A(u)=0$ з аператарам A: $B_1\to B_2$, дзе B_1 і B_2 — нейкія банахавы прасторы, абагульненне (2) называецца метадам Ньютана—Канторовіча. Формулы гэтага метаду маюць выгляд $u^{k+1}=u^k-[(A'(u^k))]^{-1}A(u^k)$, дзе $A'(u^k)$ — *Фрэшэ вытворная* аператара A у пункце (u^k), якая з'яўляецца абарачальным аператарам, што дзейнічае з B_1 у B_2. Пры спецыяльных умовах метад Ньютана—Кантаровіча мае квадратовую збежнасць, а адпаведны мадыфікаваны метад — лінейную збежнасць.

НЬЮТАНА—КОТЭСА КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА — інтэрпаляцыйная квадратовая формула для набліжанага вылічэння інтэграла $\int_a^b f(x)dx$ з роўнааддаленымі вузламі $x_k^{(n)}$ выгляду

$$\int_a^b f(x)dx\approx(b-a)\sum_{k=0}^n B_k^{(n)}f(x_k^{(n)}),$$

дзе

$$B_k^{(n)}=\frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!n}\int_0^n\frac{t(t-1)...(t-n)}{t-k}dt.$$

Н.—К.к.ф. мае алгебраічную дакладнасць n для ўсіх мнагаскладаў P няцотнай ступені $n=2l+1$ і роўная $n+1$ пры $n=2k$.

НЬЮТАНА—ЛЯЙБНІЦА ФОРМУЛА — формула, якая паказвае, што вызначаны інтэграл па

адрэзку $[a, b]$ ад функцыі f роўны рознасці значэнняў усякай яе першаіснай на канцах гэтага адрэзка, г.зн. $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. Н.—Л.ф. мае месца і ў выпадку, калі існуе інтэграл Лебэга ад функцыі на адрэзку $[a, b]$, у прыватнасці, калі f непарыўная на $[a, b]$. Н.—Л.ф. зводзіць вылічэнне вызначанага інтэграла да пошуку першаіснай падынтэгральнай функцыі. Н.—Л.ф., якая звязвае аперацыі інтэгравання і дыферэнцавання, мае фундаментальнае значэнне для матэматычнага аналізу. Абагульненнем яе на мнагамерны выпадак з'яўляюцца *Грына формула*, *Астраградскага формула*, *Стокса формула*.

НЯВЫЗНАЧАНАЕ РАЎНА́ННЕ — раўнанне, у якім ёсць больш чым адно невядомае. Н.р. мае, як правіла, бясконцую колькасць развязкаў. Тэрмін Н.р. ужываюць у тэорыі лікаў, дзе развязкі Н.р. адпавядаюць пэўным арыфметычным умовам (звычайна шукаюць развязкі Н.р. у цэлых або рацыянальных ліках). Вывучаюць такія развязкі ў тэорыі *дыяфантавых раўнанняў*.

НЯВЫЗНАЧАНАСЦЬ — тое, што *нявызначаныя выразы*.

НЯВЫЗНАЧАНАЯ СІСТЭ́МА лінейных раўнанняў — сістэма, якая мае больш за адзін развязак (бясконца многа развязкаў). Сістэма вызначаная, калі і толькі калі ранг яе пашыранай матрыцы роўны рангу асноўнай матрыцы, але меншы за лік невядомых. У прыватнасці, сістэма аднародных лінейных раўнанняў ёсць Н.с., калі колькасць невядомых большая за колькасць раўнанняў.

НЯВЫЗНАЧАНАЯ ФО́РМА — квадратовая форма, у якой у кананічным выглядзе $a_{11}x_1^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2$ сярод a_{jj} трапляюцца $i + 1$, $i - 1$.

НЯВЫЗНАЧАНЫ ІНТЭГРА́Л — сукупнасць усіх першаісных функцыі $f(x)$, зададзенай на прамежку $[a, b]$ лікавай восі. Н.і. абазначаецца $\int f(x)dx$ (1), прычым сімвал $\int$ называецца знакам інтэграла, $f(x)$ — падынтэгральнай функцыяй, $f(x)dx$ — падынтэгральным выразам. Аперацыю знаходжання Н.і. называюць *інтэграваннем*, гэта аперацыя, адваротная да дыферэнцавання. Калі $F(x)$ — нейкая першаісная функцыі $f(x)$ на $[a, b]$, г.зн. $F'(x) = f(x)$ для ўсіх $x \in [a; b]$, то ўсякая іншая першаісная на $[a, b]$ мае выгляд $F(x) + C$, дзе C — нейкая канстанта. Такім чынам, Н.і. (1) складаецца з усялякіх функцый $F(x) + C$, дзе C — адвольная канстанта.

Узаемна адваротны характар аперацый інтэгравання і дыферэнцавання выяўляецца роўнасцямі

$$d\int f(x)dx = f(x)dx, \quad \int dF(x) = F(x) + C.$$

Яны даюць магчымасць атрымаць з формул і правілаў дыферэнцавання адпаведныя формулы і правілы інтэгравання. Аднак адрозна ад дыферэнцыяльнага злічэння, дзе вытворная кожнай элементарнай функцыі таксама ёсць элементарная функцыя, Н.і. ад элементарнай функцыі можа не быць такой функцыяй. Напрыклад, немагчыма выразіць праз элементарныя функцыі Н.і.

$$\int\frac{e^x}{x}\,dx, \quad \int\frac{dx}{\ln x}, \quad \int\frac{\sin x}{x}\,dx.$$

У кожным такім выпадку складаецца табліца значэнняў для функцыі, якая з'яўляецца адной з першаісных падынтэгральных і ёсць новая трансцэндэнтная функцыя (гл. *Інтэгральная паказнікавая функцыя*, *Інтэгральны лагарыфм*, *Інтэгральны сінус і інтэгральны косінус*). У тых выпадках, калі Н.і. выражаецца праз элементарныя функцыі, не існуе адзінага алгарытму, з дапамогай якога магчыма знайсці Н.і. Аднак вядомыя шматлікія класы функцый, Н.і. ад якіх выражаецца праз элементарныя функцыі па вызначаных правілах. Такімі класамі з'яўляюцца, напрыклад, рацыянальныя функцыі; функцыі, якія рацыянальна залежаць ад $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ і x; ад $\left(\frac{dx+b}{cx+d}\right)^{p_n}$, $p_n \in \mathbf{Q}$; рацыянальныя функцыі ад $\sin x$ і $\cos x$ або $\operatorname{sh} x$ і $\operatorname{ch} x$.

Н.і. паводле Лебэга ад сумавальнай на адрэзку $[a, b]$ функцыі $f(x)$ азначаецца як сукупнасць усіх функцый выгляду

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + C,$$

дзе C — адвольная канстанта. У дадзеным выпадку роўнасць $F'(x) = f(x)$ выконваецца, наогул кажучы, толькі амаль скрозь на адрэзку $[a, b]$.

НЯВЫЗНАЧАНЫХ КАЭФІЦЫЕ́НТАЎ МЕ́ТАД — метад вылічэння функцыі ў выглядзе дакладнай (або набліжанай) лінейнай камбінацыі вядомых функцый. Гэтая камбінацыя бярэцца з невядомымі каэфіцыентамі, якія вызначаюцца тым або іншым спосабам з умоў разгляданай задачы. Звычайна для іх атрымліваецца сістэма алгебраічных раўнанняў. Напрыклад, дроб

$$\frac{x-2}{x^3-x} = \frac{x-2}{x(x-1)(x+1)}$$

можна запісаць у выглядзе

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1},$$

дзе A, B, C — каэфіцыенты, якія належыць вызначыць.

Калі гэты выраз запісаць у выглядзе

$$\frac{x^2(A+B+C)+x(B-C)-A}{x(x-1)(x+1)}$$

і параўнаць яго з

$$\frac{x-2}{x(x-1)(x+1)},$$

то атрымліваецца сістэма трох лінейных раўнанняў з трыма невядомымі: $A+B+C=0$; $B-C=1$, $-A=-2$. Развязваючы яе, атрымаем $A=2$; $D=-0,5$; $C=-1,5$ і

$$\frac{x-2}{x^3x}=\frac{2}{x}-\frac{0,5}{x-1}-\frac{1,5}{x+1}.$$

Н.к.м. можна дастасоўваць і тады, калі колькасць невядомых каэфіцыентаў бясконцая. Гэта дазваляе запісваць развязкі ў выглядзе ступеневых шэрагаў і потым паслядоўна знаходзіць нявызначаныя каэфіцыенты шэрагаў. Так можна развязваць, напрыклад, дыферэнцыяльныя раўнанні.

НЯВЫ́ЗНАЧАНЫЯ ВЫ́РАЗЫ, н я в ы з н а ч а н а с ц ь — выразы, ліміт якіх не можа быць знойдзены пры непасрэдным ужыванні тэарэм пра ліміт сумы і здабытку. У выніку фармальнай падстановы ў іх лімітавых значэнняў аргумента яны трацяць сэнс, бо пераходзяць у выразы тыпу

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ 0^0,\ \infty^0,\ \infty-\infty,\ 1^\infty,$$

па якіх нельга прыйсці да высновы, існуюць ці не шуканыя ліміты. Для раскрыцця нявызначанасці можна тоесна пераўтварыць выраз, што стаіць над знакам ліміту, або перайсці да эквівалентных бясконца малых.

Карыстаюцца таксама *Тэйлара формулай.* Так, у выпадку нявызначанасці тыпу $\frac{0}{0}$ для таго, каб знайсці $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$, дзе $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$, функцыі f і g раскладаюць па формуле Тэйлара ў наваколлі пункта x_0 (калі гэта магчыма) да першага не роўнага нулю складніка:

$$f(x)=a(x-x_0)^n+0((x-x_0)^n),\quad a\neq 0,$$

$$g(x)=b(x-x_0)^m+0((x-x_0)^m),\quad b\neq 0,$$

у выніку атрымліваецца:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a}{b}\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^{n-m}=\begin{cases}0,\ \text{калі}\ n>m,\\ \frac{a}{b},\ \text{калі}\ n=m,\\ \infty,\ \text{калі}\ n<m.\end{cases}$$

Дастаткова агульным метадам раскрыцця нявызначанасцяў тыпу $\frac{0}{0}$ і $\frac{\infty}{\infty}$ і прыводных да іх ёсць *Лёпіталя правіла.*

НЯВЯ́ЗКА н а б л і ж а н а г а р а з в я з к у — адна з характарыстык якасці набліжанага развязку a аператарнага раўнання $P(u)=0$. Н. называюць велічыню $P(u)$ або нейкую яе норму $\|P(u)\|$.

НЯЗМЕ́ННАЙ КРЫВІНІ́ ПРАСТО́РА — *рыманава прастора* M, у якой секцыйная крывіня $K(\alpha)$ да ўсіх двухмерных кірункаў α нязменная. Калі $K(\alpha)\equiv k$, то кажуць, што Н.к.п. мае к р ы в і н ю. З дакладнасцю да ізаметрыі існуе адзіная поўная адназлучная n-мерная рыманава прастора $S^n(k)$ нязменнай крывіні k. Пры $k=0$ гэта э ў к л і д а в а п р а с т о р а, пры $k>0$ — с ф е р а радыуса $1/\sqrt{k}$, пры $k<0$ — п р а с т о р а Л а б а ч э ў с к а г а. Н.к.п. з'яўляюцца лакальна сіметрычнымі і лакальна канформава эўклідавымі прасторамі. Гл. *Рымана геаметрыя.*

НЯЗРУ́ШНАЯ АЦЭ́НКА — статыстычная ацэнка параметра размеркавання імавернасцяў без сістэматычнай памылкі. Няхай размеркаванне залежыць ад некаторага параметра Θ і зададзена выбарка $x_1,x_2,\ldots,x_n$, па якой мы мяркуем узяць функцыю $\Theta_n(x_1,\ldots,x_n)$ за ацэнку Θ. Ацэнку $\Theta_n(x_1,\ldots,x_n)$ будзем называць Н.а., калі

$$M\Theta_n(x_1,\ldots,x_n)=\Theta.$$

Да прыкладу, калі выпадковая велічыня ξ мае матэматычнае спадзяванне b і дысперсію σ^2, то пры незалежных $x_1,\ldots,x_n$ функцыя $\bar{x}=(x_1+\ldots+x_n)/n$ з'яўляецца Н.а. b, а функцыя

$$s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

не з'яўляецца Н.а. σ^2. Каб пазбегнуць Н.а., для σ^2 бяруць функцыю

$$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2.$$

НЯПРА́ВІЛЬНЫ ДРОБ — 1) звычайны арыфметычны дроб, лічнік якога большы за назоўнік або роўны яму, напрыклад 5/3, 7/7. Н.д. можна

падаць у выглядзе змяшанага ліку, г.зн. ліку, які мае цэлую і дробавую часткі, напрыклад $5/3 = 1\frac{2}{3} = 1 + 2/3$. Наадварот, усякі змяшаны лік можна запісаць у выглядзе Н.д., напрыклад $3\frac{1}{7} = 22/7$; 2) рацыянальны дроб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, у якога ступень n мнагасkладу ў лічніку не меншая за ступень m назоўніка.

НЯРО́ЎНАСЦЬ — стасунак, што звязвае дзве велічыні (у прыватнасці, лікі) з дапамогай аднаго са знакаў $<$ (менш за), $\leq$ (менш ці роўна), $>$ (больш за), $\geq$ (больш ці роўна), $\neq$ (няроўна), г.зн.

$$a < b,\ a \leq b,\ a > b,\ a \geq b,\ a \neq b.$$

Н. валодаюць многімі ўласцівасцямі роўнасцяў. Знак Н. не змяняецца, калі да абедзвюх яе частак дадаць адну і тую ж велічыню ці памножыць абедзве часткі на адзін і той жа дадатны лік. Аднак пры множанні на адмоўны лік знак Н. змяняецца (напрыклад, замест $>$ трэба пісаць $<$ і наадварот). Калі ў Н. уваходзяць некаторыя зменныя велічыні, то для пэўных значэнняў яна можа быць праўдзівай, а для некаторых — не. Напрыклад, Н. $x^2 - 4 > 0$ мае месца толькі для $x < -2$ і $x > 2$. Н. з'яўляецца адным з асноўных матэматычных сродкаў доказу. У тэорыі лікаў цэлы раздзел (*дыяфантавы набліжанні*) грунтуецца на Н. (гл. таксама *Абэля няроўнасць*, *Бернштэйна няроўнасць*, *Бэсэля няроўнасць*, *Бунякоўскага няроўнасць*, *Гёльдэра няроўнасць*, *Енсэна няроўнасць*, *Кашы няроўнасць*, *лінейная няроўнасць*, *Маркава няроўнасць*, *Мінкоўскага няроўнасць*, *трохвугольніка няроўнасць*, *Чабышова няроўнасць*, *Шварца няроўнасць*).

НЯРЭ́ШТА ступені n па модулі m — лік a, для якога параўнанне $x^n \equiv a \pmod{m}$ не мае развязкаў.

НЯЎСТО́ЙЛІВАСЦЬ — тое, што *ўстойлівасць па першым набліжанні.*

НЯЎСТО́ЙЛІВЫ ЛІМІ́ТАВЫ ЦЫКЛ — для сістэмы дыферэнцыяльных раўнанняў 2-га парадку

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y);\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y)$$

замкнёная траекторыя ў *фазавай прасторы XOY*, да якой пры $t \to -\infty$ неабмежавана набліжаюцца ўсе траекторыі з пачаткам у дастаткова вузкім колцападобным наваколлі Н.л.ц.

НЯЦО́ТНАЯ ПАДСТАНО́ВА — гл. *Тра*
пазіцыя.

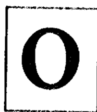
НЯЦО́ТНАЯ ФУ́НКЦЫЯ — функцыя f(
якая змяняе знак пры змене знака аргумента
г.зн. $f(-x) = -f(x)$ для ўсіх x з абсягу вызначэн
гэтай функцыі. Абсяг вызначэння Н.ф. сіметры
ны ў дачыненні да пункта $x = 0$. Напрыклад,
$\sin x$, $\operatorname{tg} x$ — Н.ф. Графік Н.ф. сіметрычны ў дач
ненні да пачатку каардынат.

Сума і рознасць Н.ф. ёсць Н.ф., а здабыта
дзель дзвюх Н.ф. — *цотныя функцыі.* Здабыта
дзель цотнай і няцотнай функцый
Н.ф. Кожную функцыю $f(x)$ з абсягам вызнач
ня, сіметрычным у дачыненні да $x = 0$, можна
даць у выглядзе сумы цотнай і няцотнай функцы
$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, дзе $f_1(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$
цотная функцыя, $f_2(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$ —
цотная.

НЯЦО́ТНЫ ЛІК — цэлы лік, які не дзелі
на 2, напрыклад, 1, 3, 5, ..., –1, –3, ... Усякі Н
можна падаць у выглядзе $2m+1$ або $2m-1$, дзе m
цэлы лік.

НЯЯ́ЎНАЯ ФУ́НКЦЫЯ — функцыя $y = y($
зададзеная няяўна раўнаннем $F(x, y) = 0$, г.
калі выконваецца тоеснасць $F(x, y(x)) \equiv 0$.
ноўныя пытанні тэорыі Н.ф. у найпрасцейш
выпадку наступныя. Задаецца непарыўнае адлю
траванне $F: A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}^2$. Трэба знайсці ўмо
існавання адзінай непарыўнай функцыі, якая
даецца няяўна раўнаннем $F(x, y) = 0$, а такса
вывучыць розныя ўласцівасці Н.ф. па адпаведн
уласцівасцях адлюстравання F, не развязваю
раўнанне $F(x, y) = 0$ у дачыненні да зменнай y.

Важным агульным фактам тэорыі Н.ф. ёс
наступная тэарэма. Няхай функцыя F — непарыўн
ў прамавугольніку $\Pi = [a - \Delta, a + \Delta] \times [b - \Delta',$
$+\Delta']$, пры кожным $x \in [a - \Delta, a + \Delta]$ — стро
манатонная па зменнай y і $F(a, b) = 0$. Тады
нуюць лік $\delta \in (0, \Delta]$ і адзіная непарыўная фун
цыя $y: (a - \delta, a + \delta) \to \mathbf{R}$ такая, што для кожна
$x \in (a - \delta, a + \delta)$ выконваецца роўнасць $F(x, y(x)$
$\equiv 0$. Калі дадаткова дапусціць, што функцыя F м
непарыўную вытворную ў Π, прычым $F'_y(a, b) \neq$
то Н.ф. $y = y(x)$ будзе мець непарыўную вытво
ную, роўную $y'(x) = -F'_x(x, y(x)) / F'_y(x, y(x))$. Ан
лагічныя факты маюць месца і для вытворных в
шэйшых парадкаў. Вышэй пададзеныя факты м
юць глыбокія абагульненні.



О́ЙЛЕРА ЗДАБЫ́ТАК — запіс дзэта-функцыі Рымана ў выглядзе

$$\varsigma(S)=\Pi_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1},$$

дзе p прабягае ўсе простыя лікі. Знойдзены Л.Ойлерам (1737).

О́ЙЛЕРА КАНСТА́НТА, Ойлера—Маскероні канстанта — лік $\gamma=0{,}577\ldots$, які азначаецца як сума збежнага шэрагу

$$\gamma=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\ln\frac{k+1}{k}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right).$$

Невядома, γ — рацыянальны або ірацыянальны лік (2001). О.к. узнікае ў пытанні пра колькасць цэлых пунктаў над гіпербалай.

О́ЙЛЕРА ТЭАРЭ́МА — тэарэма, якая вызначае сувязь паміж элементамі выпуклага мнагагранніка: у кожнага выпуклага мнагагранніка колькасць вяршыняў T разам з колькасцю граняў Γ без колькасці кантаў P роўная 2: $T+\Gamma-P=2$.

О́ЙЛЕРА ФО́РМУЛЫ — формулы, якія звязваюць значэнні паказнікавай і трыганаметрычнай функцый. Для рэчаіснага x О.ф. маюць выгляд

$$e^{\pm ix}=\cos x\pm i\sin x,$$

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2},\quad \sin x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2i}.$$

О́ЙЛЕРА ФУ́НКЦЫЯ — арыфметычная функцыя $\varphi(n)$, значэнне якой роўнае колькасці натуральных лікаў, што не перавышаюць n і ўзаемна простыя з n. Калі $n=p_1^{\alpha_1}\ldots p_s^{\alpha_s}$, то $\varphi(n)=n(1-p_1^{-1})\ldots(1-p_s^{-1})$. Для ўзаемна простых лікаў m і n маем $\varphi(mn)=\varphi(m)\varphi(n)$, г.зн. О.ф. — *мультыплікатыўныя*.

О́ЙЛЕРАВЫ ІНТЭГРА́ЛЫ — інтэгралы

$$B(a,b)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{b-1}dx,\quad a>0,\ b>0,\qquad (1)$$

$$\Gamma(a)=\int_0^{\infty} x^{a-1}e^{-x}dx,\ s>0.\qquad (2)$$

Інтэграл (1) называецца О.і. першага роду ці бэта-функцыяй, (2) — О.і. другога роду ці гама-функцыяй. Інтэгралы (1) і (2) збягаюцца і дазваляюць абагульніць паняцці *біномных каэфіцыентаў* і *фактарыялу*, бо пры натуральных ліках a і b праўдзіцца

$$B(a,b)=\frac{1}{bC_{a+b-1}^{a-1}},\ \Gamma(a+1)=a!.$$

О.і. сустракаюцца ў многіх пытаннях тэорыі *спецыяльных функцый*, да іх зводзяцца некаторыя вызначаныя інтэгралы.

ОРТ — тое, што *адзінкавы вектар.*

ОРТАЎНАРМАВА́НАЯ СІСТЭ́МА — *артаганальная сістэма,* кожны элемент якой мае адзінкавую *норму.*

ОРТАЎНАРМАВА́НЫ БА́ЗІС — артаганальны базіс, *норма* кожнага вектара якога роўная адзінцы.

ПАБО́ЧНЫ КО́РАНЬ, пабочны развязак — корань (развязак) аднаго з прамежкавых раўнанняў, што атрымліваецца ў працэсе развязання дадзенага раўнання, але не ёсць корань дадзенага раўнання. З'яўленне П.к. звязанае з тым, што пры развязанні не заўсёды ўдаецца, спрашчаючы дадзенае раўнанне, пераходзіць да эквівалентнага раўнання. П.к. можа з'явіцца пры *ступеняванні,* пры *патэнцыяванні,* пры вызваленні ад назоўніка і інш. Напрыклад, раўнанне

$$\log_2(x-5)+\log_2(x-3)=3$$

мае толькі адзін корань $x=7$; аднак пасля патэнцыявання атрымліваецца раўнанне

$$(x-5)(x-3)=8,$$

якое мае (акрамя кораня $x=7$) таксама корань $x=1$ — П.к. для зыходнага раўнання.

ПАБО́ЧНЫ РАЗВЯ́ЗАК — тое, што *пабочны корань.*

ПАВАРО́Т — прыватны выпадак *авароту*; аварот плоскасці вакол адзінага нерухомага пункта (цэнтра П.). Калі цэнтр П. знаходзіцца ў пачатку прамавугольнай дэкартавай сістэмы каардынат Oxy, то аналітычна П. выражаецца формуламі

$$\begin{cases} \tilde{x} = x\cos\varphi - y\sin\varphi, \\ \tilde{y} = x\sin\varphi + y\cos\varphi, \end{cases}$$

дзе φ — вугал павароту (пры ўмове, што арыентацыя восяў сістэмы Oxy не змяняецца).

ПАВАРО́ТАЎ МЕ́ТАД — метад, прапанаваны У.Міліёншчыкавым для пабудовы ўзрушэнняў дыферэнцыяльных сістэм. Узрушэнні будуюцца так, што развязкі ўзрушанай сістэмы паслядоўна пераходзяць з адных на іншыя. Па сутнасці, па ўласцівасцях зыходнай сістэмы знаходзяць такія асімптатычныя ўласцівасці развязкаў узрушанай сістэмы (або лінеяванай), якія можна атрымаць пры адвольна малых (у той або іншай тапалогіі) узрушэннях.

ПАВЕДАМЛЕ́ННЕ — паняцце тэорыі інфармацыі: усялякі носьбіт інфармацыі. Паняцце П. мае істотна імавернасны характар: кожная крыніца інфармацыі (або крыніца П.) задаецца пералікам магчымых П. і адпаведных ім імавернасцяў. Няхай $x_1, x_2, ..., x_n$ — магчымыя П., а $p_1, p_2, ..., p_n$ — адпаведныя ім імавернасці. Тады колькасць інфармацыі ў П. прымаюць роўнай $\log_2 \frac{1}{p_i}$. Сярэдняя колькасць інфармацыі ў П. дадзенай крыніцы (яго *энтрапія*), г.зн. сума $\sum_{i=1}^{n} \log_2 \frac{1}{p_i}$, — найважнейшая характарыстыка крыніцы. Менавіта велічыня энтрапіі вызначае магчымасць перадачы і захоўвання П., якія ствараюцца крыніцай.

Пры вывучэнні канкрэтных тыпаў П., такіх, як пісьмовая мова, тэлеграфныя, тэлефонныя або тэлевізійныя сігналы, звычайна будуецца тая або іншая прыблізная імавернасная мадэль крыніцы П. Напрыклад, з дастатковай для мэтаў тэорыі інфармацыі дакладнасцю ў якасці мадэлі рускай пісьмовай мовы можа быць прыняты гэтак званы складаны ланцуг Маркава. Для непарыўных П. у якасці мадэляў выкарыстоўваюцца стацыянарныя выпадковыя працэсы. Пабудова такіх мадэляў абапіраецца на шырокія статыстычныя дадзеныя, што датычаць разгляданых працэсаў.

ПАВЕ́РХНЕВЫ ІНТЭГРА́Л — інтэграл і паверхні $S \subset \mathbf{R}^3$. Няхай S — гладкая параметрыз ваная паверхня, зададзеная ў выглядзе адлюстр вання $\boldsymbol{r}: D \to \mathbf{R}^3$, дзе D — вымерны ў сэнсе Жа дана абсяг, які ляжыць у плоскасці зменных u, (параметраў). Няхай каардынатны запіс адлю травання $\boldsymbol{r}$ мае выгляд

$$\boldsymbol{r}(u,v) = x(u,v)\boldsymbol{i} + y(u,v)\boldsymbol{j} + z(u,v)\boldsymbol{k},$$

$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ — каардынатныя орты ў $\mathbf{R}^3$. Гладкасць азн чае, што функцыя $\boldsymbol{r}$ мае непарыўную вытворну прычым $|\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v| \neq 0$ для ўсіх $(u,v) \in D$. Няхай паверхні S зададзена непарыўная скалярная фу кцыя $f(\boldsymbol{r}) = f(x,y,z)$. П.і. першага роду (п плошчы паверхні) ад функцыі f па паверхні прасцей за ўсё азначыць формулай, якая зводзіц яго непасрэдна да падвойнага інтэграл ў сэнсе Рымана:

$$\iint_{(S)} f(\boldsymbol{r})dS = \iint_{D} f(\boldsymbol{r}(u,v))|\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v|dudv. \quad (1$$

Арыентацыя паверхні задаецца шляхам задан на ёй непарыўнага поля нармальных вектараў. выпадку, які мы разглядаем, такое поле можна з даць у выглядзе

$$|\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}. \quad (2$$

Калі ў гэтым выразе змяніць знак, то атрымаец процілеглая арыентацыя. Аднак правая частк роўнасці (1) пры гэтым не мяняецца. Такім чы нам, П.і. першага роду не залежыць ад арыента цыі паверхні. Пры $f(\boldsymbol{r}) \equiv 1$ П.і. (1) выражае плош чу паверхні S. Калі пад f разумець паверхневу шчыльнасць, то П.і. (1) будзе выражаць масу ўсё паверхні S.

Няхай цяпер на паверхні S зададзена непарыў ная вектар-функцыя

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = P(\boldsymbol{r})\boldsymbol{i} + Q(\boldsymbol{r})\boldsymbol{j} + R(\boldsymbol{r})\boldsymbol{k}.$$

П.і. другога роду (па каардынатах) ад век тар-функцыі $\bar{F}$ па паверхні S таксама прасцей з усё азначыць формулай, якая зводзіць яго непа срэдна да падвойнага інтэграла ў сэнсе Рымана:

$$\iint_{(S')} (P(\boldsymbol{r})dy \wedge dz + Q(\boldsymbol{r})dz \wedge dx + R(\boldsymbol{r})dx \wedge dy) =$$

$$= \iint_{D} \begin{vmatrix} P(\boldsymbol{r}(u,v)) & Q(\boldsymbol{r}(u,v)) & R(\boldsymbol{r}(u,v)) \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} dudv. \quad (3)$$

Тут $\wedge$ — сімвал вонкавага здабытку. З (2) і (3) відавочна, што пры змене арыентацыі паверхні на процілеглую П.і. другога роду мяняе знак, калі лічыць, што $\bar{F}$ — поле хуткасцяў цячэння вадкасці праз паверхню S.

ПАВЕ́РХНЯ — адно з асноўных геаметрычных паняццяў. У пачатковым курсе геаметрыі яно не азначаецца, бо звычайна разглядаюцца канкрэтныя П.: П. шара, конуса, эліпсоіда і г.д. Матэматычна строгае азначэнне П. грунтуецца на паняццях *тапалогіі*. Прычым за аснову бярэцца паняцце п р о с т а й П., якую можна разумець як вынік уздзеяння непарыўных пераўтварэнняў часткі плоскасці. Дадзенае азначэнне можна перавесці на аналітычную мову. Пры гэтым на функцыі, якія вызначаюць П., накладаюць пэўныя аналітычныя абмежаванні. У аналітычнай і алгебраічнай геаметрыі П. вызначаецца як множства пунктаў, каардынаты якіх задавальняюць раўнанне $\Phi(x, y, z) = 0$ (часам можа здарыцца, што вызначаная паверхня не мае рэальнага геаметрычнага сэнсу). Калі функцыя $\Phi(x, y, z) = 0$ непарыўная ў нейкім пункце $M(x_0, y_0, z_0)$ і мае ў ім непарыўныя частковыя вытворныя $\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z}$, не ўсе роўныя нулю, то ў наваколлі M паверхня $\Phi(x, y, z) = 0$ ёсць простая П.

ПАВЕ́РХНЯ ДРУГО́ГА ПАРА́ДКУ — *фігура* Φ у трохмернай афіннай прасторы A^3 над полем $\mathbf{P}$, якая ў афіннай сістэме каардынат $(0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ задаецца раўнаннем другой ступені

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_i y_j + 2\sum_{i=1}^{3} a_i x_i + a = 0;\ a_{ij}, a_i \in \mathbf{P};\ (a_{ij}) \neq 0.$$

Калі $\mathbf{P} = \mathbf{R}$, то П.д.п. дапускаюць афінную класіфікацыю: кожная П.д.п. Φ нейкім *афінным пераўтварэннем* пераводзіцца ў адну з 17 фігур, якія маюць раўнанні: эліпсоід $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$; уяўны эліпсоід $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -1$; уяўны конус другога парадку $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$; аднаполасцевы гіпербалоід $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = +1$; дзвюхполасцевы гіпербалоід $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1$; конус другога парадку $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$; эліптычны парабалоід $x_1^2 + x_2^2 = 2x_3$; гіпербалічны парабалоід $x_1^2 - x_2^2 = 2x_3$; эліптычны цыліндр $x_1^2 + x_2^2 = 1$; уяўны эліптычны цыліндр $x_1^2 + x_2^2 = -1$; пара ўяўных плоскасцяў, якія перасякаюцца па рэчаіснай простай, $x_1^2 + x_2^2 = 0$; гіпербалічны цыліндр $x_1^2 + x_2^2 = 1$; пара рэчаісных плоскасцяў, якія перасякаюцца па рэчаіснай простай, $x_1^2 - x_2^2 = 0$; парабалічны цыліндр $x_1^2 = 2x_2$; пара паралельных плоскасцяў $x_1^2 = 1$; пара ўяўных паралельных плоскасцяў $x_1^2 = -1$; дзве супадальныя плоскасці $x_1^2 = 0$. Ніякія дзве з пералічаных вышэй фігур не пераводзяцца адна ў адну ніякім афінным пераўтварэннем. Пададзеныя раўнанні называюць н а р м а л ь н ы м і р а ў н а н н я м і П.д.п. Калі разглядаюць П.д.п. у т р о х м е р н а й э ў к л і д а в а й п р а с т о р ы E^3, тады праводзяць эўклідаву класіфікацыю, г.зн. замест адвольных афінных пераўтварэнняў дапускаюцца толькі а р т а г а н а л ь н ы я п е р а ў т в а р э н н і (пераўтварэнні, якія не мяняюць адлегласць паміж пунктамі). Атрымліваецца бясконцая колькасць эўклідава эквівалентных класаў П.д.п.; кожны афінны клас (з выняткам апошняга) распадаецца на бясконцую колькасць эўклідавых класаў. Напрыклад, кожны эліпсоід эўклідава эквівалентны эліпсоіду, які мае ў прамавугольнай сістэме каардынат к а н а н і ч н а е р а ў н а н н е

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1;\ a, b, c > 0.$$

Эліпсоід з раўнаннем

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{b_1^2} + \frac{x_3^2}{c_1^2} = 1$$

эўклідава эквівалентны першаму тады і толькі тады, калі $\{a, b, c\} = \{a_1, b_1, c_1\}$.

ПАВЕ́РХНЯ ПЕ́РШАГА ПАРА́ДКУ — тое, што *плоскасць*.

ПАВЕ́РХНЯЎ ТЭО́РЫЯ — раздзел *дыферэнцыяльнай геаметрыі*, у якім вывучаюцца ўласцівасці *паверхняў*. Класічная П.т. вывучае тыя ўласцівасці паверхняў, што застаюцца нязменнымі пры руху. Сукупнасць задач, якія ўзнікаюць пры вымярэннях на паверхні, складаюць *нутраную геаметрыю* паверхні. Гэта задачы пра даўжыню лініі, вуглы паміж кірункамі, плошчы абсягаў, крывізну лініі і г.д.

У нутраной геаметрыі галоўную ролю мае п е р ш а я к в а д р а т о в а я ф о р м а паверхні: $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$; калі паверхня зададзеная ў вектарным выглядзе $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$, дзе u, v — крывалінейныя каардынаты, то

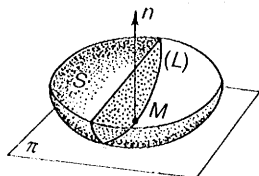
$$E = \left(\frac{\partial\bar{r}}{\partial u}\right)^2,\ G = \left(\frac{\partial\bar{r}}{\partial v}\right)^2,\ F = \left(\frac{\partial\bar{r}}{\partial u}, \frac{\partial\bar{r}}{\partial v}\right)^2.$$

Прастораваe будаванне наваколля пункта на паверхні залежыць ад д р у г о й к в а д р а т о в а й ф о р м ы паверхні: $2h = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$, дзе

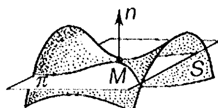
$$L = \left(\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^2}, \vec{n}\right),\ M = \left(\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u \partial v}, \vec{n}\right),\ N = \left(\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial v^2}, \vec{n}\right),$$

$$\vec{n} = \frac{\left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right]}{\left|\left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right]\right|}$$

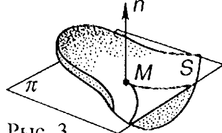
— адзінкавы вектар нармалі да паверхні. Калі форма $2h$ знакасталая ў наваколлі нейкага пункта M, тады паверхня мае выгляд, як на рыс. 1, і M называецца эліптычным пунктам. Калі $2h$ — знаказменная форма, дык маем гіпербалічны пункт і паверхню, як на рыс. 2. Калі



Рыс. 1



Рыс. 2



Рыс. 3

$2h$ — знакасталая форма, але зануляецца пры не роўных нулю адначасова du і dv, то M называецца парабалічным пунктам, а паверхня выглядае, як на рыс. 3. У П.т. вывучаюцца таксама ўласцівасці паверхняў, нязменныя ў дачыненні і да іншых груп пераўтварэнняў (афінных, праектыўных і г.д.).

ПАДА́ЛГЕБРА — непустое мноства U у алгебры A, якое ў сваю чаргу замкнёнае ў дачыненні да аперацый, што вызначаюць A (г.зн. таксама ўтварае алгебру). Ідэалы, радыкалы, цэнтр, прамыя сумы і іншыя ёсць прыклады П. у *лінейнай алгебры.*

ПАДВАЕ́ННЕ КУ́БА — задача пра будаванне з дапамогай цыркуля і лінейкі куба, які мае аб'ём удвая большы, чым куб. Калі кант дадзенага куба $a = 1$, то кант x шуканага куба вызначаецца з кубічнага раўнання $x^3 - 2 = 0$; такім чынам, задача зводзіцца да будавання адрэзка, роўнага $\sqrt[3]{2}$. Няўдалыя спробы старажытных грэкаў ажыццявіць гэтую задачу (таксама як *квадратуру круга* і *трысекцыю вугла*) прывялі да новых кірункаў. Так, Гіпакрат Хіоскі (5 ст. да н.э.) звёў П.к. з кантам a да вызначэння сярэдніх прапарцыйных x, y для двух дадзеных адрэзкаў a і $2a$, г.зн. знаходжання шуканага канта з прапорцыяй $a : x = x : y = y : 2a$. Р.Дэкарт у 1637 г. выказаў думку, што дакладнае будаванне адрэзка, роўнага $\sqrt[3]{2}$, сродкамі цыркуля і лінейкі немагчымае. Неразвязальнасць П.к. з дапамогай цыркуля і лінейкі даказаў П.Ванцэль (1837).

ПАДВО́ЙНАГА АДМАЎЛЕ́ННЯ ЗАКО́Н — закон класічнай логікі, паводле якога "калі н... правільна, што няправільна A, то правільна A". ... фармалізаванай мове логікі выказванняў П.а.з. вызначаецца формулай $\neg\neg A \supset A$ (чытаецца "н... правільна, што не A вымушае A"). У традыцыйна... матэматыцы П.а.з. служыць логікавай асновай для правядзення доказу ад процілеглаг... з дапушчэння, што меркаванне A няправільна, выводзіцца супярэчнасць, на падставе яко... робіцца выснова, што няправільна "не A", тады н... аснове П.а.з. робіцца выснова, што правільна A.

ПАДВО́ЙНЫ ВЕ́КТАРНЫ ЗДАБЫ́ТАК — азначаецца для трох вектараў $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ і $\boldsymbol{c}$ як *вектарн... здабытак* вектара $\boldsymbol{a}$ і вектарнага здабытку ве... тараў $\boldsymbol{b}$ і $\boldsymbol{c}$: $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}] \overset{\text{def}}{=} [\boldsymbol{a},[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]]$. П.в.з. можна вы... лічыць праз скалярныя здабыткі, да прыкладу

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}] = [\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})] - [\boldsymbol{c},(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})].$$

ПАДВО́ЙНЫ ІНТЭГРА́Л — прыватны выпадак *кратнага інтэграла,* калі яго кратнасць роў... ная 2.

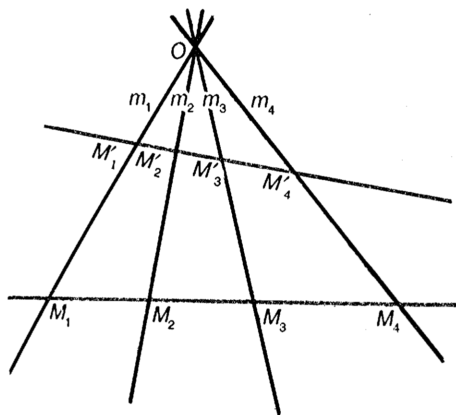
ПАДВО́ЙНЫ ПУНКТ крывой — найпрас... цейшы тып *асаблівага пункта* крывой $F(x, y) = 0$, які характарызуецца тым, што ў гэтым пункце н... толькі маюць месца роўнасці $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0$ (пры... кмета асаблівага пункта наогул), але існуе частко... вая вытворная другога парадку, адрозная ад нуля.

ПАДВО́ЙНЫ ТАСУ́НАК — складаны тасунак чатырох пунктаў M_1, M_2, M_3, M_4 на простай (гл. рыс.) — лік, які роўны $\frac{M_1M_3}{M_3M_2} : \frac{M_1M_4}{M_4M_2}$. Пры гэтым калі кірункі адрэзкаў M_1, M_3 і M_3, M_2 супадаюць, то тасунак M_1M_3 / M_3M_2 лічыцца дадатным, а пры розных кірунках адрэзкаў — адмоўным. Абазначаюць П.т. сімвалам $(M_1M_2M_3M_4)$. П.т. залежыць ад парадку нумарацыі пунктаў, які можа не супадаць з парадкам пунктаў на простай.

Поруч з П.т. чатырох пунктаў разглядаюць П.т. чатырох простых m_1, m_2, m_3, m_4, якія праходзяць праз адзін пункт. П.т. чатырох простых m_1, m_2, m_3, m_4 роўны

$$\frac{\sin(m_1m_3)}{\sin(m_3m_2)} : \frac{\sin(m_1m_4)}{\sin(m_4m_2)},$$

прычым вугал (m_i, m_j) паміж простымі m_i і m_j разглядаецца з улікам яго знака. Абазначаецца П.т. чатырох простых сімвалам $(m_1m_2m_3m_4)$. Калі пункты M_1, M_2, M_3, M_4 ляжаць адпаведна на простых m_1, m_2, m_3, m_4, то $(M_1M_2M_3M_4) = (m_1m_2m_3m_4)$. Калі



пункты M_1, M_2, M_3, M_4 і M'_1, M'_2, M'_3, M'_4 атрыманыя ў выніку перасячэння адной чацвёркі простых m_1, m_2, m_3, m_4, то $(M_1M_2M_3M_4) = (M'_1M'_2M'_3M'_4)$. П.т. выкарыстоўваюць у праектыўнай геаметрыі як інварыянт праектыўных пераўтварэнняў. Чацвёркі пунктаў і простых, для якіх П.т. роўны −1, называюць **гарманічнымі чацвёркамі**, а П.т. — **гарманічнымі тасункамі**.

ПАДВО́ЙНЫ ШЭ́РАГ — шэраг выгляду $\sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}$. Лік u_{mn} называецца **агульным складнікам** П.ш., а конечныя сумы

$$S_{k,l} = \sum_{m=1}^{k} \sum_{n=1}^{l} u_{mn}, \quad k, l = 1, 2, \ldots$$

— **частковымі сумамі**. Калі існуе $S = \lim_{k,l\to\infty} S_{kl}$, дзе k і l незалежна імкнуцца да бясконцасці, то гэты ліміт прымаецца за суму П.ш. і П.ш. называецца збежным. Звычайна на практыцы ад П.ш. пераходзяць да паўторнага шэрагу $\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}\right)$. Тэорыя П.ш. больш складаная, чым адпаведная тэорыя звычайных *шэрагаў*, напрыклад, са збежнасці П.ш. не вынікае абмежаванасць яго частковых сумаў. Найбольш істотныя падвойныя ступеневыя шэрагі і падвойныя шэрагі Фур'е.

ПАДВЫШЭ́ННЕ ДА СТУПЕ́НІ, **ступеняванне** — алгебраічная аперацыя, пры якой лік a паўтараецца множнікам некалькі (n) разоў:

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n} = a^n.$$

Лік a называецца асновай ступені, n — паказнікам ступені, a^n — ступенню. Другая ступень ліку называецца квадратам, трэцяя — кубам. Пры П. да с. праўдзяцца роўнасці

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \; a^m : a^n = a^{m-n}, \; (a^m)^n = a^{mn}.$$

ПАДГРУ́ПА — падмноства H групы G, якое само з'яўляецца групай для аперацыі, вызначанай на G. Падмноства H тады і толькі тады ёсць П. групы G, калі яно разам з кожнымі двума элементамі змяшчае іх здабытак і для кожнага элемента $h \in H$ у H існуе адваротны элемент. Калі H змяшчае толькі адзін элемент 1, то H называецца **адзінкавай** П. Уся група G з'яўляецца сваёй П. П., якая адрозніваецца ад усёй групы, называецца **ўласнай** П. Перасячэнне кожнага мноства П. групы G ёсць П. Перасячэнне ўсіх П. групы G, якія змяшчаюць падмноства M элементаў групы, называецца П., **утворанай мноствам** M.

ПАДЗЕ́ЛУ ЗМЕ́ННЫХ МЕ́ТАД — тое, што *Фур'е метад*.

ПАДЗЕ́ЛЬНАСЦІ ПРЫКМЕ́ТА на натуральны лік d — умова, якой задавальняе натуральны лік A у тым і толькі ў тым выпадку, калі ён без астачы дзеліцца на d. Пажадана, каб гэтая ўмова лёгка правяралася (значна лягчэй, чым непасрэднае дзяленне ліку A на d). Напрыклад, лік дзеліцца на 3, калі і толькі калі сума лічбаў у яго запісе дзеліцца на 3. Калі рознасць $A - B$ дзеліцца на d, то лік A дзеліцца на d, калі і толькі калі лік B дзеліцца на d.

На гэтай уласцівасці заснаванае вывядзенне многіх П.п. Няхай запіс ліку A у дзесятковай сістэме лічэння мае выгляд

$$A = (a_n \ldots a_2 a_1 a_0) \cdot 10 = 10a_1 + 10^2 a_2 + \ldots + 10^n a_n,$$

$$\text{тады } A = a_0 + 10A_1,$$

$$\text{дзе } A_1 = a_1 + 10a_2 + \ldots + 10^{n-1} a_n;$$

$$A = a_0 + 10A_1 + 100A_2,$$

$$\text{дзе } A_2 = a_2 + 10a_3 + \ldots + 10^{n-2} a_n;$$

$$A = a_0 + 10A_1 + 100A_2 + 1000A_3,$$

$$\text{дзе } A_3 = a_3 + 10a_4 + \ldots + 10^{n-3} a_n;$$

. . . .

З гэтых раўнанняў атрымліваецца П.п. на дзельнікі лікаў 10, 100, 1000, ... У прыватнасці, каб лік дзяліўся на 2, неабходна і дастаткова, каб яго

апошняя лічба (лік a_0) дзялілася на 2. Для таго каб лік A дзяліўся на 4 (на 8), неабходна і дастаткова, каб лік, запісаны дзвюма (адпаведна трыма) апошнімі лічбамі ліку A (г.зн. лік $a_0 + 10a_1$), дзяліўся на 4 (адпаведна $a_0 + 10a_1 + 100a_2$ дзяліўся на 8). Існуюць таксама больш складаныя спосабы разліку *падзельнасці*.

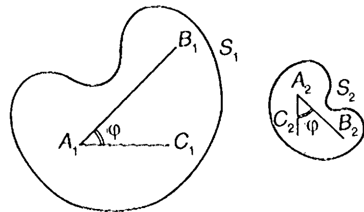
ПАДЗЁЛЬНАСЦЬ — здольнасць аднаго ліку дзяліцца на іншы. Уласцівасць П. залежыць ад таго, якія сукупнасці лікаў разглядаюць. Пры разглядзе толькі цэлых дадатных лікаў лічыцца, што адзін лік дзеліцца на другі (ёсць к р а т н ы), калі дзель ад дзялення першага ліку (*дзеліва*) на другі (*дзельнік*) таксама цэлы лік. Лік называецца п р о с т ы м, калі ў яго няма дзельнікаў, што адрозніваюцца ад яго і ад адзінкі (напрыклад, 2, 3, 5, 7, 11 і г.д.), і с к л а д о в ы м у адваротным выпадку. Кожны складовы лік n можна раскласці ў здабытак простых лікаў, напрыклад, $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^2$. Лік n дзеліцца на просты лік p, калі і толькі калі p трапляецца сярод простых множнікаў, на якія раскладаецца n. Існуе шэраг *падзельнасці прыкмет*, паводле якіх можна хутка і лёгка вызначыць, ці дзеліцца лік n (запісаны ў дзесятковай сістэме лічэння) на пэўны просты лік p.

ПАДЗЁЛЬНАЯ ГРУ́ПА, п о ў н а я г р у п а — група, у якой для кожнага яе элемента a і адвольнага натуральнага ліку n раўнанне $nx = a$ мае хоць бы адзін развязак.

ПАДМНО́СТВА м н о с т в а A — адвольнае мноства, кожны элемент якога належыць A. Напрыклад, мноства ўсіх натуральных лікаў ёсць П. мноства ўсіх цэлых лікаў. Калі да ліку мностваў далучыць “пустое мноства” (якое не змяшчае элементаў), то яго неабходна лічыць П. кожнага іншага мноства. Само мноства A і пустое мноства называюцца н я ў л а с н ы м і П., астатнія — у л а с н ы м і П.

ПАДО́БНАЕ ПЕРАЎТВАРЭ́ННЕ — гл. *Падобнасць.*

ПАДО́БНАСЦЬ — наяўнасць аднолькавай формы ў геаметрычных фігур незалежна ад іх памераў. Дзве фігуры S_1 і S_2 (гл. рыс.) падобныя, калі тасункі адлегласцяў паміж парамі адпаведных пунктаў роўныя адной і той жа канстанце k (к а э ф і ц ы е н т П.) і адпаведныя вуглы паміж лініямі ў S_1 і S_2 роўныя; запісваецца $S_1 \sim S_2$. Акрамя П. фігур, разглядаецца таксама п а д о б н а е п е р а ў т в а р э н н е плоскасці (прасторы), якое



можна ажыццявіць паслядоўным выкананнем *гаматэціі* і *руху*. Тэорыя П. і падобных пераўтварэнняў звязаная з пастулатам пра паралельнасць. Выкарыстоўваецца ў мадэляванні, рысаванні і іншых тэхнічных дастасаваннях геаметрыі.

ПАДО́БНЫЯ МА́ТРЫЦЫ — квадратныя матрыцы A і B аднаго парадку, звязаныя роўнасцю $B = S^{-1}AS$, дзе S — незвыродная матрыца. Матрыцы п а д о б н ы я, калі і толькі калі яны з'яўляюцца матрыцамі аднаго і таго ж лінейнага пераўтварэння ў розных базісах.

П.м. маюць адзін і той жа ранг, вызначнік і характарыстычны мнагасклад. Усе $n \times n$-матрыцы падзяляюцца на н е п е р а с я к а л ь н ы я класы падобных паміж сабою матрыц. Адна з галоўных задач тэорыі матрыц — выбраць у кожным такім класе матрыцу найпрасцейшага выгляду, напрыклад дыяганальную або жарданаву (гл. *Жарданава матрыца*).

ПАДО́БНЫЯ СКЛА́ДНІКІ м н а г а с к л а д у — *аднасклады*, што ўваходзяць у запіс мнагаскладу і адрозніваюцца толькі каэфіцыентамі (ці нічым не адрозніваюцца). Напрыклад, у мнагаскладзе $2a + 5a^3b + 3ab - 3a^3b$ складнікі $5a^3b$ і $-3a^3b$ з'яўляюцца падобнымі. П.с. могуць замяняцца адным складнікам, роўным іх алгебраічнай суме.

ПАДПАСЛЯДО́ЎНАСЦЬ п а с л я д о ў н а с ц і (x_n) — паслядоўнасць (x_{n_k}), якая ўтвораная з элементаў дадзенай паслядоўнасці (x_n) з захаваннем іх парадкавання, гэта значыць, што $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$. Ліміт П. называецца ч а с т к о в ы м л і м і т а м паслядоўнасці (x_n), з якой яна вылучаная. Т э а р э м а Б а л ь ц а н а — В а е р ш т р а с а сцвярджае, што ўсякая абмежаваная паслядоўнасць змяшчае П., якая збягаецца, а ўсякая неабмежаваная лікавая паслядоўнасць змяшчае бясконца вялікую П.

ПАДПО́ЛЕ п о л я L — адвольнае поле K, пашырэнне якога ёсць L. Гл. *Поле.*

ПАДПРАГРА́МА — іменаваная частка *праграмы*, якая рэалізуе дапаможны *алгарытм*. Выклікаецца і атрымлівае інфармацыю (параметры) з асноўнай праграмы, выконвае пэўныя дзеянні і

вяртае кіраванне ў пункт выкліку. П. можна праграмаваць і захоўваць у памяці кампутара незалежна ад асноўнай праграмы. Існуюць дзве формы П.: працэдура і функцыя.

ПАДПРАСТО́РА прасторы V — падмноства W мноства V, якое само ёсць прастора такога ж тыпу ў дачыненні да структуры, што існуе ў прасторы V (вектарнай, афіннай, эўклідавай, праектыўнай, метрычнай, тапалагічнай і інш.).

Падмноства $W \neq \varnothing$ вектарнай прасторы V над полем K ёсць П. V, калі і толькі калі для адвольных вектараў $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in W$ і кожнага скаляра $\alpha \in K$ праўдзяцца ўмовы $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in W$ і $\alpha\boldsymbol{a} \in W$. Калі V канцамернае, $\dim V = n$, то для кожнага k, $0 \leq k \leq n$ у прасторы V ёсць памернасці k.

П. W афіннай, эўклідавай або праектыўнай прасторы часцей называюць плоскасцю. Аднамерная плоскасць называецца таксама простай, а плоскасць, памернасць якой на адзінку меншая за памернасць прасторы ($\dim V = \dim V - 1$), — гіперплоскасцю. Калі V — метрычная прастора з метрыкай ρ, то кожнае непустое падмноства W мноства V ёсць П. прасторы V. Метрыка ρ' на W утвараецца з V: $\rho'(x, y) = \rho(x, y)$ для адвольных $x, y \in W$.

Калі V — тапалагічная прастора з тапалогіяй τ, то кожнае непустое падмноства W мноства V — П. прасторы V. Тапалогію τ' у П. W задаюць слядлы на W адкрытых мностваў у V: $\tau' = \{u \cap W \mid u \in \tau\}$.

ПАДСТАНО́ВА мноства X — узаемна адназначнае адлюстраванне мноства X на сябе. У выпадку канцага мноства X зручна лічыць, што $X = \{1, 2, ..., n\}$ і запісваць П. у выглядзе

$$\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{bmatrix}, \qquad (*)$$

дзе $i_1, i_2, ..., i_n$ — нейкае перастаўленне лікаў 1, 2, ..., n (часам тэрмін "перастаўленне" ўжываецца як сінонім тэрміна П.). Запіс (*) азначае, што γ пераводзіць лік k у i_k для $i = 1, 2, ..., n$.

Здабытак П. α і β мноства X абазначаецца як паслядоўнае выкананне адлюстраванняў α і β і задаецца формулай $(\alpha\beta)(x) = \alpha(\beta(x))$ для кожнага $x \in X$. Сукупнасць усіх П. мноства X $S(X)$ утварае групу ў дачыненні да множання, якую называюць *сіметрычнай групай* і абазначаюць $S(X)$. У выпадку, калі X — канцае мноства з n элементаў, $S(X)$ абазначаецца S_n і называецца сіметрычнай групай n-й ступені. Адвольная падгрупа сіметрычнай групы называецца групай П. Цыклам даўжыні l называецца такая П. δ канцага мноства $Y = \{y_1, y_2, ..., y_l\}$, што $\delta(y_1) = y_2$, $\delta(y_2) = y_3$, ..., $\delta(y_{l-1}) = y_l$, $\delta(y_l) = y_1$. Канцы цыкл абазначаецца $(y_1, y_2, ..., y_l)$. Бясконцым цыклам называюць такую П. злічальнага мноства $Y = \{..., y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, ...\}$, што для кожнага цэлага i $\delta(y) = y_{i+1}$. Абазначаецца бясконцы цыкл так: $(..., y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, ...)$. Для кожнай П. $\gamma \in S(x)$ існуе такі падзел $S(X)$ на неперасякальныя падмноствы, што на кожным з іх γ дзейнічае як цыкл. Цыклы, якія індукуюцца на падмноствах падзелу, называюцца незалежнымі цыкламі П. γ. Калі γ — пятоесная П., якая мае толькі канцую *колькасць цыклаў неадзінкавай даўжыні, то* γ — здабытак сваіх цыклаў.

ПАДСТАНО́Ў ГРУ́ПА — гл. *Падстанова.*

ПАЗІЦЫ́ЙНАЯ ГУЛЬНЯ́ — бескааліцыйная гульня, якая мадэлюе працэсы паслядоўнага выяўлення намераў гульцоў ва ўмовах няпоўнай і зменлівай у часе інфармацыі. Прыклады П.г.: шашкі, шахматы, а таксама задачы паслядоўнага статыстычнага аналізу.

ПАЗІЦЫ́ЙНАЯ СІСТЭ́МА — сістэма лічэння, якая грунтуецца на прынцыпе пазіцыйнага або памесцавага значэння лічбаў. Кожны натуральны лік у дзесятковай сістэме лічэння можна падаць у выглядзе раскладу па ступенях дзесяці. Напрыклад, $9121 = 9 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 1$, тады першая справа лічба паказвае колькасць адзінак, трэцяя лічба (таксама 1) — колькасць сотняў разгляданага ліку.

ПАЗНАВА́ННЕ ВО́БРАЗАЎ — раздзел *матэматычнай кібернетыкі,* прысвечаны распрацоўцы метадаў класіфікацыі аб'ектаў адвольнага паходжання (прыродных або тэхнічных з'яваў, працэсаў, сігналаў і г.д.) на падставе іх фармалізаванага выяўлення або апісання. У П.в. вылучаюць два асноўныя кірункі — тэарэтычны і ўжытковы. Першы з іх звязаны з распрацоўкай прынцыпаў і метадаў П.в., сярод якіх можна адзначыць дэтэрмінаваныя, статыстычныя і структурныя метады, а другі — з развязаннем канкрэтных практычных задач, распрацоўкай адпаведных тэхнічных і праграмных сродкаў.

Зыходным у П.в. з'яўляецца паняцце аб'екта як матэматычнай мадэлі ў выглядзе канцага набору лікавых ці нялікавых прыкмет. На зададзеным мностве аб'ектаў дапускаецца існаванне пэўнай уласцівасці, у адпаведнасці з якой аб'екты аб'ядноўваюцца ў класы такім чынам, што аб'екты розных класаў адрозніваюцца адзін ад аднаго. Уласцівасць, паводле якой вылучаюцца класы,

звычайна канчаткова не вызначаецца. Так, яна можа быць пададзена ў выглядзе навучальнай выбаркі — мноствам "тыповых" аб'ектаў з кожнага класа.

Вылучаюць задачы пазнавання з навучаннем і саманавучаннем (якія вядомыя таксама пад назовам таксанаміі або кластэрызацыі). У першым выпадку патрабуецца пабудаваць алгарытм, які на падставе навучальнай выбаркі вызначае, да якога з зададзеных класаў належыць адвольны аб'ект. У другім — будуецца алгарытм, які нейкім чынам падзяляе зададзенае мноства аб'ектаў на концую колькасць класаў. Задача П.в. з саманавучаннем можа выкарыстоўвацца як дапаможная для задачы з навучаннем, калі трэба пабудаваць або ўдакладніць навучальную выбарку.

ПАКАВА́ННЯ ЗАДА́ЧА — адна з важных задач *камбінаторыкі*. Няхай V і E — непустыя мноствы, $B(V)$ — мноства падмностваў мноства V, G — пэўнае мноства такіх адлюстраванняў Γ: $E \to B(V)$, што $\Gamma(e_1) \cap \Gamma(e_2) \neq \varnothing$ для кожнага $\Gamma \in G$ і двух адвольных розных элементаў e_1, e_2 з E. Тады Γ называецца п а к у н к а м. Кожнаму $e \in E$ прыпісаны пэўны рацыянальны лік $\omega(e)$ — в а г а э л е м е н т а e. Пры абазначэнні праз $E_0(\Gamma)$ мноства ўсіх элементаў $e \in E$, для якіх $\Gamma(e) \neq \varnothing$, трэба знайсці такое $\Gamma \in G$, пры якім $\sum_{e \in E_0(\Gamma)} \omega(e)$ будзе найбольшай (найменшай). Да П.з. зводзяцца многія задачы дыскрэтнай матэматыкі. У агульным выпадку П.з. NP-цяжкая.

ПАКА́ЗНІКАВАЕ РАЗМЕРКАВА́ННЕ — размеркаванне выпадковай велічыні ξ, шчыльнасць размеркавання якой мае выгляд

$$P_\xi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Яго моманты:

$$E\xi^k = \frac{k!}{\lambda^2},\ D\xi = \frac{1}{\lambda^2};$$

характарыстычная функцыя:

$$\varphi_\xi(t) = \frac{\lambda}{\lambda + it}.$$

Мае ўласцівасць адсутнасці наследзеяння:

$$P\{\xi > t + s | \xi > s\} = P\{\xi > t\}.$$

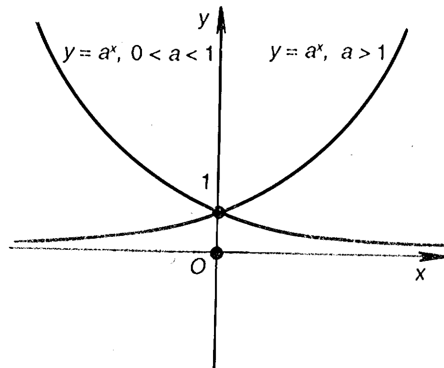
Часта выкарыстоўваюць у тэорыі масавага абслугоўвання, тэорыі надзейнасці.

ПАКА́ЗНІКАВАЕ РАЎНА́ННЕ — раўнанне, у якім невядомая змяшчаецца ў паказніку ступені пры сталай аснове. Для развязання П.р. можна выкарыстоўваць лагарыфмаванне абедзвюх частак раўнання, замену зменнай, роўнасць ступеняў з аднолькавай асновай, графічнае развязанне і іншыя спосабы.

ПАКА́ЗНІКАВАЯ ФУ́НКЦЫЯ, э к с п а н е н т а в а я ф у н к ц ы я, э к с п а н е н т а — функцыя $y = e^z = \exp z$. П.ф. мае ўласцівасці $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$; $(e^{z_1})^{z_2} = e^{z_1 z_2}$. Калі z — рэчаісная зменная, $a > 0$, $a \neq 1$, то П.ф. называецца функцыя $y = a^x$, якая звязаная з П.ф. e^z: $a^x = e^{x \ln a}$. П.ф. вызначаная на ўсёй лікавай простай, непарыўная бясконца дыферэнцавальная, $(a^x)' = a^x \ln a$, $\int a^x dx = a^x / \ln a + C$, нарастальная пры $a > 0$ і спадальная пры $0 < a < 1$, у прыватнасці, $(e^x)' = e^x$, $\int e^x dx = e^x + C$. Расклад у шэраг П.ф. мае выгляд

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

На рыс. прыведзены графікі П.ф. пры розных a. П.ф. e^z камплекснай зменнай $z = x + iy$ — цэлая



трансцэндэнтная функцыя; мае сувязь з трыганаметрычнымі функцыямі праз формулу Ойлера: $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$. П.ф. камплекснай зменнай дастасуецца ў тэорыі шэрагаў і інтэгралаў Фур'е, тэорыі ваганняў і распаўсюджвання хваляў.

ПАКЕ́Т ДАСТАСО́ЎНЫХ ПРАГРА́М — сукупнасць праграм разам з адпаведнай тэхнічнай дакументацыяй, прызначаная для развязання пэўнага класа задач з пэўнага прадметнага абсягу. У залежнасці ад класа задач, што павінны быць развязаныя, адрозніваюць: П.д.п. для пашырэння магчымасці канкрэтнай *аперацыйнай сістэмы* камп'ютара; для развязання агульнанавуковых і тыповых інжынерных, планава-эканамічных і іншых задач; для забеспячэння функцыянавання

аўтаматызаваных сістэм кіравання вытворчасцю і адміністрацыйнага кіравання галінамі народнай гаспадаркі; забеспячэння функцыянавання сістэм кіравання базамі звестак. Існуюць П.д.п. па мадэляванні, у склад якіх уваходзяць праграмы развязання задач аналізу і мадэлявання паводзін розных сістэм, а таксама праграмы статыстычнай апрацоўкі вынікаў мадэлявання з мэтай выбару крытэра аптымальнасці функцыянавання такіх сістэм; П.д.п. навучальнага прызначэння, у склад якіх уваходзіць камплект педагагічных праграмных сродкаў, якія забяспечваюць функцыянаванне аўтаматызаваных сістэм, што накіраваныя на навучанне.

Сучасныя П.д.п. могуць мець у сваім складзе *маніторы*, праграмы планавання работ і дазваляюць фармуляваць заданні ў тэрмінах прадметнага абсягу. Шырока распаўсюджаныя П.д.п., якія не проста развязваюць тыповую задачу з некаторага класа задач, але і падтрымліваюць тую або іншую прафесійную дзейнасць чалавека.

ПАЛАВІ́ННАГА ПАДЗЕ́ЛУ МЕ́ТАД — метад лікавага развязання раўнання $f(x) = 0$ з непарыўнай на $[a, b]$ функцыяй $f(x)$, якая прымае ў пунктах a і b значэнні розных знакаў. Адрэзак $[a, b]$ дзеліцца напалам і ў яго сярэдзінным пункце $c = \frac{a+b}{2}$ вылічаецца значэнне $f(c)$. Калі $f(c) \neq 0$, то для наступнага падзелу напалам выбіраецца той з двух адрэзкаў $[a, c]$ і $[c, b]$, на канцах якога функцыя мае значэнні розных знакаў. У выніку атрымліваем сістэму ўкладзеных адрэзкаў, канцы якіх збягаюцца да кораня раўнання $f(x) = 0$.

ПАЛАСА́ — сукупнасць пунктаў плоскасці, якія знаходзяцца паміж дзвюма паралельнымі простымі гэтай плоскасці. Каардынаты пунктаў x, y П. праўдзяць няроўнасці $C_1 < Ax + By < C_2$, дзе A, B, C_1, C_2 — нейкія канстанты, прычым A і B адначасова не роўныя нулю.

ПАЛІВЕ́КТАР — элемент p-й вонкавай ступені $\wedge^p V$ прасторы V над полем K. П. магчыма разумець як антысіметрычны p разоў контрварыянтны *тэнзар* над V. Усякая лінейна незалежная сістэма вектараў $x_1, \ldots, x_p$ з V вызначае ненулявы П. $x_1 \wedge \ldots \wedge x_p$. Такія П. называюцца п р о с т ы м і. Калі $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — базіс прасторы V і $x_i = \sum_{j=1}^{n} x_i^j e_j$, то каардынатамі П. $t = x_1 \wedge \ldots \wedge x_p$ у базісе $\{e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p} | i_1 < \ldots < i_p\}$ прасторы $\wedge^p V$ з'яўляюцца міноры $t^{i_1 \ldots i_p} = \det|x_i^{i_k}|$, $i_1 < \ldots < i_p$, матрыцы $|x_i^j|$. Калі $p = n$, $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n = \det|x_i^j| e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$. П. у прасторы V называецца яшчэ p-в е к т а р а м в е к т а р н а й п р а с т о р ы V.

ПАЛІГО́Н (грэц. polýgonos ад poly — многа, шмат + gonia — вугал) — ламаная лінія, утвораная з канцай колькасці просталінейных адрэзкаў (звёнаў). Пад П. разумеюць таксама замкнёную ламаную лінію (многавугольнік).

ПАЛІНО́М — тое, што *мнагасклад*.

ПАЛІНО́МНАЕ РАЗМЕРКАВА́ННЕ — сумеснае размеркаванне выпадковых велічыняў $\xi_1, \ldots, \xi_k$, якія прымаюць значэнні $0, 1, \ldots, n$. Задаецца роўнасцю:

$$P(\xi_1 = n_1, \ldots, \xi_k = n_k) = \frac{n!}{n_1! \ldots n_k} p_1^{n_1} \ldots p_k^{n_k},$$

дзе $p_i \geq 0$, $i = \overline{1, k}$, $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$, $n_1 + \ldots + n_k = n$;

$n, p_1, \ldots, p_k$ — параметры размеркавання. Назоў П.р. атрымала ад таго, што імавернасць P ёсць элемент раскладу палінома $(p_1 + \ldots + p_k)^n$. Напрыклад, няхай праводзяцца n незалежных выпрабаванняў, у кожным з якіх разглядаюцца падзеі $A_1, \ldots, A_k$ такія, што для ўсіх выпрабаванняў $P(A_i) = p_i$, $i = \overline{1, k}$, ξ_i — колькасць з'яўленняў падзеі A_i у гэтых n выпрабаваннях. Тады сукупнасць выпадковых велічыняў $(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ мае П.р.

ПАЛІНО́МНЫ КАЭФІЦЫЕ́НТ — каэфіцыент $\frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_m!}$ (дзе $n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n$) пры $x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot x_m^{n_m}$ у раскладзе мнагаскладу $(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^n$. У камбінаторыцы П.к. паказвае: колькасць розных перастаўленняў з n элементаў, з якіх n_1 элементаў аднаго віду, n_2 элементаў другога віду, ..., n_m элементаў m-га віду; колькасць спосабаў размяшчэння n розных элементаў на m розных ячэйках, пры якім у i-ю ячэйку змяшчаецца n_i элементаў, дзе $i = 1, 2, \ldots, m$ без уліку парадку элементаў у адвольнай ячэйцы.

ПАЛІЭ́ДР (ад грэц. poly — многа, шмат + hedra — аснова, паверхня) — аб'яднанне лакальна канцай сукупнасці выпуклых мнагаграннікаў (кожны пункт прасторы мае наваколле, якое перасякаецца толькі з канцай колькасцю мнагаграннікаў).

ПАЛЯ́РНАЯ ВОСЬ — прамень l на плоскасці P з пачаткам у пункце O і выбранай на ім адзінкай

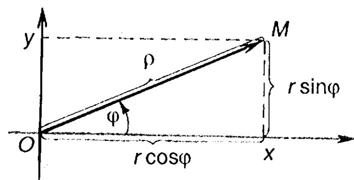
даўжыні (маштабам). Выбар П.в., таксамаададатнага кірунку адлічэння вуглоў (часцей супраць руху гадзіннікавай стрэлкі) задае гэтак званыя *палярныя каардынаты* (ρ, φ) пункта $M \in P \setminus \{O\}$, дзе $\rho = |OM|$, φ — вугал, на які трэба павярнуць прамень l вакол пункта O да сумяшчэння яго з промнем OM.

ПАЛЯ́РНЫ РАСКЛА́Д — расклад лінейнага пераўтварэння канцамерных эўклідавай або унітарнай прастораў у здабытак пераўтварэнняў. Няхай L — унітарная прастора, тады кожнае лінейнае пераўтварэнне A гэтай прасторы можна запісаць у выглядзе $A = DU$, дзе D — неадмоўнае сіметрычнае, а U — унітарнае пераўтварэнне прасторы L.

Пераўтварэнне D вызначаецца адназначна; калі A — незвыроднае пераўтварэнне, то U таксама вызначаецца адназначна. У прыватнасці, калі E — эўклідава прастора, то ўсякае яе лінейнае пераўтварэнне роўнае здабытку сіметрычнага і ізаметрычнага пераўтварэнняў. З існавання П.р. вынікаюць наступныя сцверджанні: усякая квадратная рэчаісная матрыца ёсць здабытак артаганальнай і сіметрычнай матрыц; усякая квадратная камплексная матрыца ёсць здабытак унітарнай і эрмітавай матрыц.

ПАЛЯ́РНЫЯ КААРДЫНА́ТЫ — разам з прамавугольнымі каардынатамі гэта найбольш часта ўжывальная сістэма каардынат на плоскасці. Няхай на плоскасці выбраны нейкі пункт O (п о л ю с), прамень з пачаткам у пункце O (п а л я р н а я в о с ь) і маштаб (адзінка даўжыні). Тады кожнаму пункту $M \neq 0$ плоскасці можна паставіць у адпаведнасць пару (ρ, φ) рэчаісных лікаў, дзе $\rho \geq 0$ — адлегласць ад пункта M да полюса O (даўжыня радыуса-вектара $\overline{OM}$ пункта M: $\rho = |\overline{OM}|$); φ — вугал паміж палярнай воссю і радыусам-вектарам $\overline{OM}$ (адлічваецца ад восі). Вугал φ вызначаецца не адназначна, а з дакладнасцю да складніка $2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Пара (ρ, φ) называецца П.к. пункта M, ρ — п а л я р н ы м р а д ы у с а м, а φ — п а л я р н ы м в у г л о м. Для полюса O палярны радыус $\rho = 0$, а палярны вугал φ не вызначаны (гл. рыс.).

Сумясцім на плоскасці пачатак прамавугольнай сістэмы каардынат з полюсам O палярнай сістэмы, дадатны кірунак восі абцысаў — з палярнай воссю (каб дадатны кірунак восі ардынат утвараў палярны вугал $\pi/2$). Тады пры аднолькавых маштабах у сумешчаных сістэмах паміж прамав... гольнымі каардынатамі (x, y) і П.к. (ρ, φ) адвол... нага пункта M плоскасці існуе сувязь, якая апі... ваецца формуламі: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Ка...



плоскасць разглядаецца як камплексная, то ρ - модуль камплекснага ліку , а φ — аргумент кам... плекснага ліку. Такім чынам, палярнай сістэме к... ардынат на камплекснай плоскасці адпавядае з... піс камплексных лікаў у паказнікавай $\rho e^{i\varphi}$ аб... трыганаметрычнай $\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ форма... Шэраг задач матэматычнай фізікі патрабуе п... раходу да абагульненых П.к. — э л і п т ы ч н ы... к а а р д ы н а т, звязаных з прамавугольнымі ка... ардынатамі (x, y) формуламі:

$$x = a\rho\cos\psi,\ y = b\rho\sin\psi;\ a > 0, b > 0,$$

$$a \neq b,\ 0 \leq \rho < \infty,\ 0 \leq \psi < 2\pi.$$

ПАМЕ́РНАСЦІ ТЭО́РЫЯ — раздзел *тапала... гіі*, дзе абагульняецца на тапалагічнай прастор... паняцце памернасці такіх геаметрычных аб'ектаў як адкрытыя мноствы, паліэдры і паверхні ў **R**... Розныя падыходы да задачы абагульнення ме... вынікам азначэнне для тапалагічнай прасторы ... велічыняў ind$X$, Ind$X$ — м а л а я і в я л і к а... і н д у к т ы ў н ы я п а м е р н а с ц і (Л.Браўэр, П.Урысон, К.Менгер) і dim$X$ — *памернасц...* (А.Лебэг, Л.Браўэр).

Азначэнне ind X і Ind X наступнае. Лічым ind∅ = = Ind∅ = –1. У дапушчэнні, што вызначаны ўс... тапалагічныя прасторы памернасці $i \leq n$, лічым ind $X \leq n+1$ (Ind $X \leq n+1$), калі для кожных пун... кта $x \in X$ і наваколля $U \ni x$ (адпаведна замкнёнага мноства $F \in X$ і наваколля $U \ni x$) знойдзецца нава... колле $V \ni x$ (адпаведна $V \supset F$) такое, што $\overline{V} \subset U$ ... памернасць мяжы мноства $V \leq n$. Скажам далей, што dim $X \leq n$, калі ў кожнае адкрытае накрыццё α прасторы X магчыма ўмежыць адкрытае накрыццё β такое, што кратнасць $\beta \leq n+1$, інакш ка... жучы, кожны пункт $x \in X$ належыць не больш як $n+1$ элементам накрыцця β. Першыя ідэі тэорыі памернасці з'явіліся ў пачатку 20 ст. у працах А.Пуанкарэ і Л.Браўэра. У прыватнасці, Л.Браўэр

даказаў, што $\operatorname{Ind}\mathbf{R}^n = n$. Далей, у працах П.Урысона і К.Менгера пачалося сістэматычнае будаванне тэорыі. У прыватнасці, П.Урысон даказаў, што ў метрызавальнай сепарабельнай прасторы X $\dim X = \operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X$.

ПАМЕ́РНАСЦЬ — цэлалікавы інварыянт n тапалагічнай прасторы X ($\dim X = n$). Роўнасць $\dim X = -1$ праўдзіцца, калі і толькі калі $X = \varnothing$. У выпадку $X \neq \varnothing$ кажуць, што X не больш чым n-памернае, і пішуць $\dim X \le n$, калі ў адвольнае канцае адкрытае накрыццё прасторы X можна ўмежыць канцае адкрытае накрыццё прасторы X кратнасці $\le n + 1$, $n = 0, \dots$. Калі $\dim X < \infty$, то на падставе азначэння $\dim X = \min \{n : \dim X \le n\}$. Для найбольш ужывальных прастораў маем $\dim \mathbf{R} = 1$, $\dim \mathbf{R}^m = m$, $\dim \mathbf{C} = 2$, $\dim \mathbf{C}^k = 2k$.

ПАМЕ́РНАСЦЬ АЛГЕБРАІ́ЧНАЙ МНАГАСТА́ЙНАСЦІ — велічыня, якая адлюстроўвае інтуіцыйнае паняцце колькасці "незалежных параметраў", неабходных, каб задаць агульны пункт мнагастайнасці. Калі X — афінная алгебраічная мнагастайнасць у $\mathbf{R}^n$, яе памернасцю называецца ступень трансцэндэнтнасці поля рацыянальных функцый на X. У агульным выпадку, калі $X = U$, V_α — накрыццё алгебраічнай мнагастайнасці афіннымі адкрытымі мноствамі, памернасці ўсіх мнагастайнасцяў V_α аднолькавыя і бяруцца за памернасць X.

ПАМЕ́РНАСЦЬ ВЕ́КТАРНАЙ ПРАСТО́РЫ н а д п о л е м K — колькасць элементаў (увогуле *кардынальны лік*) *базіса*. Кожная n-мерная вектарная прастора над полем K ізаморфная прасторы $K^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in K,\ i = 1, 2, \dots, n\}$ з лінейнымі аперацыямі, якія ажыццяўляюцца пакаардынатна. Неабходна адзначыць, што адзін і той жа аб'ект можна разглядаць як розныя вектарныя прасторы. Напрыклад, рэчаісная простая $\mathbf{R}$ — гэта аднамерная вектарная прастора над полем $\mathbf{R}$ і адначасова бясконцамерная (дакладней кантынуумерная) вектарная прастора над полем $\mathbf{Q}$.

ПАМЕ́РНАСЦЬ ТАПАЛАГІ́ЧНАЙ ПРАСТО́РЫ — гл. *Памернасці тэорыя*.

ПАМЫ́ЛАК ТЭО́РЫЯ — раздзел *матэматычнай статыстыкі*, у якім даследуюцца лікавыя значэнні набліжана вымерных велічыняў і памылкі вымярэнняў. Пры паўторных выпрабаваннях атрымліваюцца, як правіла, розныя вынікі, г.зн. кожнае вымярэнне мае памылку. Памылкі падзяляюцца на сістэматычныя, грубыя і выпадковыя.

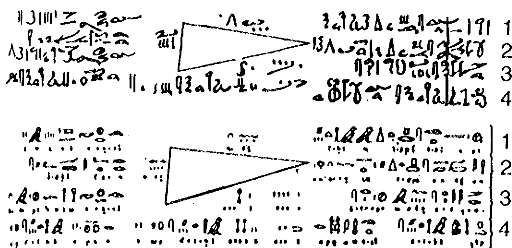
С і с т э м а т ы ч н ы я п а м ы л к і сталыя ці толькі памяншаюць або павялічваюць вынікі вымярэнняў. Г р у б ы я п а м ы л к і вынікаюць з пралікаў пры апрацоўцы вынікаў, а в ы п а д к о в ы я п а м ы л к і — з розных выпадковых фактараў і адрозніваюцца ад шуканай велічыні ў той або іншы бок. У П.т. займаюцца вывучэннем толькі грубых і выпадковых памылак: шукаюцца законы размеркавання выпадковых памылак, статыстычныя ацэнкі невядомых велічыняў па выніках вымярэнняў.

ПАМЫ́ЛКА АКРУГЛЕ́ННЯ — памылка, якая ўзнікае пры набліжаным выяўленні ліку з дапамогай канцай колькасці разрадаў у нейкай сістэме лічэння.

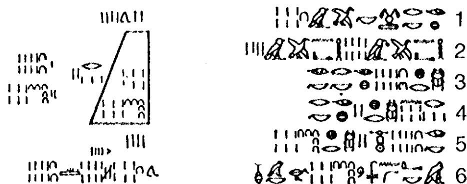
ПАНТРА́ГІНА ДУА́ЛЬНАСЦІ ПРЫ́НЦЫП — тэарэма пра групы характараў тапалагічных абэлевых груп. Гэтую тэарэму даказаў Л.Пантрагін у 1934 г.; яна з'явілася важнай вяхой у развіцці алгебраічнай тапалогіі. Мноства ўсіх непарыўных характараў дадзенай тапалагічнай абэлевай групы G стварае групу ў дачыненні да звычайнага множання адлюстраванняў, абазначаецца $\overline{G}$. Яна называецца д у а л ь н а й або д в а і с т а й да групы G. У мностве $\overline{G}$ уводзіцца тапалогія раўнамернай збежнасці на кампактах, якая ператварае G у тапалагічную групу. Існуе кананічны гомамарфізм: $\varphi : G \to \overline{\overline{G}}$ вызначаны формулай $\varphi(x)(y) = y(x)$ для $x \in G$, $y \in \overline{G}$. П.д.п. сцвярджае, што для лакальна кампактнай групы кананічны гомамарфізм — гэта ізамарфізм тапалагічных груп.

ПАНТРА́ГІНА МА́КСІМУМУ ПРЫ́НЦЫП — прынцып аптымальнасці ў матэматычнай тэорыі аптымальнага кіравання. Сфармуляваны Л.Пантрагіным у 1956 г. П.м.п. — цэнтральны вынік у тэорыі аптымальнага кіравання, які дае агульную неабходную ўмову аптымальнасці кіравання. Гэты вынік і звязаныя з ім даследаванні, якія правялі з пачатку 1950-х гг. Л.Пантрагін і яго супрацоўнікі, сталі адным з зыходных пунктаў у развіцці тэарэтычных, лікавых і дастасоўных аспектаў тэорыі аптымальнага кіравання (гл. *Аптымальнае кіраванне*).

ПАПІ́РУСЫ м а т э м а т ы ч н ы я — помнікі матэматычнай навукі старажытнага Егіпта (блізу 21—18 стст. да н.э.). Найбольш вядомыя: П.Р ы н д а (Лондан, Брытанскі музей; Нью-Ёрк) і М а с к о ў с к і П. (Масква, музей выяўленчых мастацтваў імя А.С.Пушкіна). Уяўляюць сабою (гл. рыс.



Рыс. 1. Фрагмент папіруса Рында, напісанага гіератычным пісьмом, і яго пераклад на гіераграфічны запіс. Вызначэнне плошчы трохвугольніка

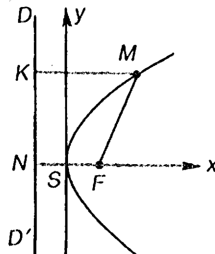


Рыс. 2. Фрагмент Маскоўскага папіруса, напісанага гіератычным пісьмом, і яго пераклад на гіераграфічны запіс. Вызначэнне аб'ёму ссечанай піраміды

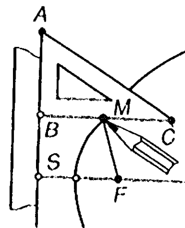
1 і 2) збор развязкаў задач дастасоўнага характару: задачы на дзеянні з дробамі; задачы вызначэння плошчаў прамавугольніка, трохвугольніка, трапецыі, круга (прымаецца роўнай плошчы квадрата са стараной у 8/9 дыяметра); аб'ёму прамавугольнага паралелепіпеда, цыліндра; задачы на прапарцыйнае дзяленне; вызначэнне стасункаў паміж колькасцю зерня і атрыманага з яго хлеба, піва і інш. Асаблівасці гэтых П.: развязанне задачы прыводзіць да вылічэння сумы геаметрычнай прагрэсіі (П. Рында); развязанне задачы заснаванае на дакладнай формуле аб'ёму ссечанай піраміды з квадратнай асновай; таксама вылічваецца бакавая паверхня паўцыліндра, вышыня якога роўная дыяметру (або, магчыма, паверхня паловы шара), што з'яўляецца першым у матэматычнай літаратуры прыкладам вызначэння плошчы крывой паверхні (Маскоўскі П.).

ПАПЯРО́ЧНІК м н о с т в а — велічыня, якая характарызуе адхіленне мноства ў метрычнай прасторы ад нейкай сістэмы аб'ектаў пры пэўным набліжанні. Найбольш вывучаныя П., якія характарызуюць магчымасць апраксімацый мноства канцамернымі кампактамі і канцамернымі лінейнымі мнагастайнасцямі.

ПАРА́БАЛА (ад грэц. parabole) — геаметрычнае месца пунктаў плоскасці, адлегласці якіх да пэўнага пункта F (*фокуса*) і дадзенай простай DD' (*дырэктрысы*) роўныя паміж сабою, г.зн. для кожнага пункта M праўдзіцца роўнасць $MF = MK$. У прамавугольнай сістэме каардынат раўнанне П. мае выгляд $y^2 = 2px$, дзе p — даўжыня адрэзка FN (рыс. 1). П. — крывая 2-га парадку, яе можна атрымаць пры сячэнні круглага конуса плоскасцю, паралельнай датычнай плоскасці гэтага конуса (гл. *Канічныя сечывы*). На рыс. 2 паказана будаванне П. з дапамогай ніткі CMF. Калі ў пункце F знаходзіцца крыніца святла (радыёхваляў), то пасля адбітку ад П. промні ўтвараюць паралельны пучок (гэтая ўласцівасць П. выкарыстоўваецца ў пражэктарах і парабалічных антэнах).



Рыс. 1



Рыс. 2

ПАРА́БАЛАЎ МЕ́ТАД — метад набліжанага вылічэння каранёў мнагаскладу $P_n(z) = a_0 + a_1z + ... + a_nz^n$ з камплекснымі каэфіцыентамі, які заснаваны на інтэрпаляцыі м н а г а с к л а д а м і д р у г о й с т у п е н і. Для адвольных трох лікаў z_0, z_1, z_2 будуецца інтэрпаляцыйны мнагасклад Лягранжа $L^1(z)$, для якога гэтыя лікі ёсць вузлы інтэрпаляцыі. Бліжэйшы да z_2 корань мнагаскладу $L^1(z)$ будзе наступным элементам z_3 паслядоўнасці z_0, z_1, z_2, z_3. Наступны інтэрпаляцыйны крок робіцца для трох лікаў z_1, z_2, z_3.

Такім чынам, узнікае паслядоўнасць z_0, z_1, z_2, z_3,..., якая збягаецца да нейкага кораня мнагаскладу $P_n(z)$. Далей працэс паўтараецца для мнагаскладу меншай ступені.

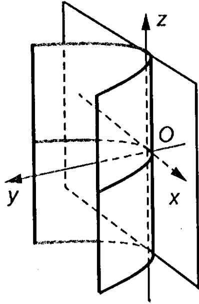
ПАРАБАЛІ́ЧНАГА ТЫ́ПУ РАЎНА́ННЕ — дыферэнцыяльнае раўнанне з частковымі вытворнымі выгляду

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} - a(x,t)u = f(x,t),$$

дзе $\sum a_{ij}\xi_i\xi_j$ — дадатна вызначаная квадратовая форма, t — час. Тыповы прыклад П.т.р. — раўнанне цеплаправоднасці.

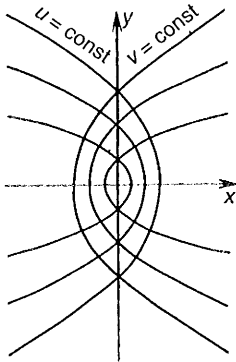
ПАРАБАЛІ́ЧНЫ ПУНКТ паверхні — пункт, у якім гаўсава крывіня паверхні роўная нулю. Дадаткова мяркуецца, што ў гэтым пункце паверхня мае са сваёй датычнай плоскасцю судотык 1-га парадку; пункты, у якіх судотык з датычнай плоскасцю вышэйшы за 2-і парадак, называюць пунктамі ўшчыльнення (гл. таксама *Паверхняў тэорыя*).

ПАРАБАЛІ́ЧНЫ ЦЫЛІ́НДР — *цыліндрычная паверхня*, кіроўная лінія якой ёсць *парабала*



(гл. рыс.). П.ц. — незамкнёная нецэнтральная паверхня 2-га парадку; кананічнае раўнанне: $y^2 = 2px$.

ПАРАБАЛІ́ЧНЫЯ КААРДЫНА́ТЫ — лікі u і v, звязаныя з дэкартавымі каардынатамі x, y формуламі: $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$, дзе $-\infty < u < +\infty$, $0 < v < +\infty$. Каардынатныя лініі — гэта дзве сістэмы ўзаемна артаганальных парабал з процілегла накіраванымі восямі (гл. рыс.).



Лямэ каэфіцыенты вызначаюцца па формуле

$$Lu = Lv = 2\sqrt{u^2 + v^2};$$

элемент плошчы —

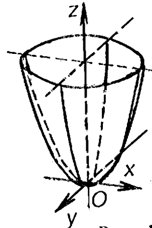
$$ds = 4\,(u^2 + v^2)\,dudv;$$

Лапласа аператар —

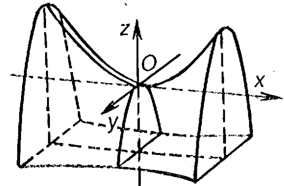
$$\Delta f = \frac{1}{4\,(u^2 + v^2)}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right).$$

Скарыстоўваюцца і абагульненні П.к. у прасторы.

ПАРАБАЛО́ІД (ад парабала + грэц. eidos — выгляд) — незамкнёная нецэнтральная *паверхня другога парадку*. Існуюць два віды П. — эліптычны парабалоід (рыс. 1) і гіпербалічны парабалоід (рыс. 2). Абодва П. можна падаць як паверхні, утвораныя пры руху адной (рухомай) парабалы ўздоўж другой (нерухомай) так, што вяршыня рухомай парабалы слізгае па нерухомай, а плоскасць і вось рухомай парабалы



Рыс. 1



Рыс. 2

ўвесь час застаюцца паралельнымі самі сабе. Эліптычны П. атрымліваецца, калі парабалы павернуты ўвагнутасцю ў адзін бок; гіпербалічны П. — калі парабалы павернуты ўвагнутасцю ў розныя бакі, таму гіпербалічны П. мае выгляд сядла.

У прамавугольнай сістэме каардынат $Oxyz$ з пачаткам у вяршыні П., вось Oz якой з'яўляецца воссю сіметрыі П., раўнанне П. прымае гэтак званы кананічны выгляд:

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \qquad \text{(эліптычны П.)},$$

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \qquad \text{(гіпербалічны П.)},$$

дзе $p > 0$, $q > 0$.

Сячэнні эліптычнага П., паралельныя плоскасці Oxy, — эліпсы; сячэнні, паралельныя восі Oz (сячэнні плоскасцямі Oxz і Oyz), парабалы: $x^2 = 2pz$, $y = 0$ (нерухомая) і $y^2 = 2qz$, $z = 0$ (рухомая). Калі $p = q$, то П. называецца парабалоідам авароту. Ён атрымліваецца аваротам парабалы $x^2 = 2pz$, што ляжыць у плоскасці Oxz, вакол сваёй восі.

Сячэнні гіпербалічнага П. плоскасцямі Oxz і Oyz — парабалы: $x^2 = 2pz$, $y = 0$ (нерухомая) і $y^2 = -2qz$, $x = 0$ (рухомая). Сячэнні плоскасцямі,

паралельнымі плоскасці Oxy, — гіпербалы (пры $z = 0$ — пара простых, якія перасякаюцца). Праз кожны пункт гіпербалічнага П. праходзяць дзве простыя, якія поўнасцю належаць яго паверхні, — прасталінейныя ўтваральныя. Такім чынам, гіпербалічны П. — лінеістая паверхня, утвораная дзвюма сем'ямі крывых.

ПАРА́ДАК — 1) П. алгебраічнай крывой $F(x, y) = 0$ — найбольшая ступень складніка мнагаскладу $F(x, y)$; 2) П. бясконца малой велічыні α у дачыненні да бясконца малой велічыні β — лік n, пры якім існуе концы ліміт $\lim \frac{\alpha}{\beta^n}$, адрозны ад нуля. Напрыклад, $1 - \cos x$ пры $x \to 0$ ёсць бясконца малая другога парадку ў дачыненні да x: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = 0{,}5$; 3) П. нуля (або полюса) α функцыі $f(x)$ — такі лік n, што існуе концы ліміт $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n}$ (або $\lim\limits_{x\to a} (x-a)^n f(x)$), адрозны ад нуля; 4) П. вытворнай — колькасць дыферэнцаванняў, каб атрымаць гэтую вытворную; 5) П. дыферэнцыяльнага раўнання — найбольшы з П. вытворных у раўнанні; 6) П. квадратнай матрыцы — колькасць яе слупкоў; 7) П. концай групы — колькасць яе элементаў; 8) П. набліжання, П. апраксімацыі — велічыня хібнасці набліжання адной зменнай дастасоўна да іншай, паводзіны якой лічацца вядомымі; 9) калі велічыня знаходзіцца ў прамежку ад $0{,}5 \cdot 10^n$ да $5 \cdot 10^n$, то кажуць, што яна мае П. 10^n.

ПАРА́ДКАВАЯ СТАТЫ́СТЫКА — элемент *варыяцыйнай паслядоўнасці*, пабудаванай на выніках назіранняў. Часам элемент з індэксам k называюць k-й П.с.

ПАРА́ДКАВЫ ЛІК, трансфінітны лік — паняцце *мностваў тэорыі*; абагульненне паняцця натуральнага ліку як характарыстыкі пэўнага парадку размяшчэння (першы, другі і г.д.) элементаў *цалкам упарадкаванага мноства* на выпадак бясконцага мноства (падобна да таго, як абагульненне паняцця ліку элементаў мноства прыводзіць да паняцця магутнасці мноства). Паколькі няроўнамагутныя мноствы нельга паставіць ва ўзаемна адназначную адпаведнасць, то цалкам упарадкаваным мноствам рознай магутнасці адпавядаюць розныя П.л. Адваротнае (адрозна ад выпадку концых мностваў) не мае месца: бясконцыя цалкам упарадкаваныя мноствы могуць быць роўнамагутнымі, але не падобнымі (што тым самым і азначае розныя П.л.).

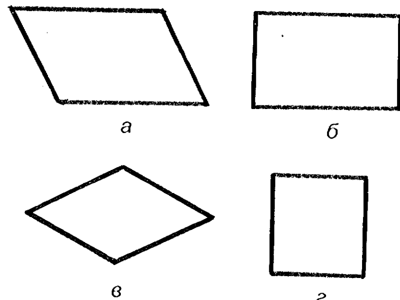
ПАРА́ДКУ АКСІЁМЫ — адна з групаў аксіём *эўклідавай геаметрыі*.

ПАРА́ДКУ ДАЧЫНЕ́ННЕ — *бінарнае дачыненне* на мностве A (звычайна абазначаецца $\leq$), якое мае наступныя ўласцівасці: 1) $a \leq a$ для любога $a \in A$ (рэфлексіўнасць); 2) калі $a \leq b$, $b \leq c$, то $a \leq c$ (транзітыўнасць); 3) калі $a \leq b$, $b \leq a$, тады $a = b$ (антысіметрычнасць). Запіс $a \leq b$ чытаецца як "a менш або роўна b" ці "b больш або роўна a". П.д. называецца лінейным, калі для кожных $a, b \in A$ выконваецца $a \leq b$ або $b \leq a$; такія элементы называюць параўнальнымі. Калі ў A ёсць непараўнальныя элементы, то П.д. называецца частковым. Дачыненне з уласцівасцямі (1) і (2) называюць квазіпарадкам (гл. *Часткова ўпарадкаванае мноства*).

ПАРАДО́КС (ад. грэц. paradoxos — нечаканы, дзіўны) — тое, што *антыномія*.

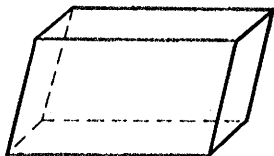
ПАРАКАМПА́КТНАЯ ПРАСТО́РА — тапалагічная прастора, у кожнае адкрытае накрыццё якой можна ўмежыць лакальна концае накрыццё. Замкнёная прастора і тапалагічная сума П.п. таксама ёсць П.п., але здабыткі П.п. не заўсёды з'яўляюцца П.п.

ПАРАЛЕЛАГРА́М (ад грэц. parallelogrammon — паралельны) — чатырохвугольнік, у якога стораны парамі паралельныя; выпуклы чатырохвугольнік, у якога тая або іншая пара супрацьлеглых старон — роўныя адрэзкі; адна пара супрацьлеглых старон ёсць роўныя і паралельныя адрэзкі; пры супрацьлеглых вяршынях той ці іншай пары вуглы роўныя; пункт перасячэння дыяганаляў падзяляе кожную з іх напалам (гл. рыс. *а*—*г*). Віды П.: *прамавугольнік* (усе вуглы прамыя), *ромб* (усе



стораны роўныя), *квадрат* (правільны чатырохвугольнік). Плошча П. роўная здабытку асновы і вышыні.

ПАРАЛЕЛЕПІ́ПЕД (грэц. parallelepipedon ад parallelos — паралельны + epipedon — плоскасць) — *прызма* з асновай у выглядзе *паралелаграма*; шасціграннік, супрацьлеглыя грані якога парамі паралельныя (рыс.). П. п р а м ы, калі бакавыя грані



перпендыкулярныя да яго асновы. П. п р а м а в у г о л ь н ы, калі ён прамы і яго аснова — прамавугольнік. У n-мернай эўклідавай прасторы $\mathbf{R}^n$, пункты якой — упарадкаваныя наборы $(x_1, \ldots, x_n)$ рэчаісных лікаў, пад п р а м а в у г о л ь н ы м П. разумеюць мноства такіх пунктаў, каардынаты якіх праўдзяць няроўнасці $a_1 \le x_1 \le b_1, \ldots, a_n \le x_n \le b_n$, дзе $a_1, \ldots, a_n$; $b_1, \ldots, b_n$ — дадзеныя лікі.

ПАРАЛЕЛІ́ЗМ АЛГАРЫ́ТМУ — наяўнасць пэўнай колькасці незалежных аперацый, якія могуць выконвацца паралельна, г.зн. супольна і адначасова. Архітэктура паралельных камп'ютараў арыентаваная ў асноўным на дасягненне найбольшай прадукцыйнасці на аперацыі з пэўнай колькасцю элементаў (гэтак званы натуральны паралелізм машыны). Таму галоўная задача праграміста — знайсці такі метад развязання, які адлюстроўвае найлепшую адпаведнасць паміж П.а. і натуральным паралелізмам камп'ютара.

ПАРАЛЕ́ЛЬ (ад грэц. parallelos — які ідзе побач) — малы круг сферы, паралельны экватару (гл. *Сферычная геаметрыя*). Разглядаюцца таксама *авароту паверхні*.

ПАРАЛЕ́ЛЬНАЕ ПРАГРАМАВА́ННЕ — раздзел *праграмавання*, звязаны з вывучэннем і стварэннем спецыяльных аб'ектаў (паралельных праграм), кожны з якіх можна лічыць арганізаванай сукупнасцю паслядоўных праграм (модуляў, галін), што маюць магчымасці выконвацца адначасова і ўзаемадзейнічаць паміж сабою; вылічальных метадаў, паралельных алгарытмаў, аперацыйных сістэм, паралельных вылічальных комплексаў з мэтай паскарэння вылічэнняў і эфектыўнага выкарыстання рэсурсаў камп'ютара. У П.п. праграма ўтварае сукупнасць працэсаў (якія працуюць паралельна) апрацоўкі інфармацыі, поўнасцю незалежных або звязаных паміж сабою статыстычнымі, дынамічнымі, прасторава-часавымі ці прычынна-выніковымі дачыненнямі.

Пры стварэнні паралельных алгарытмаў і паралельных праграм, што адпавядаюць ім, да традыцыйных праблем праверкі канкрэтнасці паслядоўных алгарытмаў дадаецца шэраг новых задач, звязаных са спецыфікай сінхронных працэсаў. Асабліва важную ролю сярод гэтых задач маюць задачы вызначэння адназначнасці і беступіковасці паралельных праграм. Адназначнасць мае на ўвазе незалежнасць вынікаў вылічэнняў ад хуткасці розных працэсаў і парадку выканання пэўных падпрацэсаў, а беступіковасць — адсутнасць бясконцых чэргаў і блакавання адных працэсаў іншымі.

Адна з праблем П.п. — задача распаралельвання праграм, алгарытмаў і простых вылічэнняў. Р а с п а р а л е л ь в а н н е м называюць комплексную працэдуру падгонкі алгарытму, праграмы і нават вылічальнага метаду да архітэктуры канкрэтнага ці гіпатэтычнага вылічальнага комплексу. У агульным выпадку распаралельванне складаецца з дзвюх частак: знаходжання паралелізму ў выяўленым апісанні і выкарыстання наяўнага паралелізму, г.зн. размеркавання аператараў па галінах паралельнага алгарытму і сінтэзу паралельнай праграмы ў адпаведнасці з пэўнымі моўнымі сродкамі. У тэорыі П.п. распрацоўваюць фармальныя мадэлі паралельных праграм, працэсаў, сістэм і з іх дапамогай даследуюць розныя аспекты П.п.

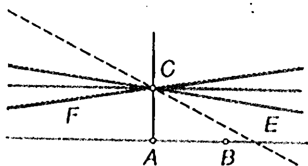
ПАРАЛЕ́ЛЬНАЯ ПРАЕ́КЦЫЯ — *праекцыя* з цэнтрам у бясконца аддаленым пункце.

ПАРАЛЕ́ЛЬНЫ ПЕРАНО́С — *адлюстраванне* спецыяльнага тыпу. Няхай M — гладкая мнагастайнасць з афіннай злучнасцю ∇, γ — гладкая крывая на M, $t \in I$. Тады гладкае вектарнае поле $X(t)$ уздоўж крывой γ называецца п а р а л е л ь н ы м у дачыненні да ∇, калі $(\nabla_A X)_{\gamma(t)} = 0$, дзе гладкія вектарныя палі X, A на M ёсць працяг вектарных палёў $X(t)$ і $\gamma'(t)$ адпаведна ўздоўж γ на ўсю мнагастайнасць M.

Няхай $p = \gamma(t_1)$, $q = \gamma(t_2)$ — два пункты на M, $X(t)$ — паралельнае вектарнае поле ўздоўж γ, $X(t_1) = A$, $X(t_2) = B$. П.п. уздоўж γ — гэта адлюстраванне P_γ: $T_pM \to T_qM$, $A \to B$, якое з'яўляецца ізамарфізмам вектарных прастораў T_pM і T_qM. П.п. залежыць ад выбару γ. Ён з'яўляецца шырокім абагульненнем звычайнага П.п. вектараў у

афіннай або эўклідавай прасторы, які адпавядае натуральнай афіннай злучнасці ($\Gamma_{ij}^{k} = 0$) у $\mathbf{R}^n$ і не залежыць ад γ.

ПАРАЛЕ́ЛЬНЫЯ ПРО́СТЫЯ ў эўклідавай геаметрыі — простыя, якія ляжаць у адной плоскасці і не перасякаюцца. У *абсалютнай геаметрыі* праз пункт, які не ляжыць на дадзенай простай, праходзіць хоць бы адна простая, што не перасякае дадзеную. У эўклідавай геаметрыі існуе толькі адна такая простая (пяты пастулат Эўкліда пра паралельныя простыя). У *Лабачэўскага геаметрыі* ў плоскасці праз пункт C (гл. рыс.) па-за дадзенай простай AB праходзіць бясконцае мноства простых, якія не перасякаюць AB



(з іх паралельнымі да AB лічацца толькі дзве). Простая CE называецца паралельнай да простай AB у кірунку ад A да B, калі пункты B і E ляжаць з аднаго боку ад простай AC і простая CE не перасякае простую AB; усякі прамень, які праходзіць унутры вугла ACE, перасякае прамень AB. Гэтаксама вызначаецца і простая CF, паралельная да AB у кірунку ад B да A.

ПАРА́МЕТР (ад грэц. parametron — які адмярае) — тэрмін, які выкарыстоўваецца ў розных сэнсах. У агульным выпадку П. — гэта зменная велічыня, значэнні якой служаць для адрознівання элементаў нейкага мноства. Напрыклад, П. задачы — гэта велічыня, сталая ў дадзенай задачы, але яна мяняецца пры пераходзе да іншых задач такога ж тыпу; функцыю $y = f(x)$ можна задаць з дапамогай дзвюх функцый $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, дзе t — прамежкавая зменная, якая таксама называецца П. Часам П. называюць нават незалежную зменную (аргумент) дадзенай функцыі (напрыклад, інтэгралы, якія залежаць ад параметра), а іншым разам — і каардынаты пункта.

ПАРАМЕТРЫ́ЧНАЕ ВЫЯЎЛЕ́ННЕ функцыі — выраз функцыйнай залежнасці паміж некалькімі зменнымі з выкарыстаннем спецыяльных зменных (*параметраў*). Напрыклад, у выпадку залежнасці $x^2 + y^2 = 1$ П.в. мае выгляд $x = \cos t$, $y = \sin t$. Асабліва зручнае П.в. прасторавых крывых: простая ў прасторы мае П.в. $x = a + mt$, $y = b + nt$, $z = c + pt$; шрубавая лінія — $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$. Галоўныя перавагі П.в.: магчымасць вывучаць няяўныя функцыі выгляду $F(x, y) = 0$, $\Phi(x, y, z) = 0$ у выпадку, калі пераход да іх яўнага задання складаны або немагчымы; магчымасць выяўляць мнагазначныя функцыі з дапамогай адназначных. Гл. таксама *Уніфармізацыя*.

ПАРАМЕТРЫ́ЧНАЕ ПРАГРАМАВА́ННЕ — раздзел *матэматычнага праграмавання*, у якім умовы дапушчальнасці або мэтавая функцыя разгляданай задачы аптымізацыі (ці тое і другое разам) залежаць ад параметраў. У актуальным выглядзе задача П.п. палягае ў максімізацыі мэтавай функцыі $f(x, \lambda)$ на ўсіх $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n$, якія адпавядаюць абмежаванням $g_i(x, \lambda) \leq b_i(\lambda)$, $i = 1, ..., m$, дзе λ — вектар параметраў, што належыць пэўнаму мноству параметраў $\Lambda \in \mathbf{R}^p$. Пры кожным фіксаваным λ гэтая задача ёсць звычайная задача матэматычнага праграмавання.

Мэты даследавання П.п.: паказаць пэўную адвольнасць, з якой бываюць вызначаны зыходныя звесткі практычнай аптымізацыйнай задачы; ахапіць адзінай фармулёўкай звязаныя паміж сабою варыянты задачы; вывучыць магчымасць адэкватнай пастановы праблемы ўстойлівасці развязкаў задач матэматычнага праграмавання ў дачыненні да варыяцый зыходных звестак; адлюстраваць сувязь задач П.п. з праблемай знаходжання мноства оптымумаў у задачах шматкрытэрнай аптымізацыі. У агульным выпадку праблемы даследавання задач П.п. цяжкія. Найбольш вывучаны задачы лінейнага П.п., якія пры ўсякім фіксаваным параметры ёсць задачы лінейнага праграмавання.

ПАРАМЕТРЫ́ЧНАЕ РАЎНА́ННЕ мноства пунктаў прасторы — заданне пунктаў гэтага мноства (або іх каардынат) у выглядзе значэнняў функцый нейкіх зменных, якія называюцца *параметрамі*. Напрыклад, П.р. k-метрычнай плоскасці ў $\mathbf{R}^n$ мае выгляд $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t_1\boldsymbol{a}_1 + ... + t_k\boldsymbol{a}_k$, дзе $-\infty < t_i < +\infty$, $\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_k$ — лінейна незалежныя вектары. У дыферэнцыяльнай геаметрыі крывыя задаюць П.р. выгляду $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, а паверхні — $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$.

ПАРАЎНА́ЛЬНАЯ ХІ́БНАСЦЬ — тасунак $\frac{a - b}{b}$, дзе b — набліжанае значэнне некаторай велічыні, дакладнае значэнне якой роўнае a. П.х. называюць таксама лік $\delta(b)$ такі, што $\left|\frac{a-b}{b}\right| \leq \delta(b)$. Часта П.х. выражаюць у працэнтах.

ПАРАЎНА́ННЕ — *дачыненне* паміж двума цэлымі лікамі a і b, якое азначае, што $a - b$ дзеліцца на дадзены лік m або, інакш кажучы, што $a = b + mk$ для нейкага $k \in \mathbf{Z}$. У гэтым выпадку пішуць $a \equiv b \pmod m$ ці проста $a = b$ (m), дзе m — модуль П. Параўнальнасць a і b па модулі m эквівалентная таму, што a і b маюць аднолькавыя рэшты ад дзялення на m. Параўнальнасць па фіксаваным модулі m ёсць *эквівалентнасці дачыненне* ў кольцы цэлых лікаў. Дачыненне « $\equiv \pmod m$)» разбівае $\mathbf{Z}$ на m неперасякальных класаў параўнальных паміж сабою па модулі m лікаў. Гэтыя класы, якія адназначна вызначаюцца сваімі прадстаўнікамі, напрыклад лікамі 0, 1, ..., $m - 1$, носяць назоў класаў рэштаў па модулі m. П. з адным і тым жа модулем можна складаць, адымаць, множыць аналагічна звычайным роўнасцям. Гэтыя аперацыі індукуюць на мностве $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ класаў рэштаў, для якіх $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ ёсць кольца (у прыватнасці, *поле*, калі m — просты лік). Будову мультыплікатыўнай групы кольца класаў рэштаў па модулі m у значнай ступені вызначаюць *Ойлера тэарэма* і *Фэрма малая тэарэма*. Алгебраічным П. называюць выраз $F(x_1, x_2, ..., x_n) \equiv 0 \pmod m$, дзе $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ — мнагасклад ад n зменных з цэлымі каэфіцыентамі. Развязкам алгебраічнага П. называюць такі набор $a_1, a_2, ..., a_n$ цэлых значэнняў невядомых $x_1, x_2, ..., x_n$, што лік $F(a_1, a_2, ..., a_n)$ параўнальны з нулём па модулі m. Звычайна лічаць, што $a_i \in \{0, 1, ..., m - 1\}$. Найпрасцейшыя алгебраічныя П. — П. першай ступені з адной зменнай: $ax \equiv b \pmod m$. Яны не маюць развязкаў, калі b не дзеліцца на $d = (a, m)$ (на найбольшы супольны дзельнік лікаў a і m); калі $b = dk$, $k \in Z$, то П. $ax \equiv b \pmod m$ мае роўна d развязкаў. Тэорыю П. сістэматычна распрацаваў К.Гаус і паклаў яе ў аснову класічнай тэорыі лікаў. Цяпер гэта добра развітая тэорыя, якая мае мноства цікавых вынікаў, асабліва тэорыя П. па простым модулі (звязаная з тэорыяй алгебраічных функцый, алгебраічнай геаметрыяй). Паняцце П. цэлых лікаў мае розныя абагульненні, у алгебры часта вядуць гаворку пра П. элементаў адвольнага кольца па тым ці іншым ідэале.

ПАРАЎНА́ННЯ ПРЫКМЕ́ТА збежнасці — 1) П.п. лікавых шэрагаў з неадмоўнымі элементамі: калі для двух шэрагаў $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ існуе такая канстанта $c > 0$, што $0 \le u_n \le cv_n$, то са збежнасці другога вынікае і збежнасць першага, а з разбежнасці першага вынікае разбежнасць другога; 2) П.п. збежнасці неўласцівых інтэгралаў ад знакасталых функцый: калі існуе такая канстанта $d > 0$, што для дзвюх неадмоўных функцый $f_1(x)$ і $f_2(x)$ выконваецца няроўнасць $0 \le f_1(x) \le df_2(x)$ для ўсіх $x \in (0, +\infty)$, то са збежнасці неўласцівага інтэграла $I_2 = \int_0^{+\infty} f_2(x)dx$ вынікае збежнасць неўласцівага інтэграла $I_1 = \int_0^{+\infty} f_1(x)dx$. Калі ж разбягаецца I_1, то разбягаецца і I_2.

ПАРСЭВА́ЛЯ РО́ЎНАСЦЬ — роўнасць выгляду

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2),$$

дзе a_0, a_n, b_n — *Фур'е каэфіцыенты* функцыі $f(x)$. Даказаў у 1805 г. М.Парсэваль пры ўмове магчымасці пачленнага інтэгравання трыганаметрычных шэрагаў.

ПАСКА́ЛЬ — шырока распаўсюджаная *праграмавання мова*, прызначаная для апісання алгарытмаў развязання на камп'ютары вылічальных і інфармацыйна-лагічных задач. П. быў распрацаваны Н.Віртам першапачаткова спецыяльна для навучання *праграмаванню* і названы ў гонар французскага матэматыка і філосафа Б.Паскаля. Першая версія мовы атрыманая ў 1968 г., яе поўнае апісанне надрукаванае ў 1971 г. П. грунтуецца на алголе-60, які больш за іншыя мовы падыходзіць для навучання праграмаванню. Паводле сваёй ідэі П. найбольш блізкі да сучаснай методыкі і тэхналогіі стварэння праграм. Ён дае шырокі выбар структур звестак, якія выкарыстоўваюцца пры развязанні розных задач. У той жа час П. — даволі простая мова. Таму ён адразу знайшоў дастасаванне не толькі ў навучанні, але і ў практычным праграмаванні.

ПАСКА́ЛЯ ТРОХВУГО́ЛЬНІК — трохвугольная лікавая табліца для падліку біномных каэфіцыентаў. На баках П.т. стаяць адзінкі, унутры — лікі, роўныя суме двух лікаў, што стаяць над імі:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
... ...

$(n + 1)$-ы радок дае біномныя каэфіцыенты для раскладання n-й ступені бінома $(a + b)^n$. П.т. апі-

саў Б.Паскаль у «Трактаце пра арыфметычны трохвугольнік» (1654, надрукаваны ў 1665).

НАСЛЯДО́ЎНАСЦЬ — адлюстраванне $n \mapsto x_n$ мноства **N** усіх натуральных лікаў у пэўнае мноства $X \ni x_n$. Н. называецца лікавай, функцыйнай і г.д., калі X ёсць адпаведна мноства лікаў, функцый і г.д. Велічыня x_n называецца n-м элементам Н., калі n разглядаць як фіксаваны лік, і агульным элементам, калі n — адвольны лік. Калі элементы Н. — гэта пункты тапалагічнай прасторы X, то важная роля належыць збежным Н., г.зн. Н., якія маюць ліміт у X. З дапамогай такіх Н. апісваюць уласцівасці кампактнасці, існаванне ліміту адлюстравання, яго непарыўнасць і г.д. Н. можна задаць формулай яе агульнага элемента (напрыклад, $x_n = n^2$), табліцай, рэкурэнтнай формулай (напрыклад, *Бэрнулі лікі*) або моўным апісаннем (напрыклад, Н. усіх простых натуральных лікаў у парадку іх нарастання).

НАСЛЯДО́ЎНАСЦЬ НАТУРА́ЛЬНЫХ ЛІ́КАЎ — наслядоўнасць $\mathbf{N} = \{1, 2, ...\}$ цэлых неадмоўных лікаў. Н.н.л. — адна з першых і галоўнейшых абстракцый матэматыкі і таму з'яўляецца мадэллю шматлікіх лагікавых тэорый.

НАСЛЯДО́ЎНЫ СТАТЫСТЫ́ЧНЫ АНА́ЛІЗ — раздзел *матэматычнай статыстыкі*. Характэрная рыса Н.с.а.: колькасць назіранняў, якія выконваюцца (на момант спынення назіранняў), не фіксуецца загадзя, а выбіраецца ў залежнасці ад значэнняў звестак, што атрымліваюцца ў працэсе назіранняў. А.Вальд (1946) высветліў, што ў задачы адрознівання (па выніках незалежных назіранняў) дзвюх простых гіпотэз наслядоўны крытэр дачыненняў імавернасцяў дае выйгрыш у сярэдняй колькасці назіранняў, якія выконваюцца, у параўнанні з найбольш магутным класічным спосабам адрознівання з фіксаваным аб'ёмам выбаркі і такімі ж імавернасцямі памылковых развязкаў. У наслядоўных метадах момант спынення назіранняў — выпадковая велічыня, якая не залежыць ад «будучыні».

НАСЛЯДО́ЎНЫХ НАБЛІ́ЖАННЯЎ МЕ́ТАД — адзін з агульных метадаў набліжанага развязання аператарных раўнанняў. Няхай E — нейкая прастора, на якой зададзены аператар A: $E \to E$. Патрабуецца знайсці нерухомы пункт гэтага аператара, г.зн. развязак раўнання

$$A(x) = x, \quad x \in E. \qquad (1)$$

Няхай раўнанне (1) мае развязак x^1 і ўжо знойдзена яго пачатковае набліжанне x_0. Будаванне наслядоўнасці $x_{n+1} = Ax_n$, $n = 0, 1, 2, ...$, і даследаванне пытанняў збежнасці звычайна называюць Н.н.м. Адзін з вядомых метадаў у Н.н.м. — прынцып сціскальных адлюстраванняў. Калі E — поўная метрычная прастора з метрыкай ρ і калі для ўсіх $x, y \in E$ праўдзіцца няроўнасць $\rho(Ax, Ay) \le a\rho(x, y)$, $0 < a < c < 1$, то раўнанне (1) мае адзіны развязак, які з'яўляецца лімітам наслядоўных набліжанняў $\{x_n\}$ пры кожнай пачатковай умове x_0. Больш за тое, выконваецца няроўнасць

$$\rho(x_n, x^1) \le \frac{a^n}{1-a}\rho(Ax_0, x_0).$$

НАСТУЛЯ́Т (ад лац. postulatum — патрабаванне) — сцверджанне, якое лічыцца правільным у дадзенай тэорыі і не патрабуе доказу. Тэрмін Н. у матэматыцы ўжываецца амаль заўсёды ў сувязі са славутай праблемай пятага Н. Эўкліда (гл. *Пачаткі геаметрыі*). Праблема пятага Н. палягае ў высвятленні яго сувязі з іншымі Н. і аксіёмамі. Шматлікія спробы матэматыкаў даказаць пяты Н. як тэарэму на падставе іншых настулатаў і аксіём былі няўдалымі. Праблему пятага Н. развязаў М.Лабачэўскі (1826). Галоўныя высновы, да якіх ён прыйшоў: 1) пяты Н. не залежыць ад іншых Н. і аксіём і не можа быць даказаны як тэарэма; 2) існуе геаметрыя іншая, чым геаметрыя Эўкліда, у якой пяты Н. замяняецца яго адмаўленнем, — *Лабачэўскага геаметрыя*.

НАТРО́ЙНЫ ІНТЭГРА́Л — вызначаны інтэграл ад функцыі, зададзенай у нейкім абсягу трохмернай прасторы. Н.і. Рымана ўводзіцца на аснове меры Жардана μ. Няхай f: $E \to R$ зададзена на вымерным паводле Жардана мностве $E \subset R^3$. Падзелім мноства E на n вымерных паводле Жардана частковых мностваў E_i такіх, што $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = E$ і $\mu(E_i \cap E_j) = 0$ пры $i \ne j$. Велічыню $\Lambda = \max_i d(E_i)$, дзе $d(E_i)$ — дыяметр мноства E_i, называем дыяметрам падзелу. У кожным з мностваў E_i возьмем адвольны пункт (x_i, y_i, z_i) і створым інтэгральную суму Рымана $\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\mu(E_i)$. Калі пры $\Lambda \to 0$ інтэгральныя сумы σ маюць ліміт, незалежны ад выбару пунктаў (x_i, y_i, z_i), то гэты ліміт называецца патройным інтэгралам ад функцыі $f(x, y, z)$ на мностве E і абазначаецца сімвалам $\iiint_E f(x, y, z)\,dxdydz$.

Для існавання П.і. дастаткова, напрыклад, каб мноства E было замкнёным кубавальным абсягам, а функцыя f была непарыўная ў E. П.і. ад абмежаваных функцый мае аналагічныя ўласцівасці, што і *Рымана інтэграл* на адрэзку $[a, b]$.

Пры вылічэнні П.і. яго звычайна пераўтвараюць да паўторнага інтэграла. Калі $E \subset R^3$, E_{xy} — праекцыя мноства E на плоскасці xOy, а функцыі $\varphi(x, y)$ і $\psi(x, y)$, $(x, y) \in E_{xy}$ такія, што мноства E абмежаванае на восі Oz іх графікамі, г.зн.

$$E = \{(x, y, z) \in R^3: (x, y) \in E_{xy},\ \varphi(x, y) \le z \le \psi(x, y)\},$$

то

$$\iiint\limits_E f(x, y, z)\,dxdydz = \iint\limits_{E_{xy}} dxdy \int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z)\,dz.$$

Калі праекцыяй мноства E на вось Ox ёсць адрэзак $[a, b]$, а $E(x)$ — сечыва мноства E плоскасцю, якая праходзіць праз пункт x і паралельна плоскасці yOz, то

$$\iiint\limits_E f(x, y, z)\,dxdydz = \int\limits_a^b dx \iint\limits_{E(x)} f(x, y, z)\,dydz.$$

Адзін з асноўных метадаў вылічэння П.і. — метад замены зменных.

П.і. ад функцыі $f \equiv 1$ па абсягу E роўны аб'ёму гэтага абсягу, г.зн. $\iiint\limits_E dxdydz = \mu(E)$ — геаметрычны сэнс П.і. Калі падынтэгральная функцыя f мае спецыяльны выгляд, П.і. можна пераўтварыць да паверхневага з дапамогай *Астраградскага формулы*.

ПАТЭНЦЫ́ЙНАЯ БЯСКО́НЦАСЦЬ — уяўленне пра бясконцасць, сутнасць якога ў наступным. Разглядаецца бясконцая сукупнасць аб'ектаў зыходзячы з працэсаў будавання гэтых аб'ектаў. Прыкладам П.б. служыць бясконцасць натуральнай паслядоўнасці, якая разглядаецца як працэс паэтапнага стварэння натуральных лікаў шляхам пераходу ад n да $n + 1$, пачынаючы з нуля. Ідэя П.б. узнікае пры ўяўным абстрагаванні ад рэальных перашкод для будавання аб'ектаў, г.зн. у выніку абстракцыі патэнцыйнай здзяйсняльнасці. Паняццю П.б. супрацьпастаўляецца паняцце *актуальнай бясконцасці*.

ПАТЭНЦЫЯВА́ННЕ (ад ням. potenzieren — падвышаць да ступені, ад Potens — ступень) — дзеянне, сутнасць якога ў знаходжанні ліку па дадзеным *лагарыфме* гэтага ліку.

ПАТЭНЦЫ́ЯЛ (ад лац. potentia — сіла), патэнцыяльная функцыя — паняцце, якое характарызуе шырокі клас сілавых палёў (электрычнае, гравітацыйнае і г.д.) і наогул палі фізічных велічынь, што задаюцца вектарамі (напрыклад, поле хуткасцяў і г.д.). У агульным выпадку П. вектарнага поля $\boldsymbol{a}(x, y, z)$ — скалярная функцыя $u(x, y, z)$ такая, што $\boldsymbol{a} = \mathbf{grad}\, u$, г.зн.

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial x},\quad a_y = \frac{\partial u}{\partial y},\quad a_z = \frac{\partial u}{\partial z},$$

дзе a_x, a_y, a_z — кампаненты поля $\boldsymbol{a}$ ў прамавугольнай сістэме каардынат $Oxyz$. Калі такая функцыя існуе, то вектарнае поле $\boldsymbol{a}$ называецца патэнцыяльным.

ПАТЭНЦЫЯ́ЛЬНАЕ ПО́ЛЕ, градыентавае поле, кансерватыўнае поле — вектарнае поле, утворанае градыентамі гладкай скалярнай функцыі $f(t)$ некалькіх зменных $t = (t^1, ..., t^n)$ з некаторага абсягу T n-мернай прасторы; адлюстраванне $(x, y, z) \mapsto \vec{F}(x, y, z)$ некаторага абсягу $D \subset \mathbf{R}^3$ у прастору $\mathbf{R}^3$, для якога існуе гэтак званы *патэнцыял*, г.зн. функцыя $U: D \to \mathbf{R}$ такая, што $\mathbf{grad}U \equiv \vec{F}$. Для П.п. выконваецца тоеснасць $\mathrm{rot}\vec{F} \equiv \mathbf{0}$, таму яно часам называецца безвіхорным. Калі $S \subset D$ — гладкая двухбаковая паверхня з кавалкава-гладкім краем ∂S, то на падставе *Стокса формулы*

$$\iint\limits_{(S)} \boldsymbol{n}\,\mathrm{rot}\vec{F} ds = \oint\limits_{\partial S} \vec{F} d\boldsymbol{r}$$

для П.п. мае месца роўнасць

$$\oint\limits_{\partial S} \vec{F} d\boldsymbol{r} = 0,$$

г.зн. павінна быць роўнай нулю *цыркуляцыя* (работа) поля $\vec{F}$ уздоўж краю кожнай двухбаковай паверхні $S \subset D$.

ПАТЭНЦЫЯ́ЛЬНАЯ ФУ́НКЦЫЯ — тое, што *патэнцыял*.

ПАЎГРУ́ПА — непустое мноства, на якім вызначана бінарная алгебраічная асацыятыўная аперацыя.

Прыклады П.: 1) мноства ўсіх натуральных лікаў з аперацыяй складання, а таксама розныя лікавыя мноствы з гэтай аперацыяй; 2) мноства ўсіх матрыц над асацыятыўным кольцам са складаннем або множаннем; 3) сукупнасць усіх пераўтварэнняў мноства M з аперацыяй кампазіцыі (множання) пераўтварэнняў — сіметрычная П.

Усякая П. з адзінкай G ізаморфна ўкладаецца ў сіметрычную П. на мностве G. Не кожная П. укла-

даецца ў групу. Неабходная ўмова ўкладальнасці — закон скарачэння: з кожнай з роўнасцяў $ac = bc$, $ca = cb$ вынікае $a = b$; выкананне закону скарачэння недастатковае для ўкладальнасці, але, напрыклад, камутатыўная П. з законам скарачэння ўкладаецца ў групу.

ПАЎІНВАРЫЯНТ, семіінварыянт — 1) адна з лікавых характарыстык размеркавання імавернасцяў выпадковай велічыні. П. азначаецца як каэфіцыенты x_k у раскладзе лагарыфма характарыстычнай функцыі $\varphi(t)$ выпадковай велічыні ξ у шэраг па ступенях зменнай t:

$$\ln \varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k!}(it)^k.$$

З уласцівасцяў характарыстычных функцый вынікае, што пры складанні незалежных выпадковых велічыняў іх адпаведныя П. складваюцца; 2) П. лініі другога парадку — сума двух вызначнікаў

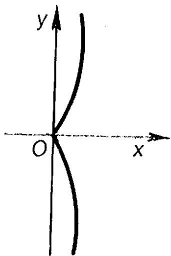
$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

агульнага раўнання 2-й ступені $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$, значэнне якой не мяняецца пры павароце восяў каардынат.

ПАЎІНТЭРВАЛ — гл. *Прамежкі лікавыя.*

ПАЎКОЛЦА — непустое мноства з дзвюма асацыятыўнымі бінарнымі алгебраічнымі аперацыямі «+» і «·» (складаннем і множаннем), звязанымі законамі дыстрыбутыўнасці: $a(b + c) = ab + ac$. Звычайна патрабуецца таксама *камутатыўнасць* складання і існаванне нуля, для якога $a + 0 = a$ пры ўсякім a. Найважнейшыя прыклады П. — колцы і дыстрыбутыўныя структуры. Прыклад П., якое не належыць ніводнаму з гэтых класаў, — мноства неадмоўных цэлых лікаў са звычайнымі аперацыямі складання і множання.

ПАЎКУБІЧНАЯ ПАРАБАЛА — плоская алгебраічная крывая 3-га парадку (рыс.). П.п. задавальняе раўнанне $y^2 - a^2x^3 = 0$; яе параметрычныя раўнанні: $x = t^2$, $y = at^3$. Мае пункт звароту 1-га роду ў пачатку каардынат. У.Нэйль знайшоў даўжыню яе дугі (1657). Пад уздзеяннем сілы цяжару матэрыяльны пункт рухаецца па дузе П.п. са сталай хуткасцю (Х.Гюйгенс, 1687).



ПАЎНЕПАРЫЎНАЯ ФУНКЦЫЯ — паняцце матэматычнага аналізу. Функцыя f: $E \to \mathbf{R}$, $E \in \mathbf{R}$, вызначаная ў пункце $x_0 \in E$, называецца П.ф., калі для кожнага $\varepsilon > 0$ існуе $\delta > 0$ такі, што з няроўнасці $|x - x_0| < \delta$ вынікае $f(x_0) - f(x) < \varepsilon$ (паўнепарыўнасць знізу) або $f(x) - f(x_0) < \varepsilon$ (паўнепарыўнасць зверху). П.ф. знізу і зверху — непарыўная функцыя. Некаторыя ўласцівасці П.ф. супадаюць з уласцівасцямі непарыўных функцый. Напрыклад, сума і здабытак П.ф. знізу ёсць таксама П.ф. знізу. Калі ўсе $u_n(x)$ неадмоўныя і П.ф. знізу, то і $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ — П.ф. знізу.

ПАЎНОРМА — канцая неадмоўная функцыя $p(x)$ на вектарнай прасторы X (над полем рэчаісных лікаў) такая, што $p(x + y) \le p(x) + p(y)$, $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ для ўсіх $x \in X$ і скаляраў λ. Прыкладам П. можа быць *норма*, адрозная тым, што для П. дапушчальна $p(x) = 0$, $x \ne 0$. Калі на вектарнай прасторы зададзеная П., а на яе падпрасторы — *лінейны функцыянал*, падпарадкаваны ўмове $|f| \le p$, то яго можна падоўжыць на ўсю прастору з захаваннем гэтай умовы (*Хана—Банаха тэарэма*). Ужываюцца аддзяляльныя тапалагічныя вектарныя прасторы, у якіх базіс наваколляў нуля можна ўтварыць з мностваў, вызначаных няроўнасцямі $p(x) < 1$, дзе $p(x)$ — непарыўная П. Такія прасторы называюць лакальна вынуклымі.

ПАЎПЛОСКАСЦЬ — мноства пунктаў плоскасці, якія знаходзяцца з аднаго боку ад нейкай простай — мяжы П. Простая падзяляе плоскасць на дзве П. Калі мяжа належыць П., то яна замкнёная, калі не належыць — адкрытая. Калі ў афіннай сістэме каардынат мяжа дадзеная раўнаннем $Ax + By + C = 0$, дык адкрытыя П. задаюцца няроўнасцямі $Ax + By + C < 0$ і $Ax + By + C > 0$, замкнёныя — адпаведнымі нястрогімі няроўнасцямі. Вось абцысаў дэкартавай прамавугольнай сістэмы каардынат падзяляе каардынатную плоскасць на верхнюю і ніжнюю П., вось ардынат — на левую і правую. У выніку каардынатная плоскасць падзяляецца на чатыры чвэрці (квадранты).

ПАЎПРАСТОРА — мноства пунктаў прасторы, якія знаходзяцца з аднаго боку ад пэўнай

плоскасці — мяжы прасторы. Плоскасць разбівае прастору на дзве П. Калі П. змяшчае мяжу, то яна з а м к н ё н а я, калі не — а д к р ы т а я. Калі ў афіннай сістэме каардынат плоскасць зададзеная раўнаннем $Ax + By + Cz + D = 0$, то адкрытыя П. задаюцца няроўнасцю $Ax + By + Cz + D < 0$ (або $Ax + By + Cz + D > 0$), замкнёныя П. — адпаведнымі нястрогімі няроўнасцямі. У дэкартавай прамавугольнай сістэме каардынат каардынатныя плоскасці падзяляюць прастору на 8 актантаў.

ПАЎПРО́СТАЕ КО́ЛЬЦА — кольца K з нулявым радыкалам (гл. *Радыкал*). Існуе мноства розных радыкалаў, таму такое азначэнне неадназначнае. У тэорыі асацыятыўных *артынавых кольцаў* п а ў п р о с т ы м называюць кольца без нільпатэнтных ідэалаў (з нулявым радыкалам Джэкабсана). Паводле тэорыі Ведэрберна—Артына, такое кольца ёсць канцая прамая сума поўных матрычных алгебраў канцага рангу над целам.

ПАЎПРО́СТАЯ — адна з дзвюх частак простай, на якія падзяляецца простая адвольным пунктам 0 гэтай простай. П. а д к р ы т а я, калі 0 не належыць ёй, і з а м к н ё н а я (п р а м е н ь), калі 0 належыць ёй. Калі на простай задаецца арыентацыя, то адвольны пункт 0 падзяляе простую на а д м о ў н у ю і д а д а т н у ю П. (адпаведна левую і правую).

ПАЎПРО́СТАЯ ГРУ́ПА — група, *радыкал* якой супадае з адзінкай. Такое азначэнне поўнасцю залежыць ад выбару радыкала. У тэорыі канцых групаў над радыкалам разумеюць найбольшую развязальную нармальную падгрупу. Апісанне названых класаў П.г. зводзіцца да апісання простых групаў.

ПАЎПРО́СТЫ МО́ДУЛЬ — тое, што *цалкам прыводны модуль.*

ПАЎТАРАЛІНЕ́ЙНАЯ ФО́РМА — адлюстраванне $f: V \times V \to K$, дзе V — вектарная прастора над целам K з азначаным на K антыаўтамарфізмам φ (г.зн. $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$), якое задавальняе ўмовы $f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y)$, $f(x, y_1 + y_2) = f(x, y_1) + f(x, y_2)$, $f(\lambda x, y) = \varphi(\lambda) f(x, y)$, $f(x, \lambda y) = f(x, y)\lambda$. П.ф., для якой з $f(x, y) = 0$ вынікае, што $f(y, x) = 0$, ёсць р э ф л е к с і ў н а я П.ф. Калі K — поле, φ — тоесны аўтамарфізм, то рэфлексіўная П.ф. называецца б і л і н е й н а й ф о р м а й. Білінейная форма называецца с і м е т р ы ч н а й (к о с а с і м е т р ы ч н а й), калі $f(x, y) = f(y, x)$ (адпаведна $f(x, y) = -f(y, x)$). Н е з в ы р о д н а я П.ф. ёсць форма, для якой з $f(a, y) = 0$ $(\forall y \in V)$ вынікае, што $a = 0$. Калі φ — інвалюцыя (г.зн. $\varphi^2 = 1$), а $f(x, y) = \varphi(f(x, y))$, то f называюць э р м і т а в а й П.ф. дастасоўна да інвалюцыі φ. Зафіксуем базіс $u_1, ..., u_n$ прасторы V. Матрыца $[a_{ij}]$, дзе $a_{ij} = f(u_i, u_j)$, $i, j = \overline{1, n}$, называецца матрыцай П.ф. у гэтым базісе.

ПАЎТО́РНАГА ЛАГАРЫ́ФМА ЗАКО́Н — адна з лімітавых тэарэм тэорыі імавернасцяў, якая пры пэўных умовах паказвае дакладны парадак росту сумаў незалежных выпадковых велічыняў пры павелічэнні колькасці складнікаў.

Няхай, напрыклад, выпадковыя велічыні x_1, x_2, ..., x_n, ... незалежныя і кожная з іх прымае два значэнні +1 і −1 з імавернасцямі 0,5 кожнае і няхай $S_n = x_1 + ... + x_n$. Тады для ўсякага $\delta > 0$ з імавернасцю, роўнай 1, праўдзіцца няроўнасць $S_n < (1 + \delta)\sqrt{2n \ln \ln n} \forall n$, $n > n_0$, n_0 — нейкі натуральны лік, і для бясконцай паслядоўнасці нумароў n выконваецца няроўнасць $S_n > (1 + \delta)\sqrt{2n \ln \ln n}$. Назоў П.л.з. тлумачыцца наяўнасцю множніка $\ln \ln n$. Першы вынік, які мае дачыненне да П.л.з., атрымаў А.Хінчын (1924).

ПАЎТО́РНЫ ІНТЭГРА́Л — адно з грунтоўных паняццяў інтэгральнага злічэння. Вылічэнне *падвойнага інтэграла*

$$I = \iint_D f(x, y)\,dxdy$$

ад функцыі $f(x, y)$ на абсягу D, абмежаваным простымі $x = a$, $x = b$ і крывымі $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ (пры пэўных абмежаваннях на функцыі f, φ_1, φ_2), зводзіцца да П.і. паводле формулы

$$I = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy \right) dx,$$

дзе пры вылічэнні нутранога інтэграла велічыня x лічыцца сталай. Праз П.і. можна вылічаць *патройны інтэграл* і іншыя *кратныя інтэгралы*.

ПАЧА́ТКІ ГЕАМЕ́ТРЫІ — сукупнасць геаметрычных паняццяў, дачыненняў паміж імі і асноўных уласцівасцяў гэтых дачыненняў, на падставе якіх будуецца тая або іншая *геаметрыя*. Упершыню выкладзеныя ў *«Пачатках» Эўкліда*. У другой палове 19 ст. у сувязі з адкрыццём неэўклідавых геаметрый П.г. крытычна перагледжаныя і пабудаваныя сучасныя, больш дакладныя сістэмы аксіём геаметрыі.

"ПАЧА́ТКІ" ЭЎКЛІ́ДА — навуковы твор, напісаны старажытнагрэцкім вучоным Эўклідам у 3 ст. да н.э. Адыгралі важную ролю ў гісторыі матэматыкі і навукі наогул. На працягу многіх стагоддзяў "П." Э. былі прыкладам строгага аксіяматычнага выкладання тэорыі і асновай падручнікаў па геаметрыі. Складаюцца з элементарнай геаметрыі, тэорыі лікаў, агульнай тэорыі адпаведнасцяў і метадаў вызначэння плошчаў і аб'ёмаў. У "П." Э. падведзеная рыса пад больш чым трохсотгадовай гісторыяй развіцця грэцкай матэматыкі.

Твор пачынаецца з азначэння асноўных геаметрычных паняццяў: пункта, простай лініі, паверхні і інш. Напрыклад, пункт — тое, што не мае частак; лінія — даўжыня без шырыні; простая — лінія, якая аднолькава размешчаная ў дачыненні да ўсіх сваіх пунктаў. Потым Эўклід фармулюе пастулаты і аксіёмы, якія апісваюць уласцівасці дачыненняў паміж асноўнымі паняццямі. У пастулатах (іх 5) дапускаецца выкананне наступных сцверджанняў: ад кожнага пункта і да кожнага іншага можна правесці простую; адрэзак простай можна неабмежавана прадоўжыць; з кожнага пункта адвольным радыусам можна правесці акружыну; усе прамыя вуглы роўныя паміж сабою; калі простая пры перасячэнні з дзвюма іншымі простымі ўтварае з імі нутраныя аднабаковыя вуглы, сума якіх меншая за два прамыя вуглы, гэтыя простыя перасякаюцца з таго боку, з якога сума вуглоў меншая. Далей фармулююцца аксіёмы, якія апісваюць дачыненні роўнасці і няроўнасці паміж велічынямі: роўныя аднаму і таму ж роўныя паміж сабою; калі да роўных дадаць роўныя, то атрымаюцца роўныя; калі ад роўных адняць роўныя, то застануцца роўныя; сумяшчальныя адно з адным — роўныя паміж сабою; цэлае большае за частку і інш. Пасля гэтага ў "Пачатках" фармулююцца і даказваюцца тэарэмы геаметрыі такім чынам, каб кожную тэарэму можна было даказаць на падставе пастулатаў, аксіём і ўжо даказаных тэарэм.

У творы адсутнічаюць некаторыя вынікі па тэорыі канічных сечываў і набліжаных вылічэнняў, аднак "П." Э. можна назваць энцыклапедыяй матэматычных ведаў сваёй эпохі. Твор складаецца з 13 кніг, быў перакладзены на арабскую, лацінскую, рускую мовы. "П." Э. значна паўплывалі на развіццё і выкладанне матэматыкі аж да 18 ст.

ПАЧАТКО́ВЫЯ ЎМО́ВЫ — умовы на развязкі дыферэнцыяльных раўнанняў (звычайных ці ў частковых вытворных) або іх сістэм, якія маюць дачыненне да аднаго і таго ж фіксаванага значэння незалежнай зменнай (гл. *Межавыя ўмовы*, *Краявыя ўмовы*). Часта пад П.ў. разумеюць умовы *Кашы задачы*.

ПАШЫРЭ́ННЕ — спецыяльная канструкцыя ў камбінаванай тэорыі групаў, якую ўпершыню зрабілі Г.Хігман, Дж.Нойман, К.Нойман. З яе дапамогай яны развязалі шэраг праблем тэорыі групаў.

ПАШЫРЭ́ННЕ ПО́ЛЯ K, н а д п о л е — адвольнае поле L, якое змяшчае ў сабе K; $K \supset L$; гл. *Поле*.

ПЕРАВА́ЛУ МЕ́ТАД — метад вылічэння асімптотыкі пры $\lambda \to +\infty$ інтэгралаў выгляду

$$F(\lambda) = \int_\gamma f(z) e^{\lambda S(z)} dz, \qquad (1)$$

дзе γ — разамкнёны контур у плоскасці камплекснай зменнай, а функцыі f і S — аналітычныя ў абсягу D, які змяшчае контур γ.

Нулі функцыі $S'(z)$ называюцца п у н к т а м і п е р а в а л у функцыі $S(z)$. Пункт перавалу — сядло паверхні $U = \operatorname{Re} S(z)$. Сутнасць П.м. палягае ў наступным. Контур γ гаматопна дэфармуецца ў абсягу D у контур $\tilde{\gamma}$ з тымі ж канцамі, што і ў γ, такі, што $\max\limits_{\tilde{\gamma}} \operatorname{Re} S(z)$ дасягаецца толькі ў пунктах перавалу або на канцах контуру $\tilde{\gamma}$ (перавальны контур). Асімптотыка інтэграла (1) па перавальным контуры вылічаецца з дапамогаю метаду Лапляса і роўная суме ўкладаў ад названых пунктаў максімуму. Уклад $Vz_0(\gamma)$ ад пункта z_0 — гэта інтэграл выгляду (1), узяты па малой дузе контуру γ, якая змяшчае пункт z_0. Калі z_0 — нутраны пункт контуру $\tilde{\gamma}$, а z_0 — пункт перавалу і $S''(z_0) < 0$, то

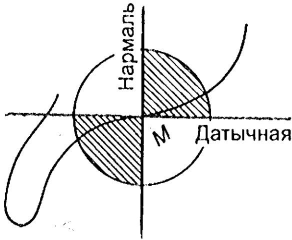
$$V_{z_0}(\lambda) = \sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda S''(z_0)}} \cdot e^{\lambda S(z_0)} \cdot \left[f(z_0) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right].$$

Для перавальнага контуру характэрна гэтак званая мінімальная ўласцівасць: на ім дасягаецца $\min\limits_{\gamma'} \max\limits_{z \in \gamma'} \operatorname{Re} S(z)$, дзе мінімум бярэцца на ўсіх контурах γ', якія знаходзяцца ў D і маюць тыя ж канцы, што і γ. Асноўная цяжкасць пры выкарыстанні П.м. — гэта адбор пунктаў перавалу, г.зн. выбар перавальнага контуру $\tilde{\gamma}$.

ПЕРАГІ́НУ ПУНКТ — пункт M плоскай крывой, у якім крывая мае адзіную датычную і ў дастаткова малой акрузе якога крывая размешчаная ўнутры адной пары вертыкальных вуглоў, утвораных датычнай і нармаллю (рыс.). Напрыклад,

для крывой, зададзенай раўнаннем $y = x^3$, П.п. ёсць пункт (0, 0).

Няхай крывая зададзеная раўнаннем $y = f(x)$. Калі функцыя $f(x)$ мае вытворную другога парадку ў нейкім наваколлі пункта x_0 і $(x_0, f(x_0))$ — П.п. разгляданай крывой, то $f''(x_0) = 0$. Калі $f(x)$ у



нейкім наваколлі пункта x_0 мае непарыўную вытворную парадку $k \geq 3$, прычым k — няцотнае, $f^{(n)}(x_0) = 0$, $n = 2, 3, ..., k-1$, $f^{(k)}(x_0) \neq 0$, то $(x_0, f(x_0))$ — П.п. графіка функцыі $y = f(x)$, калі і толькі калі x_0 ёсць канец інтэрвалу строгай выпукласці ўверх і адначасова канец інтэрвалу строгай выпукласці ўніз графіка гэтай функцыі.

ПЕРАЛІЧА́ЛЬНАЕ МНО́СТВА — тое, што *рэкурсіўна пералічальнае мноства.*

ПЕРАСТАЎЛЕ́ННЕ з *n* элементаў — конечная сукупнасць *n* розных элементаў, г.зн. размяшчэнне без паўтарэнняў з *n* элементаў па *n*. Лік П. роўны *n!*. Звычайна ў якасці элементаў П. бяруць элементы мноства $Z_n = \{1, 2, ..., n\}$; узаемна адназначнае адлюстраванне мноства Z_n на сябе вызначае П. $\pi = (\pi(1), \pi(2), ..., \pi(n))$.

ПЕРАСТАЎЛЯ́ЛЬНАСЦЬ — тое, што *камутатыўнасць.*

ПЕРАСЯЧЭ́ННЕ МНО́СТВАЎ — адна з асноўных аперацый з мноствамі. П.м. *A* і *B* называецца мноства, якое змяшчае тыя і толькі тыя элементы, якія належаць як мноству *A*, так і мноству *B*, г.зн. яно складаецца з усіх агульных для мностваў $A \cap B$ элементаў. П.м. $A \cap B$ абазначаецца сімвалам $A \cap B$. Напрыклад, няхай *A* — мноства ўсіх цотных лікаў, а *B* — мноства ўсіх лікаў, кратных 5, тады $A \cap B$ — мноства ўсіх лікаў, кратных 10.

ПЕРАЎТВАРЭ́ННЕ мноства *X* у мноства *Y* — *біектыўнае адлюстраванне X* на *Y*. У прыватнасці, пры *X*=*Y* атрымліваем П. мноства *X* у сябе. Прыклады П.: падстановы (*перастаўленні*) мностваў, розныя геаметрычныя П. (афінныя П., у прыватнасці рухі, канформавыя і іншыя адлюстраванні), ізамарфізмы алгебраічных аб'ектаў (напрыклад, групаў), інтэгральныя П. (напрыклад, П. Фур'е, П. Лапласа, П. Меліна).

ПЕРАЎТВАРЭ́ННЕ МА́ТРЫЦЫ, элементарнае пераўтварэнне матрыцы — множанне радка (слупка) матрыцы на адвольны не роўны нулю лік; дадаванне да аднаго радка (слупка) іншага, памножанага на адвольны лік; перастанова двух радкоў (слупкоў). Кожную квадратную матрыцу элементарнымі пераўтварэннямі можна прывесці да выгляду diag [1, ..., 1, 0, ..., 0], пры гэтым колькасць адзінак ёсць ранг матрыцы. П.м. не мяняюць яе рангу.

ПЕРАЎТВАРЭ́ННЯЎ ГРУ́ПА — *падстановаў група* (*G*, *M*), якая дзейнічае на мностве *M*. Калі на *M* вызначаная пэўная структура, а элементы групы *G* захоўваюць яе, то *G* называецца П.г., якая захоўвае гэтую структуру. Назоў П.г. звязаны з вызначанай на *M* структурай.

Напрыклад, калі *M* — вектарная прастора над целам *K*, то П.г., якая захоўвае гэтую структуру (г.зн. такая група (*G*, *M*), што $g(a + b) = g(a) + g(b)$, $g(\alpha a) = \alpha g(a)$, $\forall g \in G$, $\alpha \in K$, $a, b \in M$), называецца лінейнай групай: калі $M = K$ — поле, а *G* — група аўтамарфізмаў поля *K*, то *G* называецца *Галуа групай* пашырэння $K|L$, дзе *L* — поле элементаў з *K* нерухомых пры дзеянні пераўтварэнняў з *G*. П.г. адыгрываюць важную ролю ў розных раздзелах матэматыкі, асабліва ў геаметрыі. Прыклады П.г. у планіметрыі: група паваротаў вакол фіксаванага пункта, група рухаў плоскасці, група паралельных пераносаў. З кожнай фігурай на плоскасці звязана яе група сіметрыі (г.зн. група рухаў, якія пераводзяць фігуру ў сябе).

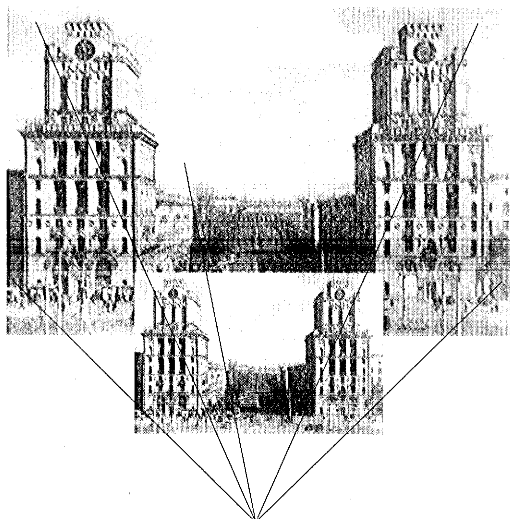
ПЕРАХО́ДНЫЯ ІМАВЕ́РНАСЦІ — імавернасці пераходу ад аднаго стану да іншага ў *Маркава ланцугу*. Няхай паслядоўнасць выпадковых велічыняў $x_0, x_1, ..., x_n$ прымае значэнні з мноства натуральных лікаў. Тады імавернасці $p\{x_n = j \mid x_{n-1} = i\}$ называюцца П.і. са стану *j* у стан *i* у аднародным ланцугу Маркава.

ПЕРПЕНДЫКУЛЯ́Р (ад лац. perpendicularis — стромы) да простай (плоскасці) — простая, якая перасякае дадзеную простую (плоскасць) пад *прамым вуглом.*

ПЕРПЕНДЫКУЛЯ́РНАСЦЬ — узаемнае размяшчэнне дзвюх простых, плоскасцяў ці простай і плоскасці, пры якім гэтыя фігуры ўтвараюць прамы вугал. Пры гэтым дзве такія простыя ў прасторы не павінны абавязкова перасякацца (гл.

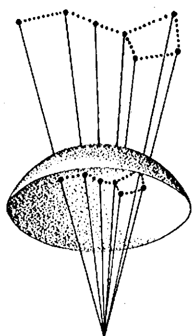
Крыжаваныя простыя). Простая l і плоскасць p узаемна перпендыкулярныя, калі l перпендыкулярная да ўсякай простай, якая ляжыць на p; дзве плоскасці ўзаемна перпендыкулярныя, калі пры перасячэнні яны ўтвараюць прамы *двюхграневы вугал*. П. уведзеная П.Эрыгонам (1634), абазначаецца знакам ⊥. Гл. таксама *Артаганальнасць*.

ПЕРСПЕКТЫ́ВА (франц. perspective, ад лац. perspicire — глядзець скрозь) — сістэма атрымання відарысаў аб'ёмных целаў на плоскасці або якой-небудзь іншай паверхні, якая ўлічвае іх прасторавую структуру і аддаленасць асобных іх частак ад



Рыс. 1

назіральніка. П. у геаметрыі — спосаб выяўлення фігур, заснаваны на выкарыстанні цэнтральнага праектавання (гл. *Нарысная геаметрыя*, *Праекцыя*). Каб атрымаць перспектыўнае адлюстраванне якога-небудзь прадмета на абраным пункце прасторы (ц э н т р П.), праводзяць промні да ўсіх пунктаў дадзенага прадмета. На шляху промняў ставіцца паверхня, у перасячэнні з якой атрымліваецца відарыс прадмета: л і н е й н а я П. — перспектыўнае выяўленне прадмета на плоскасці (рыс. 1); п а н а р а м н а я П. — на нутраной паверхні цыліндра; к ý п а л ь н а я П. — на нутраной паверхні сферы (рыс. 2). Перспектыўныя відарысы паралельных простых перасякаюцца ў гэтак званых п у н к т а х з б е г у, паралельных плоскасцяў — у л і н і я х з б е г у.



Рыс. 2

ПЕРШАІ́СНАЯ ф у н к ц ы і $f(x)$ — функцыя $F(x)$, вытворная якой для ўсіх x з пэўнага прамежку роўная зададзенай функцыі $f(x)$, г.зн. $F'(x) = f(x)$. Калі $F(x)$ — першаісная функцыі $f(x)$ на інтэрвале (a, b), то ўсякая П. на гэтым інтэрвале мае выгляд $F(x) + C$, дзе C — адвольная канстанта.

Сукупнасць усіх П. функцый $f(x)$ на інтэрвале (a, b) называецца *нявызначаным інтэгралам* і абазначаецца сімвалам $\int f(x)dx$. Паводле асноўнай тэарэмы матэматычнага аналізу, у кожнай непарыўнай на інтэрвале (a, b) функцыі $f(x)$ існуе на гэтым інтэрвале П. $F(x)$, якая выражаецца інтэгралам Рымана са зменнай верхняй мяжою, г.зн. $F(x) = \int_a^x f(t)dt,\ x \in (a,b)$. Калі зададзеная функцыя $f(x)$ абмежаваная на (a, b), то задача знаходжання яе П. развязваецца з дапамогай *Лебэга інтэграла*, а для адвольнай $f(x)$ — з дапамогай Данжуа інтэграла.

ПЕРШАІ́СНЫ КО́РАНЬ — 1) корань ступені m з адзінкі ў полі K; элемент $\xi \in K$ такі, што $\xi^m = 1$, аднак $\xi^r \neq 1$ для кожнага натуральнага ліку $r < m$. П.к. утварае цыклічную групу $\mu(m)$ парадку m каранёў з адзінкі.

Калі ў полі K існуе П.к. ступені m, то m — узаемна просты лік з характарыстыкай поля. Калі ξ ёсць П.к., то для кожнага натуральнага ліку r, узаемна простага з m, элемент ξ^r таксама ёсць П.к. Колькасць усіх П.к. ступені m роўная значэнню функцыі Ойлера $\varphi(m)$. У полі камплексных лікаў П.к. ступені m мае выгляд

$$\cos\frac{2pr}{m} + i\sin\frac{2\pi r}{m},\ 0 \le r \le m,$$

дзе r — узаемна просты лік з m; 2) П.к. п а м о д у л і m — цэлы лік q такі, што $q^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$, $q^\gamma \neq 1 \pmod m$, калі $1 \le \gamma \le \varphi(m) - 1$. Для П.к. q яго ступені $q^0, q^1, q^2, \ldots, q^{\varphi(m)-1}$ непараўнальныя паміж

сабою па модулі m і ўтвараюць прыведзеную сістэму рэштаў па модулі m.

П.к. існуе толькі для модуляў m выгляду $m = 2$, $4, p^{\alpha}, 2p^{\alpha}$, дзе $p > 2$ — просты лік. У гэтых выпадках мультыплікатыўныя групы класаў рэштаў па модулі m маюць найбольш простую будову; яны з'яўляюцца цыклічнымі групамі парадку $\varphi(m)$. З паняццем П.к. па модулі звязанае паняцце індэкса ліку па модулі m. П.к. для простых модуляў p упершыню разглядаў Л.Ойлер, аднак яго існаванне для кожнага простага модуля p даказаў К.Гаўс.

ПЕ́РШАСНАЕ ПАНЯ́ЦЦЕ — тое, што *неазначальнае паняцце.*

ПЕ́РШАЯ КВАДРАТО́ВАЯ ФО́РМА ПАВЕ́РХНІ — квадратовая форма якой-небудзь фундаментальнай формы паверхні. Няхай M — паверхня ў эўклідавай прасторы E^3, тады абмежаванне скалярнага здабытку вектараў з E^3 на кожную датычную прастору да M ёсць першая фундаментальная форма паверхні φ_1, якая з'яўляецца прыкладам рыманавай метрыкі на M. Адпаведная φ_1 квадратовая форма ёсць якраз П.к.ф.п.

Няхай паверхня M задаецца параметрычным раўнаннем $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$, тады ў базісе $\{\partial_u \boldsymbol{r}, \partial_v \boldsymbol{r}\}$ датычнай прасторы да M матрыца φ_1 ёсць $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$, дзе $E = (\partial_u \boldsymbol{r})^2$, $F = \partial_u \boldsymbol{r} - \partial_v \boldsymbol{r}$, $G = (\partial_v \boldsymbol{r})^2$. П.к.ф.п. з'яўляецца дадатна вызначанай квадратовай формай ($EG - F^2 > 0$) і характарызуе метрычныя ўласцівасці паверхні. З дапамогай φ_1 магчыма вылічаць даўжыні дугаў на паверхні. П.к.ф.п. інварыянтная ў дачыненні да выгінання паверхні. Поўная (гаўсава) крывіня паверхні можа быць выражаная праз каэфіцыенты толькі П.к.ф.п. і іх вытворныя (т э а р э м а Г а ў с а).

ПЕ́РШАЯ КРАЯВА́Я ЗАДА́ЧА — тое, што *Дырыхле задача.*

ПЕ́РШЫ ІНТЭГРА́Л — вызначаецца для сістэмы дыферэнцыяльных раўнанняў

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \ldots, x_n), (t, x_1, \ldots, x_n) \in D \qquad (1)$$

як дыферэнцавальная функцыя $U: D \to \mathbf{R}$, якая адрозніваецца ад сталай функцыі, але для яе функцыя $t \mapsto U(t, x_1(t), \ldots, x_n(t))$ сталая на кожным развязку $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ сістэмы (1). П.і. сістэмы (1) называюць таксама і стасунак $U(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) = C$, дзе C — канстанта, U — П.і. у вышэй вызначаным сэнсе. Функцыя U ёсць П.і. сістэмы (1), калі і толькі калі праўдзіцца тоеснасць

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x_1} f_1 + \ldots + \frac{\partial U}{\partial x_n} f_n \overset{t,x}{\equiv} 0.$$

Звычайна разглядаюць стацыянарныя П.і., якія не залежаць ад t. Прыродазнаўча-навуковы сэнс такіх П.і. — з а к о н ы з а х а в а н н я. Калі мы ведаем r незалежных П.і. сістэмы (1), то яе парадак мы зможам знізіць на r адзінак. Сукупнасць з n незалежных П.і. сістэмы (1) ёсць а г у л ь н ы і н т э г р а л сістэмы (1) (гл. *Агульны развязак дыферэнцыяльнага раўнання*).

ПЕРЫ́МЕТР (грэц. perimetron — акружына, ад perimetreo — вымяраю вакол) — даўжыня замкнёнага контуру. Напрыклад, П. трохвугольніка і многавугольніка ёсць сума даўжыняў усіх старон.

ПЕРЫ́ЯД (ад грэц. periodos — абыход, кругаварот) — 1) П. д р о б у — пэўная група лічбаў у дзесятковым запісе ліку, якая, пачынаючы з нейкага месца, паслядоўна паўтараецца (гл. таксама *Перыядычны дроб*); 2) П. ф у н к ц ы і — гл. *Перыядычная функцыя.*

ПЕРЫЯДЫ́ЧНАЯ ГРУ́ПА — група G, кожны элемент g якой мае канцы парадак (г.зн. існуе такі цэлы дадатны лік, што $g^n = 1$). Кожная абэлева П.г. ёсць прамая сума прымарных групаў (г.зн. групаў, кожны элемент якіх мае парадак p^m, дзе p — просты лік).

ПЕРЫЯДЫ́ЧНАЯ ФУ́НКЦЫЯ — функцыя, значэнне якой не змяняецца, калі дадаць да аргумента пэўны (адрозны ад нуля) лік, гэтак званы п е р ы я д ф у н к ц ы і: $f(x + T) = f(x)$. Напрыклад, $\sin(x + 2\pi) = \sin x$; $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$ (перыяды адпаведна 2π і π). Кожная непарыўная П.ф. мае бясконцае мноства перыядаў выгляду kT ($k = \pm 1$, $\pm 2, \ldots$), дзе T — найменшы перыяд. Сума, здабытак і дзель П.ф. з аднолькавымі перыядамі — таксама П.ф. Вытворная да П.ф. — П.ф. з тым жа перыядам, інтэграл ад П.ф. $f(x)$ з перыядам T ёсць П.ф. (з тым жа перыядам) толькі ў выпадку, калі $\int_0^T f(x)dx = 0$. Сума П.ф. з несувымернымі перыядамі належыць да *амаль перыядычных функцый.* П.ф. шырока выкарыстоўваецца ў фізіка-тэхнічных навуках, у прыватнасці пры вывучэнні вагальных працэсаў.

ПЕРЫЯДЫ́ЧНЫ ДРОБ — бясконцы дзесятковы дроб, у якім, пачынаючы з нейкага месца,

перыядычна паўтараецца пэўная група лічбаў (*перыяд*). Дроб называецца чыста П.д., калі яго перыяд пачынаецца адразу пасля коскі, напрыклад 7,9797... (скарочана 7,(97), чытаецца "сем і 97 у перыядзе"), і змяшаным П.д., калі паміж коскай і першым перыядам ёсць адна або некалькі лічбаў, напрыклад 9,72525..., г.зн. 9,7(25). Усякі П.д. — рацыянальны лік, усякі рацыянальны лік пры пераўтварэнні ў дзесятковы дроб дае концы дроб ці П.д. Кожны П.д. можна пераўтварыць у звычайны дроб.

ПЕРЫЯДЫ́ЧНЫ РАЗВЯ́ЗАК з в ы ч а й н а г а д ы ф е р э н ц ы я л ь н а г а р а ў н а н н я — развязак, які з'яўляецца *перыядычнай функцыяй* незалежнай зменнай. Задача знаходжання П.р. развязаная толькі для раўнанняў спецыяльнага выгляду.

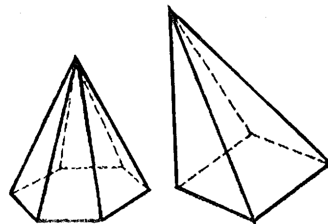
ПІ, л і к π — абазначэнне дзелі даўжыні акружыны на яе дыяметр. Лік π ірацыянальны, г.зн. можа быць запісаны ў выглядзе бясконцага неперыядычнага дзесятковага дробу: π = =3,14159265358979323862643...

Лік π быў вядомы ў глыбокай старажытнасці. Егіпцяне (другое тысячагоддзе да н.э.) карысталіся набліжаннем ліку π, роўным 3, ці больш дакладным 3,16049... Архімед (3 ст. да н.э.) вылічаў лік π метадам параўнання даўжыні акружыны з перыметрам правільных акрэсленых і ўмежаных многавугольнікаў. Ён адкрыў, што π знаходзіцца паміж $3\frac{10}{71}$ і $3\frac{1}{7}$. Лік π звязаны не толькі з геаметрычнымі задачамі. Часам вылічэнне лімітаў нейкіх паслядоўнасцяў прыводзіць да гэтага ж ліку π. Напрыклад, шэраг Ляйбніца $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...$ збежны і сума яго роўная $\frac{\pi}{4}$. У неэўклідавых геаметрыях лік π таксама ўдзельнічае ў пэўных формулах. Але тут π не ёсць дзель даўжыні акружыны на яе дыяметр, бо ў неэўклідавай геаметрыі гэтая дзель не ёсць сталая. Таму важна мець аналітычнае азначэнне ліку π. Л.Ойлер аналітычна атрымаў формулу $e^{2\pi i}=1$. У канцы 18 ст. Ё.Ламбэрт і А.Лежандр даказалі ірацыянальнасць ліку π. У 1882 г. Ф.Ліндэман даказаў, што лік π трансцэндэнтны, г.зн. не задавальняе ніякае алгебраічнае раўнанне з цэлымі каэфіцыентамі.

ПІ́КА ФО́РМУЛА — формула для вылічэння плошчы S многавугольніка, усе вяршыні якога знаходзяцца ў вузлах квадратных кратаў. П.ф. мае выгляд $S=i+\frac{b}{2}-1$, дзе i — колькасць вузлоў кратаў, якія трапілі ўнутр многавугольніка, b — колькасць яе вузлоў на мяжы. П.ф. знайшоў аўстрыйскі матэматык Г.Пік (1899).

ПІКА́РА ТЭАРЭ́МА — тэарэма, даказаная Э.Пікарам (1879), згодна з якой у кожным наваколлі *істотна асаблівага пункта* аналітычная функцыя прымае адвольнае камплекснае значэнне, акрамя, магчыма, аднаго вылучанага.

ПІРАМІ́ДА (ад грэц. pyramis (pyremidos)) — мнагаграннік, у якога адна з граняў — а с н о в а П., астатнія (б а к а в ы я) грані — трохвугольнікі з агульнай вяршыняй, якая з'яўляецца в я р ш ы н я й П. (рыс.). У залежнасці ад колькасці бакавых граняў П. падзяляюцца на т р о х в у г о л ь н ы я, ч а т ы р о х в у г о л ь н ы я П. і г.д. В ы ш ы н я П. — перпендыкуляр з вяршыні П. на



яе аснову. Аб'ём П. вылічаецца па формуле $V=\frac{1}{3}S\cdot h$, дзе S — плошча асновы, h — вышыня. П. п р а в і л ь н а я, калі ў аснове яе ляжыць правільны многавугольнік і вышыня П. праходзіць праз цэнтр асновы. Бакавыя грані правільнай П. — роўныя паміж сабой роўнабаковыя трохвугольнікі; вышыня кожнага з іх — *апафема* правільнай П. (апафема асновы П. — праекцыя апафемы П. на плоскасць асновы). З П., рассечанай на дзве часткі плоскасцю, паралельнай аснове, атрымліваюцца П., падобная на дадзеную, і с с е ч а н а я П.

ПІ́РСАНА РАЗМЕРКАВА́ННЕ — сям'я размеркаванняў імавернасцяў, шчыльнасці $y=p(x)$ якіх задавальняюць дыферэнцыяльнае раўнанне

$$y'=\frac{x+a}{b_0+b_1x+b_2x^2}\,y,$$

дзе a, b_0, b_1, b_2 — рэчаісныя лікі. Сям'я складаецца з 12 тыпаў размеркаванняў і *нармальнага* размеркавання. Прыклады П.р. — *Ст'юдэнта размеркаванне*, *хі-квадрат размеркаванне.*

П.р. адназначна вызначаюць па яго першых чатырох момантах, чым карыстаюцца на практыцы. Для незалежных вынікаў назіранняў з невядомай шчыльнасцю размеркавання вылічаюць першыя чатыры выбаркавыя моманты. Затым вызначаюць тып П.р. і *момантаў метадам* знаходзяць значэнні невядомых параметраў шуканага П.р. Упершыню П.р. дастасаваў для набліжанага выяўлення эмпірычнага размеркавання англельскі матэматык К.Пірсан (1894).

ПІФАГО́РА ТЭАРЭ́МА — тэарэма геаметрыі, якая паказвае сувязь паміж даўжынямі старон прамавугольнага трохвугольніка: квадрат гіпатэнузы прамавугольнага трохвугольніка роўны суме квадратаў катэтаў. Правільная і адваротная тэарэма: калі квадрат стараны трохвугольніка роўны суме квадратаў дзвюх іншых яго старон, то гэты трохвугольнік прамавугольны. Першапачаткова П.т. вызначала дачыненні паміж плошчамі квадратаў, пабудаваных на гіпатэнузе і катэтах прамавугольнага трохвугольніка: квадрат, пабудаваны на гіпатэнузе, роўнавялікі суме квадратаў, пабудаваных на катэтах. П.т., магчыма, была вядомая да Піфагора (6 ст. да н.э.), аднак яму прыпісваюць яе доказ у агульным выглядзе.

ПЛ / 1 (*PL* / 1 — скарачэнне ад англельскіх слоў Programming Language One) — мнагамэтавая *праграмавання мова*, прызначаная для апісання на кампутарах алгарытмаў развязку вылічальных і лагічных задач, задач апрацоўкі звестак, а таксама для распрацоўкі сістэм *праграмнага забеспячэння* кампутараў. З'явілася ў сярэдзіне 1960-х гг. (стандарт мовы надрукаваны ў 1976 г.). ПЛ / 1 аб'яднала ў сабе паняцці і сродкі моваў праграмавання *фартран*, *кабол*, *алгол-60*. У той жа час у ёй знайшлі адлюстраванне многія новыя ідэі ў праграмаванні, а таксама асаблівасці аперацыйнай сістэмы вылічальных машын амерыканскай фірмы IBM. У выніку была атрыманая вялікая і складаная мова, не ўспрынятая іншымі ствральнікамі вылічальнай тэхнікі.

ПЛАНІМЕ́ТРЫЯ (ад лац. planum — паверхня, плоскасць + metreo — мераю) — частка *элементарнай геаметрыі*, у якой вывучаюцца ўласцівасці фігур на плоскасці. Пад П. разумеюць таксама і частку курса *геаметрыі* ў сярэдняй школе.

ПЛАСТО́ВАСЦЬ на мнагастайнасці (ці на дыферэнцавальнай мнагастайнасці) M — падзел гэтай мнагастайнасці на лінейна злучныя падмноствы (пласты) такі, што M накрывае лакальнымі картамі (u_i, φ_i) з каардынатамі $(x_i^1,\ldots,x_i^n)$, для якіх злучныя кампаненты нерасячэнняў пластоў з абсягам u_i (лакальныя пласты) задаюцца ўмовамі $x_i^{p+1}=0,\ldots,x_i^n=0$. Лік $p(0\le p\le n)$ называецца памернасцю П., а лік $q=n-p$ — яго супамернасцю. Пласты дыферэнцавальнай П. — гэта падмнагастайнасці памернасці p.

ПЛАТО́НА ГРАФ — *граф Платона цела*. Вяршынямі і кантамі П.г. з'яўляюцца вяршыні і канты адпаведнага мнагагранніка.

ПЛАТО́НА ЦЕ́ЛА — тое, што *правільны мнагаграннік*.

ПЛО́СКАСЦЬ, паверхня першага парадку — алгебраічная паверхня, якая задаецца ў дэкартавай сістэме каардынат раўнаннем 1-й ступені

$$Ax+By+Cz+D=0, \qquad (1)$$

дзе $A, B, C, D\in\mathbf{R}$, $A^2+B^2+C^2\neq 0$. Часам бываюць карыснымі іншыя спосабы задання П.: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ (раўнанне П. у адрэзках); $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ (раўнанне П., якая праходзіць праз пункт $M(x_0,y_0,z_0)$ перпендыкулярна нармальнаму вектару $N(A,B,C)$);

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

(раўнанне П., якая праходзіць праз тры зададзеныя пункты $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$, што не ляжаць на адной простай).

Калі дзве плоскасці зададзеныя ў выглядзе (1) і (A_1,B_1,C_1), (A_2,B_2,C_2) — іх нармальныя вектары, то вугал φ паміж плоскасцямі можна знайсці з раўнання

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Роўнасць $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$ — умова перпендыкулярнасці плоскасцяў, а роўнасць $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$ — умова іх паралельнасці. Раўнанні П. і розныя задачы значна спрашчаюцца, калі перайсці да вектарнай формы запісу. Упершыню раўнанне П. з'явілася ў А.Клеро (1731).

ПЛО́СКАЯ КРЫВА́Я — крывая, усе пункты якой ляжаць у адной плоскасці. Параметрызацыя П.к. (плоскі шлях) — непарыўнае адлюстраванне адрэзка $[a, b]$ лікавай восі ў плоскасць.

Два шляхі $\varphi: [a, b] \to \mathbf{R}^2$ і $\psi: [c, d] \to \mathbf{R}^2$ называюць эквівалентнымі, калі існуе гомеамарфізм τ $[a, b] \to [c, d]$ такі, што $\varphi = \psi \circ \tau$. П.к. называецца клас эквівалентных плоскіх шляхоў. Плоскі шлях называецца жарданавым, калі $x_1 \neq x_2 \Rightarrow \varphi(x_1) \neq \psi(x_2)$. П.к. называецца жарданавай (або простай), калі яна з'яўляецца класам эквівалентных простых шляхоў. Для крывых магчыма іншае азначэнне: жарданава П.к. ёсць гамеаморфны вобраз адрэзка (або акружыны) пры яго адлюстраванні ў плоскасць.

ПЛО́ШЧА ў геаметрыі — велічыня часткі плоскасці або іншай паверхні, занятай геаметрычнай фігурай. Вымярэнне П. — адна з задач практыўнай геаметрыі яшчэ ў старажытнасці. Вылічыць П. фігуры — значыць параўнаць яе з пэўнай П., прынятай за адзінку (напрыклад, м^2, га). П. прамавугольніка роўная здабытку даўжыняў двух сумежных бакоў. Вымяраюць П. многавугольніка, дзелячы яго на прамавугольнікі. П. адвольнай плоскай фігуры вызначаецца як ліміт, да якога імкнецца П. акрэсленага і ўмежанага многавугольнікаў пры неабмежаваным змяншэнні даўжыняў іх бакоў. Каб вызначыць П. фігуры на крывой паверхні, яе падзяляюць на крывалінейныя чатырохвугольнікі, якія праектуюцца на датычную плоскасць, і вылічаецца сума П. праекцый. Ліміт гэтай сумы пры неабмежаваным здрабненні падзелу фігуры роўны П. фігуры.

ПЛЫНЬ — 1) прыватны выпадак *дынамічнай сістэмы*; 2) П. у сетцы — функцыя f, якая ставіць у адпаведнасць кожнай дузе (x, y) сеткі пэўны лік $f(x, y)$. Сетка (концы арыентаваны граф), кожнай дузе (x, y) якой прыпісаны неадмоўны рацыянальны лік $C(x, y)$ — прапускная здольнасць дугі; 3) П. вектарнага поля $\boldsymbol{a}$ — адно з паняццяў *вектарнага аналізу*. П. праз паверхню σ выражаецца з дакладнасцю да знака паверхневым інтэгралам

$$\iint_\sigma (\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})d\sigma = \iint_\sigma (a_x dydz + a_y dxdz + a_z dxdy),$$

дзе $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\boldsymbol{n}$ — адзінкавы вектар нармалі да паверхні σ (лічыцца, што змяненне вектара $\boldsymbol{n}$ на паверхні σ непарыўнае). Для поля хуткасцяў, часцінак вадкасці П. роўная колькасці вадкасці, якая працякае за адзінку часу праз паверхню σ. Паняцце і тэрмін П. увёў Дж.Максўэл (1873). Гл. таксама *Вектарнае поле.*

ПО́ЛЕ — мноства, якое змяшчае не меней як два элементы і на якім зададзеныя дзве алгебраічныя аперацыі (складанне і множанне; абедзве камутатыўныя і асацыятыўныя), звязаныя паміж сабою законам дыстрыбутыўнасці, г.зн. для ўсіх a, b, c з П. выконваецца $a + b = b + a$, $ab = ba$, $(a + b) + c = a + (b + c)$, $(ab)c = a(bc)$, $(a + b)c = ac + bc$. Акрамя таго, існуе нулявы элемент (нуль) такі, што заўсёды $a + 0 = a$; для кожнага a існуе процілеглы элемент $-a$ такі, што $a + (-a) = 0$; таксама існуе адзінка e, для якой $ae = a$; для кожнага $a \neq 0$ — адваротны элемент a^{-1} такі, што $aa^{-1} = e$. Адсюль вынікае, што ў П. магчымыя аперацыі адымання і дзялення на ненулявы элемент. Такім чынам, П. ёсць абэлева група па складанні (адытыўная група П.), а ўсе ненулявыя элементы П. — абэлева група ў дачыненні да множання (мультыплікатыўная група П.). Класічныя прыклады П. — мноствы ўсіх рацыянальных лікаў $\mathbf{Q}$, усіх рэчаісных лікаў $\mathbf{R}$, усіх камплексных лікаў $\mathbf{C}$, мноства $K(x)$ усіх рацыянальных функцый з каэфіцыентамі з адвольнага поля K. Мноства лікаў $a + b\sqrt{2}$, дзе a і b — адвольныя рацыянальныя лікі, — таксама П. Існуюць П. з концай колькасцю элементаў — гэтак званыя *Галуа палі.*

Характарыстыка П. — найменшы цэлы дадатны лік n (калі ён існуе) такі, што $a + ... + a = 0$ для адвольнага элемента a, або (калі такога ліку n не існуе) кажуць, што П. мае характарыстыку нуль. Характарыстыка П. заўсёды нуль ці просты лік. У П. не існуе дзельнікаў нуля. Кожнае П. — простае кольца, г.зн. не змяшчае ў сабе ўласных ідэалаў. Наадварот, кожнае ненулявое асацыятыўнае камутатыўнае простае кольца з адзінкай ёсць поле. П. называецца простым, калі яно не змяшчае падпалёў, г.зн. такіх падмностваў, якія самі з'яўляюцца П. у дачыненні да тых жа аперацый складання і множання (гл. *Простае поле*). Калі P — падполе ў полі R, то R называецца пашырэннем поля P. Адвольнае П. умяшчае дакладна адзінае простае падполе, якое з'яўляецца П. рацыянальных лікаў у выпадку характарыстыкі нуль ці П. рэштаў па модулі p (г.зн. П. Галуа F_p) у выпадку простай характарыстыкі p.

Адна з магчымасцяў агляду ўсіх П. — вывучэнне будовы пашырэнняў найменшага, г.зн. простага П. Сярод пашырэнняў дадзенага П. вылучаецца клас гэтак званых простых пашырэнняў, г.зн. пашырэнняў, утвораных з P далучэннем дакладна аднаго элемента. Магчымыя два тыпы простых пашырэнняў: простае алгебраічнае пашырэнне, калі да P далучыць корань непрыводнага над P палінома $f(x)$; у гэтым выпадку кожны элемент атрыманага пашырэння ёсць корань нейкага палінома з каэфіцыентамі з P, такія элементы называюцца алгебраічнымі над P; простае трансцэндэнтнае пашырэнне, якое з'яўляецца П. рацыянальных функцый з каэфіцыентамі з P ад некаторага неалгебраічнага над P элемента. Пашырэнне П. P называецца алгебраічным пашырэннем, калі ўсе яго элементы алгебраічныя над P; усе астатнія пашырэнні называюцца трансцэндэнтнымі пашырэннямі. Тэорыя П. узнікла ў сярэдзіне 19 ст. і звязаная з імёнамі Э.Галуа, Ж.Лагранжа, К.Гаўса і Р.Дэдэкінда. Назоў уведзены П.Дырыхле.

ПО́ЛЕ ІМАВЕ́РНАСЦЯЎ — тое, што *імавернасная прастора.*

ПО́ЛЕ РАСКЛА́ДУ палінома — найменшае поле, у якім знаходзяцца ўсе карані дадзенага палінома. Няхай $P_n(x)$ — паліном ступені n над полем K, тады П.р. палінома $P_n(x)$ — гэта поле $L \supset K$, у якім $P_n(x)$ раскладаецца на лінейныя множнікі: $P_n(x) = a(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_n)$, дзе $\alpha_i \in L$; $a \in K$ — старшы каэфіцыент $P_n(x)$, пры гэтым L утворана над K каранямі α_i; $L = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. П.р. заўсёды ёсць канцае алгебраічнае пашырэнне поля K; яно існуе (заўсёды адзінае) з дакладнасцю да ізамарфізму. Падобна ўводзіцца П.р. адвольнай сістэмы паліномаў. Пашырэнне L поля K нармальнае (гл. *Галуа тэорыя*), калі і толькі калі яно з'яўляецца П.р. нейкай сістэмы паліномаў над K.

ПОЛІАНАЛІТЫ́ЧНАЯ ФУ́НКЦЫЯ — камплексная функцыя $F(z,\bar z)$ незалежных камплексных зменных $z = x + iy$ і $\bar z = x - iy$, якая мае непарыўныя частковыя вытворныя па z і $\bar z$ да парадку m улучна ў абсягу D і задавальняе ўсюды ў D раўнанне $\frac{\partial^m F(z,\bar z)}{\partial \bar z^m} = 0$. Гэтае раўнанне ёсць абагульненне *Кашы—Рымана ўмовы*. П.ф. можна вызначыць як функцыю выгляду

$$F(z,\bar z) = \sum_{k=0}^{m-1} \bar z^k f_k(z),$$

дзе $f_k(z)$, $k = 0, 1, \dots, m-1$ — камплексныя аналітычныя ў D функцыі. Для таго каб функцыя $u = u(x,y)$ была рэчаіснай (або ўяўнай) часткай П.ф. $F = u + iv$, неабходна і дастаткова, каб u была *палігарманічнай функцыяй* у D.

ПОЛІГАРМАНІ́ЧНАЯ ФУ́НКЦЫЯ — функцыя $u : X \to R$ ($X \subset \mathbf{R}^n$), $n \geq 2$, якая мае непарыўныя частковыя вытворныя да парадку m улучна і задавальняе ўсюды ў X раўнанне $\Delta^m u = 0$, $m > 1$, дзе Δ — аператар Лапласа. Для таго каб функцыя $u(x, y)$ дзвюх зменных была П.ф., неабходна і дастаткова, каб яна была рэчаіснай (або ўяўнай) часткай поліаналітычнай функцыі. Пры $m = 2$ раўнанне $\Delta^2 u = 0$ называецца бігарманічным, а яго развязак — бігарманічнай функцыяй. Развязкі бігарманічнага раўнання маюць цесную сувязь з паняццямі, якія вывучаюцца ў тэорыі пругкасці, а інтэграванне бігарманічнага раўнання — адна з асноўных задач тэорыі пругкасці. Для бігарманічных функцый мае месца выяўленне $u(x,y) = \mathrm{Re}[\bar z\varphi(z) + \psi(z)]$, дзе φ, ψ — аналітычныя функцыі.

ПОЛІЛІНЕ́ЙНАЯ ФО́РМА — функцыя ад некалькіх элементаў вектарнай прасторы, лінейная па кожным аргуменце.

ПО́ЛЮС (лац. polus, ад грэц. polos — вось вярчэння) — 1) пункт перасячэння дыяметра сферы, перпендыкулярнага да плоскасці экватара, з паверхняю сферы; 2) П. палярнай сістэмы каардынат — яе пачатак; 3) П. функцыі — такі ізаляваны асаблівы пункт, дзе існуе бясконцы ліміт гэтай функцыі. Парадкам полюса $z = a$ функцыі $f(z)$ называецца парадак нуля функцыі $\frac{1}{f(z)}$. Калі ў пункце $z = a$ функцыя $f(z)$ мае П. парадку n, то галоўная частка шэрагу Лёрана для $f(z)$ у гэтым пункце змяшчае канцую колькасць (не болей за n) складнікаў. Пры гэтым наяўнасць складніка $c_n(z-a)^{-n}$ (для $a \neq \infty$) або $c_n z^n$ (для $a = \infty$) абавязковая.

ПО́ЎНАЙ ІМАВЕ́РНАСЦІ ФО́РМУЛА — стасунак для вылічэння безумоўнай імавернасці падзеі праз яе ўмоўныя імавернасці. Няхай дадзена імавернасная прастора (Ω, F, P) і няхай падзеі $A_1, A_2, \dots, A_n \in F$ утвараюць поўную групу падзей,

г.зн.: а) $\bigcup_{k=1}^{n} A_n = \Omega$; б) $A_i \cap A_k = \varnothing, i \neq k$; в) $P(A_k) > 0$, $k = \overline{1, n}$. Тады для кожнай падзеі $B \in F$ мае месца

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) \cdot P(B|A_k).$$

ПО́ЎНАСЦЬ — 1) П. у матэматычнай логіцы — уласцівасць сістэмы аксіём дадзенай тэорыі, якая характарызуе ступень ахопу гэтай тэорыяй таго або іншага раздзела матэматыкі. З інтуіцыйнага пункту гледжання сістэма аксіём лічыцца поўнай, калі з яе можна вывесці ўсе праўдзівыя сцверджанні той часткі матэматыкі, якая ствараецца ў выніку рэалізацыі дадзенай аксіяматычнай тэорыі.

Такое ўяўленне пра П. ужываецца толькі ў дачыненні да тых матэматычных тэорый, якія будуюцца з дапамогай змястоўнай (матэрыяльнай) аксіяматыкі, калі фіксуецца нейкая інтэрпрэтацыя гэтай тэорыі і значэнні зыходных, першапачатковых тэрмінаў гэтай тэорыі лічацца зададзенымі з самага пачатку. Да аксіяматыкі такога тыпу належыць, напрыклад, сістэма аксіём Эўкліда ў геаметрыі. Для такіх тэорый мае сэнс казаць як аб праўдзівасці іх сцверджанняў, так і аб вывядзенні іх з аксіём. Супадзенне гэтых двух паняццяў і азначае П. разгляданай сістэмы аксіём.

Калі матэматычная тэорыя будуецца як фармальная сістэма, г.зн. зыходныя, першасныя тэрміны не фіксуюцца, ім не надаецца ніякага змястоўнага сэнсу з самага пачатку, то кажуць пра П. у дачыненні да той ці іншай інтэрпрэтацыі: сістэма аксіём называецца поўнай у дадзенай інтэрпрэтацыі, калі з яе выводзяцца ўсе сцверджанні, праўдзівыя ў гэтай інтэрпрэтацыі. Разам з такім паняццем П. можна азначыць іншае, якое з'яўляецца нутраной уласцівасцю сістэмы аксіём і не залежыць ні ад якой яе інтэрпрэтацыі: сістэма аксіём называецца дэдукцыйна поўнай, калі кожнае сцверджанне гэтай тэорыі можа быць або даказана (г.зн. з'яўляецца тэарэмай), або абвергнута (г.зн. даказанае яе адмаўленне).

Два паняцці П. сістэмы аксіём цесна звязаныя паміж сабою. Калі аксіяматычная тэорыя поўная ў нейкай інтэрпрэтацыі, дык яна дэдукцыйна поўная. Наадварот, калі тэорыя дэдукцыйна поўная і несупярэчлівая ў дадзенай інтэрпрэтацыі, то яна поўная ў гэтай інтэрпрэтацыі.

Паняцце дэдукцыйнай (нутраной) П. ужываецца ў будаванні фармальных аксіяматычных сістэм. У сувязі з гэтым паняццем важнае значэнне мае *Гёдэля тэарэма пра поўнасць*, якая сцвярджае, што для дастаткова багатых фармальных сістэм патрабаванне П. несумяшчальнае з несупярэчлівасцю.

2) П. у тапалогіі — уласцівасць прасторы, якая палягае ў збежнасці паслядоўнасцяў, падпарадкаваных умове Кашы або яе абагульненням (гл. *Поўная прастора*).

ПО́ЎНАЯ АНАЛІТЫ́ЧНАЯ ФУ́НКЦЫЯ камплекснай зменнай — сукупнасць элементаў, атрыманых аналітычным працягам з якога-небудзь аднаго элемента ўздоўж усялякіх шляхоў, дзе гэта магчыма. Дзве П.а.ф. называюцца супадальнымі, калі яны маюць сама меней адзін супольны элемент. Аб'яднанне абсягаў, якія адпавядаюць усім элементам П.а.ф., называюць натуральным абсягам азначэння П.а.ф. Мяжа такога абсягу ўся складаецца з асаблівых пунктаў П.а.ф.

ПО́ЎНАЯ ВАРЫЯ́ЦЫЯ функцыі — тое, што *варыяцыя функцыі.*

ПО́ЎНАЯ ГРУ́ПА — тое, што *падзельная група.*

ПО́ЎНАЯ КРЫВІНЯ́ — тое, што *гаўсава крывіня.*

ПО́ЎНАЯ ЛІНЕ́ЙНАЯ ГРУ́ПА — група ўсіх абарачальных пераўтварэнняў вектарнай прасторы V намернасці n над целам K. Абазначаецца $GL(n, K)$ або $GL_n(K)$. Лік n называецца ступенню П.л.г. Калі зафіксаваць базіс прасторы V, то П.л.г. можна разглядаць як групу ўсіх незвыродных $n \times n$-матрыц над K (гл. таксама *Лінейная група*).

ПО́ЎНАЯ ПРАСТО́РА — метрычная прастора, у якой збягаецца кожная фундаментальная паслядоўнасць. Прыклады П.п. даюць *эўклідава прастора, гільбэртава прастора.* Кожнае замкнёнае падмноства П.п. само ёсць П.п. Няпоўную метрычную прастору можна дапоўніць да П.п. (як і ў выпадку дапаўнення мноства рацыянальных лікаў ірацыянальнымі да сукупнасці ўсіх рэчаісных лікаў). Існуюць абагульненні паняцця поўнасці.

ПО́ЎНАЯ СІСТЭ́МА РЭ́ШТАЎ па модулі m — усякі набор з m непараўнальных паміж сабою па модулі m цэлых лікаў. Звычайна выбіраюць лікі $0, 1, ..., m-1$, але часам і $0, 1, 0, \pm 1, ..., \pm\frac{m-1}{2}$ — у выпадку няцотнага m і лікі $0, \pm 1, ..., \pm\frac{m-2}{2}, \frac{m}{2}$ — у выпадку цотнага m.

ПО́ЎНАЯ СІСТЭ́МА ФУ́НКЦЫЙ — мноства $M \subset H$ функцый нейкай гільбэртавай прасторы H такое, што ў прасторы M не існуе функцыі (акрамя нулявой), артаганальнай да ўсіх функцый мноства M. Напрыклад, асноўная трыганаметрычная сістэма функцый $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, ...\}$ ёсць П.с.ф. у гільбэртавай прасторы $L_2[-\pi, \pi]$.

ПО́ЎНЫ ДЫФЕРЭНЦЫЯ́Л функцыі — азначаецца для $f: A \to \mathbf{R}$ вектарнага аргумента $x = (x_1, ..., x_n) \in A \subset \mathbf{R}^n$ у пункце x на вектары $h = (h_1, ..., h_n)$ як выраз $L(h)$, дзе $L: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ — лінейны функцыянал, які ўваходзіць у роўнасць

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - L(h)|}{|h|} = 0.$$

Калі такі функцыянал L існуе, то функцыя f называецца дыферэнцавальнай у пункце x, а сам функцыянал — вытворнай функцыі f у пункце x, г.зн. $L = f'(x)$. У гэтым выпадку мае месца роўнасць

$$Df(x)(h) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} h_1 + ... + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} h_n,$$

дзе $Df(x)(h)$ — П.д. f, $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ — яе частковая вытворная.

ПО́ЎНЫ ІНТЭГРА́Л раўнання — развязак $V(t, x, a_1, ..., a_n)$ раўнання

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(t, x, \frac{\partial V}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial V}{\partial x_n}\right) = 0, \ x = (x_1, ..., x_n), \quad (1)$$

які залежыць ад n незалежных параметраў $a_1, ..., a_n$ такім чынам, што для якабіяна праўдзіцца ўмова

$$\frac{\partial\left(\dfrac{\partial V}{\partial x_1}, ..., \dfrac{\partial V}{\partial x_n}\right)}{\partial(a_1, ..., a_n)} \neq 0.$$

Калі нам вядомы П.і. раўнання (1), то роўнасці

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = P_i, \ \frac{\partial V}{\partial a_i} = b_i \ (i = 1, ..., n)$$

задаюць $2n$ інтэгралаў кананічнай сістэмы

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}(t, x, p), \ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{dx_i}(t, x, p). \quad (2)$$

Калі функцыя Гамільтана не залежыць ад некаторых з каардынат $t, x_1, ..., x_n$ або калі якія-небудзь з гэтых каардынат могуць быць аддзеленыя, можна выявіць структуру П.і. раўнання (1) і тым самым знайсці развязкі кананічнай сістэмы (2), якая часта сустракаецца ў фізіцы, асабліва ў механіцы.

ПО́ЎНЫ ПРЫРО́СТ функцыі — для функцыі $f: A \to \mathbf{R}$ вектарнага аргумента $x = (x_1, ..., x_n) \in A \subset \mathbf{R}^n$ у пункце x на вектары $h = (h_1, ..., h_n)$ азначаецца як рознасць $f(x+h) - f(x)$. Частковымі прыростамі называюцца прырosты тыпу $f(x+h) - f(x)$, у якіх вектар h мае толькі адну не роўную нулю каардынату.

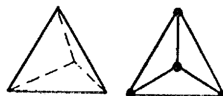
ПРА́ВАЯ ТРО́ЙКА НЕКАМПЛАНА́РНЫХ ВЕ́КТАРАЎ — тройка вектараў $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ і $\boldsymbol{c}$, упарадкаваная такім чынам, што з канца трэцяга вектара $\boldsymbol{c}$ паварот першага $\boldsymbol{a}$ да кірунку другога вектара $\boldsymbol{b}$назіраецца як рух супраць гадзіннікавай стрэлкі.

ПРА́ВІЛЬНАЯ ПІРАМІ́ДА — *піраміда*, у аснове якой *правільны многавугольнік* і вышыня праходзіць праз цэнтр асновы.

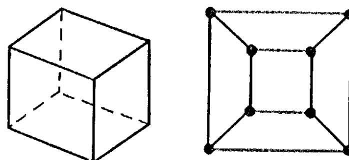
ПРА́ВІЛЬНАЯ ПРЫ́ЗМА — *прамая прызма*, у якой аснова — *правільны многавугольнік*.

ПРА́ВІЛЬНЫ ДРОБ — дроб выгляду $\dfrac{m}{n}$, у якога назоўнік большы за лічнік, напрыклад, 1/3, 19/99.

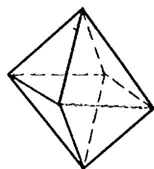
ПРА́ВІЛЬНЫ МНАГАГРА́ННІК, Платона цела — трохмерны выпуклы мнагаграннік, у якога ўсе грані — роўныя правільныя многавугольнікі, усе мнагагранневыя вуглы роўныя паміж сабою. Як даказаў Эўклід, існуюць 5 тыпаў П.м. (гл. рыс.): тэтраэдр (мае 4 грані), куб (6), актаэдр (8), дадэкаэдр (12), ікасаэдр (20). Усе П.м. (акрамя тэтраэдра) маюць цэнтр сіметрыі. Вакол усякага П.м. можна акрэсліць і ва ўсякі П.м. умежыць сферу. Правільны тэтраэдр дуальны сам сабе, куб — актаэдру, дадэкаэдр — ікасаэдру. Дуальнасць разумеем наступным чынам. Дуальны мнагаграннік P2 атрымліваецца з зыходнага P1, калі цэнтры граняў P1 выбраць у якасці вяршыняў

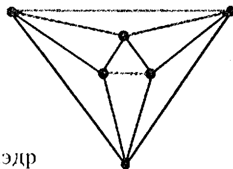


Тэтраэдр

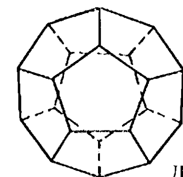


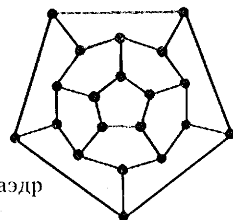
Куб



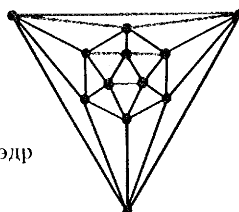


Актаэдр





Дадэкаэдр



Ікасаэдр

Р2 і злучыць пары цэнтраў сумежных граняў Р1 кантамі Р2. Для П.м. мае месца стасунак Ойлера $V+F-E=2$, дзе V, F, E — колькасць вяршыняў, граняў і кантаў адпаведна.

ПРА́ВІЛЬНЫ МНОГАВУГО́ЛЬНІК — *многавугольнік*, у якога ўсе вуглы роўныя. У прыватнасці, роўнастаронні трохвугольнік, квадрат — П.м. Ва ўсякі П.м. можна ўмежыць акружыну і акрэсліць яе вакол П.м. Радыус умежанай акружыны ёсць апафема П.м. Правільныя многавугольнікі з аднолькавай колькасцю старон падобныя адзін аднаму. У табліцы падаюцца даўжыні радыуса r умежанай акружыны, радыуса R акрэсленай акружыны і плошчы S для некаторых правільных n-вугольнікаў (a — даўжыня стараны П.м.).

n	r	R	S
3	$\frac{a\sqrt{3}}{6}$	$\frac{a\sqrt{3}}{3}$	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
4	$\frac{a}{2}$	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	a^2
5	$\frac{a}{10}\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$	$\frac{a}{10}\sqrt{10(5+\sqrt{5})}$	$\frac{a^2}{4}\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$
6	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	a	$\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$

ПРА́ВІЛЬНЫ ПУНКТ — тое, што *рэгулярны пункт*.

ПРА́ВІЛЬНЫ ТРОХВУГО́ЛЬНІК — тое, што *роўнастаронні трохвугольнік*.

ПРАВО́БРАЗ — для элемента b мноства Y пры адлюстраванні $f: X \to Y$ азначаецца як кожны элемент a з мноства X такі, што элемент b ёсць вобраз элемента a, г.зн. $f(a)=b$. Мноства ўсіх П. для элемента $b \in B$ называецца поўным П. элемента b (абазначаецца $f^{-1}(b)$). П. мноства $Y_1 \subset Y$ — гэта падмноства $X_1 \subset X$ такое, што Y_1 ёсць вобраз X_1, г.зн. $f(X_1)=Y_1$. Мноства $X' \subset X$, якое ўлучае ўсе элементы $a \in A$ такія, што $f(a) \in Y_1$, называецца поўным П. мноства Y_1, абазначаецца $f^{-1}(Y_1)$.

ПРАГО́НУ МЕ́ТАД — 1) П.м. артаганальны — мадыфікацыя звычайнай схемы прагону для забеспячэння універсальнасці і ўстойлівасці метаду; 2) П.м. дыферэнцыяльны — метад развязання межавай задачы для дыферэнцыяльнага раўнання 2-га парадку. Заснаваны на пераносе межавых умоваў і рэдукцыі зыходных задач да задач Кашы; 3) П.м. рознасцевы — адзін з вылічальных алгарытмаў, які выкарыстоўвае працэдуру скасавання невядомых пры лікавым развязванні рознасцевых межавых задач.

ПРАГРА́М АПТЫМІЗА́ЦЫЯ — пераўтварэнне праграм, якое накіраванае на паляпшэнне такіх яе працоўных характарыстык, як час выканання ўжо на этапе трансляцыі. Пры гэтым П.а. павінна быць карэктная: пераўтворная праграма павінна быць эквівалентная зыходнай паводле сваіх вынікаў. Натуральнае таксама патрабаванне, каб П.а. была не надта алгарытмічна складанай пры яе рэалізацыі на кампутары. Існуюць і менш значныя, але практычна важныя патрабаванні і сродкі П.а.: аптымізацыя цыклаў, зонаў і рэкурсіўных абсягаў, выкананне дзеянняў з канстантамі, адкрытая падстанова целаў працэдур і г.д.

ПРАГРА́МА (ад грэц. prógramma — аб'ява, прадпісанне) кампутара — апісанне алгарытму развязання задачы на лічбавай мове кампутара. Праграма на машыннай мове можа быць створаная праграмістам або атрыманая аўтаматычна з дапамогай службовых праграм-транслятараў, для якіх агульны алгарытм задачы ці дакладная і поўная фармулёўка задачы апісваюцца на якой-небудзь мове праграмавання.

ПРАГРАМАВА́ННЕ — раздзел інфарматыкі; этап развязання якой-небудзь задачы

на кампутары, сэнс якога ў стварэнні праграмы развязання задачы. Працэс П. складаецца з выбару п р а г р а м а в а н н я   м о в ы, выбару сістэмы праграмавання, іншых інструментальных сродкаў распрацоўкі і захоўвання праграм і інш.

ПРАГРАМАВА́ННЕ ПАРАЛЕ́ЛЬНАЕ — раздзел *праграмавання*, у якім займаюцца вывучэннем і распрацоўкай прынцыпаў, метадаў і сродкаў: адэкватнага адлюстравання ў праграмах натуральнага паралелізму мадэляваных і кіраваных кампутарам сістэм і працэсаў; распаралельвання апрацоўкі інфармацыі ў многапрацэсарных і мультыпраграмных кампутарах з мэтай дасягнення высокай хуткасці вылічэнняў і павышэння эфектыўнасці выкарыстання кампутара. Паралельную праграму можна разглядаць як набор асобных працэсаў, якія могуць выконвацца паралельна і павінны ўзаемадзейнічаць адзін з адным, бо неабходна перадаваць адзін аднаму звесткі, каардынаваць супольныя дзеянні, папярэджваць канфлікты пры звяртанні да агульных рэсурсаў.

Асноўныя характарыстыкі паслядоўнасці алгарытмаў (час выканання, ёмістасць патрэбнай памяці, дакладнасць выніку) застаюцца актуальнымі ў П.п. Але П.п. дае шэраг новых магчымасцяў, якія за кошт дублявання дазваляюць атрымліваць больш дакладныя вынікі, а таксама значна павялічыць хуткасць у выніку адначасовага выканання аперацый. У цяперашні час створаныя спецыяльныя мовы, якія дазваляюць запісваць гатовыя паралельныя алгарытмы. Яны падраздзяляюцца на мовы, якія забяспечваюць яўнае заданне індывідуальных (парных) узаемадзеянняў паміж галінамі мовы. У агульным выпадку р а с п а р а л е л ь в а н н е — працэдура, якая складаецца з дзвюх частак: выяўлення схаванага паралелізму ў дадзеным апісанні і выкарыстання наяўнага паралелізму, г.зн. размеркаванне аператараў на галінах паралельнага алгарытму і сінтэзу паралельнай праграмы ў адпаведнасці з пэўнымі моўнымі сродкамі.

ПРАГРАМАВА́ННЕ СІСТЭ́МНАЕ — раздзел *праграмавання*, у якім займаюцца распрацоўкай праграм масавага і доўгачасовага дастасавання. У П.с. распрацоўваюцца метады праектавання сістэмных праграм (кампілятараў, загрузчыкаў, макрапрацэсараў, аперацыйных сістэмаў), якія надаюць вылічальным сродкам сталыя функцыі пэўнай спецыяльнай сістэмы перапрацоўкі інфармацыі. П.с. сустракаецца са значнымі цяжкасцямі. Галоўная з іх — вялікі аб'ём праграмных сістэм (да 1 млн. машынных каманд), істотная нелінейная залежнасць складанасці ад аб'ёму, слабая ўстойлівасць сістэмных праграм да памылак праграміста і да абсталявання.

Машынная залежнасць — адна з характарыстык, якая звычайна адрознівае сістэмнае *праграмнае забеспячэнне* ад дастасоўнага. Д а с т а с о ў н а я   п р а г р а м а стварaецца для развязання нейкай задачы. С і с т э м н ы я   п р а г р а м ы забяспечваюць кіраванне функцыянаваннем менавіта кампутара, таму яны цесна звязаныя са структурай машыны, для якой яны створаны. Існуе толькі невялікая колькасць аспектаў П.с., не звязаных з тыпам вылічальных сістэм. Напрыклад, агульная схема і алгарытмы *асэмблера* ў асноўным аднолькавыя для большасці кампутараў. У метадах П.с. адрозніваюць метады распрацоўкі сістэмнай праграмы адным чалавекам і метады аб'яднання асобных праграмных прадуктаў у вялікую сістэму. Да першых далучаюць метады праграмавання: апісанне і ўласцівасць матэматычнай мадэлі праграмавальнай задачы, метады пераўтварэння зыходнай фармулёўкі задачы ў праграмны тэкст, метады доказу праўдзівасці праграмы. У іншых метадах П.с. набліжаецца да тэорыі вялікіх сістэм, агульнай тэорыі сістэматэхнікі, метадаў арганізацыі калектыўнай работы і пытанняў эвалюцыі дынамічных сістэм.

ПРАГРАМАВА́ННЯ МО́ВА — фармальная мова выяўлення *праграм*, якія належыць выканаць на кампутары. Для кожнай П.м. існуе т р а н с л я т а р — службовая праграма, якая перакладае запісаную на П.м. праграму на лікавую мову канкрэтнай вылічальнай машыны.

Узнікненне і развіццё П.м. звязаныя са з'яўленнем кампутараў і пашырэннем сферы іх дастасаванняў. Колькасць П.м. зараз ва ўсім свеце вельмі вялікая. Таму прапанавана многа іх класіфікацый. Найбольш пашыраны П.м., прызначаныя для дэталёвага апісання алгарытмаў развязання задач. Такія мовы далучаюць да працэдурных або алгарытмічных моваў (алгол-60, бэйсік, паскаль, ПЛ/1, фартран). Для іншых П.м. на першым месцы стаіць перадусім дакладнае і поўнае апісанне самой задачы. На аснове гэтай інфармацыі сістэма праграмавання будуе алгарытм развязання. Такія мовы называюць н е п р а ц э д у р н ы м і, праблемна-арыентаванымі, а таксама мовамі спецыфікацый ці сінтэзу алгарытмаў. Існуе розніца паміж машынна-арыентаванымі П.м. і машынна-незалежнымі П.м., якія ўлічваюць толькі

тып задач, развязальных з дапамогай камputара. Вылучаюць мовы, арыентаваныя на дыялогавы рэжым працы з камputарам (бэйсік). Ёсць мовы кіравання спецыялізаванымі сістэмамі, якія разлічаныя на спецыялістаў канкрэтнай сферы, і інш.

ПРАГРАМАВА́ННЯ СІСТЭ́МА — частка базавага *праграмнага забеспячэння* камputара, якая падтрымлівае працэс праграмавання на камputары. П.с. мае *транслятар* праграм, рэдактар для будавання тэкстаў праграм, а таксама шырокі набор розных дапаможных сродкаў для стварэння і захоўвання праграм.

ПРАГРА́МНАЕ ЗАБЕСПЯЧЭ́ННЕ, матэматычнае забеспячэнне камputара — комплекс прыдадзеных камputару службовых праграм, якія дазваляюць кіраваць яго працай, а таксама сукупнасць інструментальных сродкаў для стварэння новых праграм. Адрозніваюць базавае П.з. і дастасоўнае П.з. Базавае ўлучае ў сябе *аперацыйную сістэму* камputара, сістэмы праграмавання на мовах праграмавання. Да дастасоўнага П.з. далучаюць бібліятэкі стандартных праграм, пакеты дастасоўных праграм і асобныя праграмы канкрэтнага прызначэння.

ПРАГРА́МЫ СХЕ́МА — матэматычная абстракцыя *праграмы*, якая адлюстроўвае яе структурныя ўласцівасці. Пры мадэляванні праграм схемамі зменныя, аперацыі, прэдыкаты або нават цэлыя фрагменты праграм замяняюцца фармальнымі сімваламі, якія не маюць нутраных якасцяў. У той жа час структура праграмы звычайна захоўваецца.

ПРАГРЭ́СІЯ (ад лац. progressio — рух наперад) — паслядоўнасць $u_1, u_2, ..., u_n, ...$, кожны элемент u_k якой атрымліваецца з папярэдняга u_{k-1} дадаваннем аднаго і таго ж (для дадзенай П.) ліку (*арыфметычная прагрэсія*) або множаннем на адзін і той жа лік (*геаметрычная прагрэсія*).

ПРАЕ́КТАР (ад лац. projector — які выкідвае наперад) — *лінейны аператар* p: $V \to V$ вектарнай прасторы, які задавальняе роўнасць $p^2 = p$. Прыклад П.: праектаванне мноства звычайных вектараў на плоскасць або простую.

ПРАЕКТЫ́ЎНАЕ ПЕРАЎТВАРЭ́ННЕ — пераўтварэнне $\tilde{f}$ праектыўнай прасторы P над полем **K**, якое выклікаецца біектыўным лінейным пераўтварэннем f вектарнай прасторы V, звязанай з P: калі p — пункт прасторы P, які з'яўляецца адмернай падпрасторай прасторы V, то $f(p)$ — вобраз падпрасторы P пры адлюстраванні $\tilde{f}$. Мноства ўсіх праектыўных пераўтварэнняў прасторы P ёсць група (праектыўная група). П.п. пераводзіць кожную падпрастору прасторы P у падпрастору такой жа намернасці і не змяняе ўзаемнага размяшчэння падпрастораў. У прыватнасці, П.п. захоўвае падвойны тасунак чатырох пунктаў праектыўнай простай.

ПРАЕКТЫ́ЎНАЯ АЛГЕБРАІ́ЧНАЯ МНАГАСТА́ЙНАСЦЬ — падмноства ў праектыўнай прасторы $P^n(k)$, зададзенае ў дачыненні да аднародных каардынат $(x_0 : x_1 : ... : x_n)$ у $P^n(k)$ сістэмай аднародных паліномных параўнанняў $P_a(x_0, ..., x_n) = 0$. Асноўныя аб'екты, звязаныя з П.а.м., уводзяцца як аналагічныя для афінных алгебраічных мнагастайнасцяў пры тым абмежаванні, што ўжываюцца толькі аднародныя паліномы ці аднародныя рацыянальныя функцыі ступені 0.

ПРАЕКТЫ́ЎНАЯ ГЕАМЕ́ТРЫЯ — раздзел *геаметрыі*, у якім вывучаюць уласцівасці фігур праектыўнай прасторы P, інварыянтныя ў дачыненні да *праектыўных пераўтварэнняў*. Часцей за ўсё ў якасці фігуры бяруцца праектыўныя канфігурацыі K, якія з'яўляюцца канцымі наборамі падпрастораў прасторы P.

Важную ролю ў П.г. адыгрывае прынцып дуальнасці: калі ў дачыненні да праектыўнай канфігурацыі K доказанае нейкае сцверджанне, у фармулёўцы якога ўжываюцца толькі паняцці намернасці, прыналежнасці, перасячэння і ўзяцця праектыўнай абалонкі, то правільнае таксама сцверджанне, атрыманае з першага зменай падпрасторы L на дуальную падпрастору L' (калі P трохмернае, то для нульмернай падпрасторы — пункта — дуальнай з'яўляецца плоскасць, для простай — простая), прыналежнасць $L_1 \subset L_2$ змяняецца на $L'_2 \subset L'_1$, перасячэнне змяняецца на ўзяцце праектыўнай абалонкі і наадварот. Дуальная падпрастора L' для падпрасторы L звычайна будуецца з дапамогай незвыроднай *квадрыкі* ў прасторы P, якая называецца палярнай квадрыкай або палярай.

ПРАЕКТЫ́ЎНАЯ ПЛО́СКАСЦЬ над полем **K** — двухмерная праектыўная прастора P^2 над полем **K**. Такая П.п. класічная, калі і толькі калі ў ёй праўдзіцца аксіёма Папа: няхай Δ_1 і Δ_2 — дзве розныя простыя, A_1, A_2, A_3 — тры розныя пункты простай Δ_1; B_1, B_2, B_3 — тры розныя пункты простай Δ_2; C_k — пункт перасячэння простых A_iB_j і A_jB_i, дзе (i, j, k) — нейкае пера-

стаўленне індэксаў {1, 2, 3}. Тады пункты C_1, C_2, C_3 належаць адной простай. П.п. у класічнай геаметрыі — мноства, элементы якога — пункты з вызначаным наборам падмностваў (простых). Дачыненні паміж пунктамі і простымі апісваюцца аксіёмамі: два розныя пункты належаць адной і толькі адной простай; перасячэнне дзвюх простых непустое; існуюць тры пункты, якія не належаць адной простай; кожная простая мае не менш чым тры пункты.

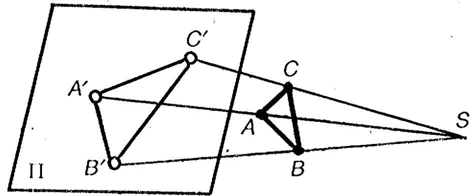
ПРАЕКТЫ́ЎНАЯ ПРАСТО́РА над полем **K** — мноства P аднамерных падпрастораў вектарнай прасторы V над полем **K**. Элементы П.п. — пункты. Калі вектарная прастора V канцамерная, $\dim V = n + 1$, то намернасць П.п. P лічыцца роўнай n ($\dim P = n$). Калі $\dim P = 1$ ці $\dim P = 2$, то P называюць адпаведна *праектыўнай простай* або *праектыўнай плоскасцю.* Падпрасторай П.п. P, звязанай з вектарнай прасторай V, называецца мноства L аднамерных падпрастораў некаторай падпрасторы W вектарнай прасторы V. П.п. у класічнай геаметрыі — мноства, у якім вызначаныя два наборы падмностваў. Пры гэтым праўдзяцца аксіёмы: два розныя пункты належаць адной і толькі адной простай; тры пункты, якія не належаць адной простай, належаць адной і толькі адной плоскасці; простая і плоскасць маюць агульны пункт; перасячэнне дзвюх плоскасцяў улучае простую; існуюць чатыры пункты, якія не належаць адной плоскасці і такія, што кожныя тры з іх не належаць адной простай; кожная простая мае не менш чым тры пункты. Кожная трохмерная П.п. P^3 над полем **K** ёсць П.п. у класічным сэнсе, але не наадварот.

ПРАЕКТЫ́ЎНАЯ ПРО́СТАЯ над полем **K** — аднамерная праектыўная прастора P' над полем **K**. П.п. уяўляецца таксама як мноства дзвюхмернай афіннай прасторы, якая праходзіць праз фіксаваны пункт. Калі $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ — поле рэчаісных лікаў, П.п. P' называецца рэчаіснай П.п. (уяўляецца як рэчаісная лікавая простая **R**, дапоўненая бясконца аддаленым пунктам). Як тапалагічная прастора рэчаісная П.п. гамеаморфная звычайнай акружыне.

ПРАЕКТЫ́ЎНЫЯ КААРДЫНА́ТЫ — узаемна адназначная адпаведнасць паміж элементамі *праектыўнай прасторы* і класамі эквівалентных упарадкаваных канцых падмностваў элементаў нейкага цела, над якім разглядаецца праектыўная прастора.

ПРАЕКТЫ́ЎНЫЯ МЕ́ТАДЫ — метады пошуку набліжанага развязку аператарнага раўнання ў зададзенай падпрасторы, заснаваныя на праектаванні раўнання на якую-небудзь іншую падпрастору. П.м. — аснова будавання розных вылічальных схемаў, развязання краявых задач, у тым ліку *канцых элементаў метаду* і *калакацыі метаду.*

ПРАЕ́КЦЫЯ (ад лац. projectio — кіданне наперад) — тэрмін, звязаны з аперацыяй працтавання. Адзін з магчымых спосабаў праектавання (гл. рыс.): выбіраюць адвольны пункт S прасторы ў



якасці цэнтра праектавання і плоскасць П, якая не праходзіць праз пункт S, у якасці плоскасці праекцый. Каб праектаваць пункт A (правобраз) прасторы на плоскасць П, праз цэнтр праекцый S праводзяць простую SA да яе перасячэння ў пункце A' з плоскасцю П. Пункт A' называюць праекцыяй пункта A. Праекцыяй фігуры называецца мноства П. яе пунктаў. Спецыяльныя спосабы П. на плоскасць, сферу і іншыя паверхні выкарыстоўваюцца ў геаграфіі, астраноміі, крышталяграфіі, тапаграфіі і інш.

ПРА́МА ПРАПАРЦЫ́ЙНЫЯ ВЕЛІЧЫ́НІ — такія велічыні x і y, для якіх $\frac{y}{x}$ ёсць канстанта, напрыклад даўжыня акружыны і даўжыня яе дыяметра $\left(\frac{\pi D}{D} = \pi\right)$. Звычайна, калі вызначана функцыйная залежнасць адной велічыні ад другой, а велічыні x і y змяняюцца ў невялікіх інтэрвалах з цэнтрамі ў пунктах x_0 і y_0, можна лічыць велічыні $x - x_0$ і $y - y_0$ прама прапарцыйнымі. На гэтым заснаванае *дыферэнцыяльнае злічэнне.*

ПРАМАВУГО́ЛЬНАЯ МА́ТРЫЦА — прамавугольная табліца з элементаў a_{ij}, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$ адвольнага мноства:

ПРАМІ́ЛЕ (ад лац. pro mille — на тысячу) — тысячная частка ліку. Абазначаецца ‰.

ПРАМЫ́ ВУ́ГАЛ — адзін з чатырох аднолькавых вуглоў, якія атрымліваюцца, калі мы дзелім круг на чатыры роўныя часткі двума дыяметрамі. Велічыня П.в. 90°. Наяўнасць прамога вугла ляжыць у аснове азначэння *прамавугольнага трохвугольніка, прамавугольніка, квадрата* і інш.

ПРАМЫ́ ЗДАБЫ́ТАК — 1) П.з. двух мностваў A і B — мноства параў (x, y), у якіх $x \in A$ і $y \in B$: $A \times B \overset{\text{def}}{=} \{(x, y)\}$. Паняцце П.з. мностваў лёгка абагульняецца на выпадак больш чым двух мностваў; 2) П.з. $G = G_1 \times G_2$ дзвюх групаў G_1 і G_2 — група, створаная ўсімі парамі (x, y), дзе x — усякі элемент групы G_1, y — усякі элемент групы G_2. Аперацыя групы вызначаецца так: $(x_1, x_2)(y_1, y_2) = (x_1y_1, x_2y_2)$. Парадак групы G роўны здабытку парадкаў групаў G_1 і G_2. Група G мае адзінку $e = (e_1, e_2)$, дзе e_1 і e_2 — адпаведна адзінкі групаў G_1 і G_2. Калі групы G_1 і G_2 не маюць агульных элементаў, то (x, y) можна запісаць як вонкавы здабытак xy, прычым $xe_2 = x$, $e_1y = y$, G_1 і G_2 — падгрупы ў G. Напрыклад, кожная скалярная фізічная велічыня ёсць вонкавы здабытак ліку і адзінкі вымярэння; 3) П.з. $E = E_1 \times E_2$ рэчаісных вектарных прастораў E_1 і E_2 — рэчаісная вектарная прастора, утвораная ўсімі парамі (вонкавымі здабыткамі) $(x, y) = xy$, дзе x — адвольны элемент E_1, y — адвольны элемент E_2. Складанне і множанне вектара на скаляр з E задаюцца формуламі: $x(y + z) = xy + xz$; $(x + y)z = xz + yz$; $\alpha xy = (\alpha x)y = x(\alpha y)$.

ПРАМЫ́ КРУГАВЫ́ КО́НУС — *цела*, якое атрымліваецца ад авароту *прамавугольнага трохвугольніка* вакол аднаго з сваіх катэтаў.

ПРАМЫ́ ПАРАЛЕЛЕПІ́ПЕД — *паралелепіпед*, у якога бакавыя канты перпендыкулярныя плоскасці асновы.

ПРАПАРЦЫ́ЙНАСЦЬ — тып функцыйнай залежнасці. Адрозніваюць прамую і адваротную П. Дзве зменныя велічыні называюцца прама прапарцыйнымі, калі іх тасунак не змяняецца, г.зн. у колькі разоў павялічыцца (ці зменшыцца) адна з іх, у столькі ж разоў павялічыцца (ці зменшыцца) і другая. Аналітычна П. велічыняў x і y характарызуецца адпаведнасцю: $y = kx$, дзе k — каэфіцыент прапарцыйнасці. Графічна прапарцыйная залежнасць выяўляецца простай лініяй (ці паўпростай), што праходзіць праз пачатак каардынат, вуглавы каэфіцыент якой роўны каэфіцыенту П. Зменныя велічыні x і y называюцца адваротна прапарцыйнымі, калі адна з іх прапарцыйная адваротнаму значэнню другой, г.зн. $y = k\frac{1}{x}$ або $xy = k$. Графікам адваротна прапарцыйнай залежнасці служыць роўнабаковая гіпербала (або адна з яе галін). Прапарцыйная залежнасць трапляецца надзвычайна часта. Прыклады: шлях s, пройдзены целам пры раўнамерным руху, прапарцыйны часу t ($s = kt$, k — хуткасць); маса m аднароднага цела прапарцыйная яго аб'ёму v ($m = kv$, k — шчыльнасць); час, затрачаны на выпуск дадзенай колькасці тавару, адваротна прапарцыйны прадукцыйнасці працы і г.д.

ПРАПО́РЦЫЯ (лац. proportio) — роўнасць паміж двума тасункамі чатырох велічыняў a, b, c, d: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Велічыні a, b, c, d называюць элементамі П., пры гэтым a і d — крайнімі, b і c — сярэднімі элементамі П. Здабытак сярэдніх элементаў П. роўны здабытку крайніх: $bc = ad$. Гэтая ўласцівасць называецца асноўнай уласцівасцю П. Ёю карыстаюцца для праверкі правільнасці П. і для выразу аднаго якога-небудзь яе элемента праз астатнія (напрыклад, $b = \frac{ad}{c}$).

ПРАСТО́РА ў сучаснай матэматыцы — адвольнае мноства, элементы якога называюць пунктамі П.; звычайна універсальнае мноства, у рамках якога будуецца тая або іншая матэматычная тэорыя. За доўгі час развіцця матэматыкі гэтае паняцце прайшло вялікую эвалюцыю. Спачатку пад ім разумелі звычайную трохмерную эўклідаву прастору, якая з'яўлялася простай абстракцыяй навакольнай фізічнай П. і будавалася на інтуіцыйным разуменні такіх аб'ектаў, як пункт, простая, плоскасць, і дачыненняў паміж імі, што ўводзілася з дапамогай шэрагу аксіём і пастулатаў. У выніку вывучэння эўклідавай сістэмы аксіём гэтай П. матэматыка ў 19 ст. прыйшла да абагульнення паняцця П. Першым такім абагульненнем была Лабачэўскага П., потым *рыманава прастора*. Больш дакладнае вывучэнне фізічных з'яваў прывяло да ўзнікнення розных неэўклідавых П., напрыклад *Мінкоўскага прасторы*. З геаметрыі паняцце П. ў 20 ст. было пашыранае і на іншыя матэматычныя тэорыі. Так, былі ўведзеныя *тапалагічныя прасторы*, *банахава прастора*, *гільбэртава прастора* і інш.

ПРАМІ́ЛЕ (ад лац. pro mille — на тысячу) — тысячная частка ліку. Абазначаецца ‰.

ПРАМЫ́ ВУ́ГАЛ — адзін з чатырох аднолькавых вуглоў, якія атрымліваюцца, калі мы дзелім круг на чатыры роўныя часткі двума дыяметрамі. Велічыня П.в. 90°. Наяўнасць прамога вугла ляжыць у аснове азначэння *прамавугольнага трохвугольніка, прамавугольніка, квадрата* і інш.

ПРАМЫ́ ЗДАБЫ́ТАК — 1) П.з. двух мностваў A і B — мноства параў (x, y), у якіх $x \in A$ і $y \in B$: $A \times B \stackrel{def}{=} \{(x, y)\}$. Паняцце П.з. мностваў лёгка абагульняецца на выпадак больш чым двух мностваў; 2) П.з. $G = G_1 \times G_2$ дзвюх групаў G_1 і G_2 — група, створаная ўсімі парамі (x, y), дзе x — усякі элемент групы G_1, y — усякі элемент групы G_2. Аперацыя групы вызначаецца так: $(x_1, x_2)(y_1, y_2) = (x_1y_1, x_2y_2)$. Парадак групы G роўны здабытку парадкаў групаў G_1 і G_2. Група G мае адзінку $e = (e_1, e_2)$, дзе e_1 і e_2 — адпаведна адзінкі групаў G_1 і G_2. Калі групы G_1 і G_2 не маюць агульных элементаў, то (x, y) можна запісаць як вонкавы здабытак xy, прычым $xe_2 = x$, $e_1y = y$, G_1 і G_2 — падгрупы ў G. Напрыклад, кожная скалярная фізічная велічыня ёсць вонкавы здабытак ліку і адзінкі вымярэння; 3) П.з. $E = E_1 \times E_2$ рэчаісных вектарных прастораў E_1 і E_2 — рэчаісная вектарная прастора, утвораная ўсімі парамі (вонкавымі здабыткамі) $(x, y) = xy$, дзе x — адвольны элемент E_1, y — адвольны элемент E_2. Складанне і множанне вектара на скаляр з E задаюцца формуламі: $x(y + z) = xy + xz$; $(x + y)z = xz + yz$; $\alpha xy = (\alpha x)y = x(\alpha y)$.

ПРАМЫ́ КРУГАВЫ́ КО́НУС — *цела*, якое атрымліваецца ад звароту *прамавугольнага трохвугольніка* вакол аднаго з сваіх катэтаў.

ПРАМЫ́ ПАРАЛЕЛЕПІ́ПЕД — *паралелепіпед*, у якога бакавыя канты перпендыкулярныя плоскасці асновы.

ПРАПАРЦЫ́ЙНАСЦЬ — тып функцыйнай залежнасці. Адрозніваюць прамую і адваротную П. Дзве зменныя велічыні называюцца прама прапарцыйнымі, калі іх тасунак не змяняецца, г.зн. у колькі разоў павялічыцца (ці зменшыцца) адна з іх, у столькі ж разоў павялічыцца (ці зменшыцца) і другая. Аналітычна П. велічыняў x і y характарызуецца адпаведнасцю: $y = kx$, дзе k — каэфіцыент прапарцыйнасці. Графічна прапарцыйная залежнасць выяўляецца простай лініяй (ці паўпростай), што праходзіць праз пачатак каардынат, вуглавы каэфіцыент якой роўны каэфіцыенту П. Зменныя велічыні x і y называюцца адваротна прапарцыйнымі, калі адна з іх прапарцыйная адваротнаму значэнню другой, г.зн. $y = k\frac{1}{x}$ або $xy = k$. Графікам адваротна прапарцыйнай залежнасці служыць роўнабаковая гіпербала (або адна з яе галін). Прапарцыйная залежнасць трапляецца надзвычайна часта. Прыклады: шлях s, пройдзены целам пры раўнамерным руху, прапарцыйны часу t ($s = kt$, k — хуткасць); маса m аднароднага цела прапарцыйная яго аб'ёму v ($m = kv$, k — шчыльнасць); час, затрачаны на выпуск дадзенай колькасці тавару, адваротна прапарцыйны прадукцыйнасці працы і г.д.

ПРАПО́РЦЫЯ (лац. proportio) — роўнасць паміж двума тасункамі чатырох велічыняў a, b, c, d: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Велічыні a, b, c, d называюць элементамі П., пры гэтым a і d — крайнімі, b і c — сярэднімі элементамі П. Здабытак сярэдніх элементаў П. роўны здабытку крайніх: $bc = ad$. Гэтая ўласцівасць называецца асноўнай уласцівасцю П. Ёю карыстаюцца для праверкі правільнасці П. і для выразу аднаго якога-небудзь яе элемента праз астатнія (напрыклад, $b = \frac{ad}{c}$).

ПРАСТО́РА ў сучаснай матэматыцы — адвольнае мноства, элементы якога называюць пунктамі П.; звычайна універсальнае мноства, у рамках якога будуецца тая або іншая матэматычная тэорыя. За доўгі час развіцця матэматыкі гэтае паняцце прайшло вялікую эвалюцыю. Спачатку пад ім разумелі звычайную трохмерную эўклідаву прастору, якая з'яўлялася простай абстракцыяй навакольнай фізічнай П. і будавалася на інтуіцыйным разуменні такіх аб'ектаў, як пункт, простая, плоскасць, і дачыненняў паміж імі, што ўводзілася з дапамогай шэрагу аксіём і пастулатаў. У выніку вывучэння эўклідавай сістэмы аксіём гэтай П. матэматыка ў 19 ст. прыйшла да абагульнення паняцця П. Першым такім абагульненнем была Лабачэўскага П., потым *рыманава прастора*. Больш дакладнае вывучэнне фізічных з'яваў прывяло да ўзнікнення розных неэўклідавых П., напрыклад *Мінкоўскага прасторы*. З геаметрыі паняцце П. ў 20 ст. было пашыранае і на іншыя матэматычныя тэорыі. Так, былі ўведзеныя *тапалагічныя прасторы, банахава прастора, гільбэртава прастора* і інш.

ПРАСТО́РАВАЯ КРЫВА́Я — *крывая*, пункты якой не належаць адной плоскасці. Звычайна задаецца ці як перасячэнне дзвюх паверхняў $F(x, y, z) = 0$, $G(x, y, z) = 0$, ці ў параметрычнай форме $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$, $z = u(t)$, $t \in T$.

ПРАЎДЗІ́ВАСЦІ ТАБЛІ́ЦА — табліца, якая выражае праўдзівае значэнне складанага выказвання праз праўдзівыя значэнні простых выказванняў, што ўваходзяць у яго П.т. для кан'юнкцыі, дыз'юнкцыі, імплікацыі, эквіваленцыі і адмаўлення. Гл. *Логікавыя аперацыі.*

Выказванне A, пабудаванае з простых выказванняў $a_1, ..., a_n$ з дапамогай логікавых аперацый $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, абазначаюць $A(a_1, ..., a_n)$ і называюць яшчэ ф о р м у л а й л о г і к і в ы к а з в а н н я ў. Паколькі існуе 2^n розных размеркаванняў праўдзівых значэнняў для $a_1, ..., a_n$, то П.т. для выказвання (формулы) $A(a_1, ..., a_n)$ мае 2^n радкоў. Напрыклад, П.т. выказвання (формулы) $a_1\wedge(a_2\vee a_3)$ змяшчае $2^3 = 8$ радкоў і мае выгляд (П — праўда, Н — няпраўда):

a_1	a_2	a_3	$a_1\wedge(a_2\vee a_3)$
П	П	П	П
П	П	Н	П
П	Н	П	П
П	Н	Н	Н
Н	П	П	Н
Н	П	Н	Н
Н	Н	П	Н
Н	Н	Н	Н

ПРАЦЭДУ́РА (ад лац. procedure — прасоўвацца) — *падпраграма* ў мовах праграмавання (напрыклад, у алголе-60, паскалі і інш.), якая дае магчымасць апісаць алгарытм развязання задачы з дапамогай падзелу яе на часткі. Простым відам П. ёсць працэдура-функцыя, якая вылічвае некаторае значэнне як функцыю параметраў-аргументаў. Мовы праграмавання звычайна ўлучаюць стандартныя П., якія выкарыстоўваюцца без апісання. Набор П. стварае бібліятэку.

ПРАЦЭ́НТ (ад лац. pro centum — на сотню), а д с о т к а — сотая доля цэлага (што прымаецца за адзінку); абазначаецца %. Адрозніваюць простыя, складаныя і непарыўныя працэнтныя налічэнні.

Няхай a — сума грошай, унесеных укладчыкам пры адкрыцці свайго рахунку ў банку пад p % гадавых. У выпадку простых П. за год на сканчэнні t гадоў укладчык атрымае суму $a\left(1+\frac{p}{100}t\right)$ (пры гэтым мяркуецца, што кожны год П. здымаюцца). У выпадку складаных П. за год (квартал) праз t гадоў укладчык атрымае суму

$$a\left(1+\frac{p}{100}\right)^t\left(a\left(1+\frac{p}{100}\right)^{4t}\right).$$

Складаныя працэнты выкарыстоўваюцца пры вызначэнні сярэднегадавых тэмпаў прыросту за пяцігоддзе, за дзесяцігоддзе і г.д. У выпадку непарыўных p % за год укладчык праз t гадоў атрымае суму $ae^{\frac{p}{100}t}$.

ПРАЦЭ́С (ад лац. processus — прасоўванне) — 1) паняцце для абазначэння паводзін аб'екта, якое можа быць апісанае ў тэрмінах абранага для гэтага аб'екта абмежаванага набору падзей (станаў). П. вызначаецца поўным апісаннем яго патэнцыйных паводзін. Працэсам P у S называецца пэўнае адлюстраванне p: $T \to S$, дзе T — мноства момантаў часу з мноства неадмоўных рэчаісных лікаў, S — мноства станаў аб'екта (алфавіт). Такім чынам, усякі П. можна падаць як функцыю ў пэўнай функцыйнай мове праграмавання; 2) назоў з'явы, якая залежыць ад дыскрэтнай ці непарыўнай зменнай. Напрыклад, *Маркава працэс, пуасонаў працэс, дыфузійны працэс* і г.д.

ПРАЦЯ́ТАЕ НАВАКО́ЛЛЕ — наваколле пункта a, з выняткам самога пункта a.

ПРО́СТАЕ КО́ЛЬЦА — ненулявое *кольца* без двухбаковых *ідэалаў*, адрозных ад нулявога ідэала $\{0\}$ і ўсяго кольца.

ПРО́СТАЕ ПАШЫРЭ́ННЕ п о л я — пашырэнне поля K, якое атрымліваецца далучэннем да K аднаго элемента.

ПРО́СТАЕ ПО́ЛЕ — *поле* без уласных падпалёў. Кожнае поле мае адзінае простае падполе.

ПРОСТАЛІНЕ́ЙНАЯ ЎТВАРА́ЛЬНАЯ — простая, перамяшчэнне якой утварае лінеістую паверхню. П.ў. пэўнай паверхні цалкам належаць гэтай паверхні і цалкам запаўняюць паверхню. Напрыклад, на аднапорасцевым гіпербалоідзе і на гіпербалічным парабалоідзе размешчаныя па дзве

сям'і П.ў. Праз кожны пункт гэтых паверхняў праходзіць пара П.ў., адна з якіх належыць адной сям'і, другая — другой. П.ў. маюць таксама конус, цыліндр.

ПРО́СТАЯ — тое, што *простая лінія*.

ПРО́СТАЯ ГРУ́ПА — *група*, што не мае нармальных надгрупаў, адрозных ад усёй групы і адзінкавай падгрупы.

ПРО́СТАЯ ЛІ́НІЯ, простая, прамая — адно з асноўных неазначальных паняццяў геаметрыі разам з такімі паняццямі, як пункт, плоскасць і г.д. Яна апісваецца тымі аксіёмамі, якія вызначаюць пэўную геаметрыю. Там, дзе простая не з'яўляецца асноўным паняццем, яна мае сваё азначэнне ў звыклым сэнсе гэтага слова. У n-мернай афіннай прасторы, напрыклад, пад простай разумеюць мноства такіх пунктаў C, для якіх $\overline{AC} = t\overline{AB}$, дзе A і B — два розныя пункты гэтай простай, а t — адвольны рэчаісны лік.

ПРО́СТАЯ ФО́РМА ў крышталяграфіі — набор граняў ідэальнага крышталічнага мнагагранніка, якія маюць аднолькавыя фізічныя якасці. Каб пабудаваць простыя формы, што адпавядаюць сіметрыі класа G, бярэцца плоскасць A, якая не ўлучае мноства $\{x\in E^3 \mid g(x) = X$ для ўсіх $g\in G\}$, тады адпаведная П.ф. ёсць $\bigcup_{g\in G} g(A)$. Такім чынам былі знойдзеныя ўсе 47 магчымых П.ф. У выпадку, калі П.ф. ёсць мноства граняў абмежаванага мнагагранніка, яна называецца замкнёнай, у адваротным выпадку — адкрытай.

П.ф. і іх камбінацыі даюць усе магчымыя формы крышталя дадзенага класа сіметрыі. Напрыклад, крышталі звычайнай солі NaCl і пірыту FeS_2 маюць форму куба, аднак калі першы з іх разглядаецца як адна П.ф., то другі — як камбінацыя трох П.ф. — параў паралельных граняў. Гэта абумоўлена тым, што крышталі маюць розныя класы сіметрыі. Адпаведна грані солі маюць аднолькавыя фізічныя якасці, а пірыту — неаднолькавыя.

ПРО́СТЫ ІДЭА́Л — азначаецца для камутатыўнага колца A як *ідэал* P, для якога з $xy\in P$ пры пэўных $x, y\in A$ вынікае $x\in P$ або $y\in P$.

ПРО́СТЫ ЛІК — цэлы дадатны лік, які большы за адзінку і не мае іншых дзельнікаў, акрамя сябе і адзінкі. Такім чынам, простымі з'яўляюцца лікі 2, 3, 5, 7...

Асноўная тэарэма арыфметыкі сцвярджае, што цэлы дадатны лік адзіным спосабам раскладаецца ў здабытак ступеняў П.л. Яшчэ Эўклід даказаў, што П.л. — бясконцае мноства. Абазначым праз $\pi(x)$ колькасць П.л., якія не пераўзыходзяць x П.л. П.Чабышоў даказаў, што пры $x \geq 2$ існуюць дзве сталыя a і A: $a > \frac{\ln 2}{2}$ і $A < 2\ln 2$, пры якіх праўдзіцца няроўнасць

$$a\frac{x}{\ln x} < \pi(x) < A\frac{x}{\ln x}.$$

У 1986 г. Ж.Адамар і Ш.Ла Вале Пусен атрымалі наступны вынік:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\ln x}{x} = 1.$$

Дагэтуль існуе шмат неразвязаных задач пра простыя лікі: ці бясконцае мноства П.л. выгляду $x^2 + 1$; ці бясконцая колькасць простых лікаў-блізнят і інш.

ПРО́СТЫ МО́ДУЛЬ — тое, што *непрыводны модуль*.

ПРО́СТЫ ТАСУ́НАК — азначаецца для трох пунктаў на простай як адзін з інварыянтаў афінных пераўтварэнняў. Няхай M_1, M_2, M_3 — тры пункты простай. П.т. гэтых пунктаў — лік λ такі, што $M_1M = \lambda MM_2$. Кажуць, што пункт M дзеліць адрэзак M_1M_2 у тасунку λ. Калі пункты M_1 і M_2 маюць адпаведна каардынаты (x_1, y_1) і (x_2, y_2), то пункт M мае каардынаты

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\quad y = \frac{y_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}.$$

ПРО́СТЫХ МЕ́ТАД — метад лікавага развязання дыферэнцыяльных раўнанняў з частковымі вытворнымі. З дапамогай яго здзяйсняецца апраксімацыя аперацыі дыферэнцавання па пэўных кірунках, што дазваляе зменшыць памернасць задачы. Выкарыстоўваецца для развязання нелінейных раўнанняў эліптычнага, гіпербалічнага і парабалічнага тыпаў адвольнага парадку і сістэм раўнанняў.

ПРОЦІЛЕ́ГЛЫЯ ЛІ́КІ — два лікі, сума якіх роўная нулю. Прыклады П.л.: 5 і –5; $\sqrt{2}$ і $-\sqrt{2}$; (3–4) і (–3+4). Рэчаісныя П.л. на лікавай простай паказваюцца пунктамі, размешчанымі з розных бакоў ад пачатку адліку (нулявога пункта) і на роўных адлегласцях ад яго. Сіметрычнымі ў дачыненні да нуля пунктамі паказваюцца процілеглыя камплексныя лікі на камплекснай плоскасці. Нуль — адзіны лік, процілеглы сам сабе.

ПРЫВЕ́ДЗЕНАЯ СІСТЭ́МА РЭ́ШТАЎ п а м о д у л і m — набор лікаў з поўнай сістэмы рэштаў па модулі m, узаемна простых з m. П.с.р. складаецца з $\varphi(m)$ лікаў, дзе $\varphi(m)$ — Ойлера функцыя. Звычайна П.с.р. выбіраюць з лікаў 0, 1, ..., $m-1$. Напрыклад, калі $m=6$, то П.с.р. — гэта лікі 1, 5.

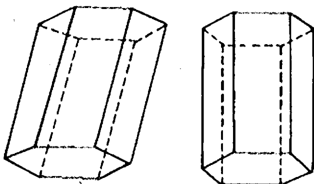
ПРЫВО́ДНЫ МНАГАСКЛА́Д — гл. *Непрыводны мнагасклад.*

ПРЫВЯДЗЕ́ННЯ ФО́РМУЛЫ ў т р ы г а н а м е т р ы і — формулы, якія дазваляюць звесці вылічэнне функцыі ад адвольнага аргумента x_1 да вылічэння функцыі ад аргумента x_2, $0 \le x_2 \le \frac{\pi}{2}$. Напрыклад,

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=-\cos x,\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\operatorname{ctg} x.$$

П.ф. можна атрымаць з дапамогай формул трыганаметрычных функцый ад сумы і рознасці аргументаў.

ПРЫ́ЗМА (ад грэц. prisma — літаральна адпіленае) — *мнагаграннік,* дзве грані якога (асновы П.) — роўныя многавугольнікі з адпаведна паралельнымі старанамі, іншыя грані (бакавыя) — паралелаграмы, якія парамі перасякаюцца па паралельных простых (гл. рыс.). У залежнасці ад колькасці бакавых граняў П. бываюць трох-, чатырох-,



пяціграневыя і г.д. Прыклады П.: п р а м а я П. (бакавыя грані перпендыкулярныя аснове), п р а в і л ь н а я П. (прамая П., аснова якой — правільны многавугольнік, паралелепіпед). Аб'ём П.: $V=SH$, дзе H — вышыня, S — плошча асновы. Тэрмін П. сустракаецца ў Эўкліда і Архімеда (3 ст. да н.э.).

ПРЫМА́ЛЬНЫ СТАТЫСТЫ́ЧНЫ КАНТРО́ЛЬ — сукупнасць метадаў статыстычнага кантролю якасці масавай прадукцыі з мэтай выяўлення яе адпаведнасці зададзеным патрабаванням. П.с.к. здзяйсняецца на аснове стандартаў, якія змяшчаюць табліцы планаў кантролю, улічваюць аб'ём кантраляванай партыі, вынікі кантролю папярэдніх партый і іншыя фактары. Найбольш часта выкарыстоўваюцца два віды П.с.к. — кантроль па альтэрнатыўнай прыкмеце (вырабы класіфікуюцца на прымальныя і дэфектныя) і кантроль па колькаснай прыкмеце (вымяраюцца параметры вырабаў). Пры адборы вырабаў на кантроль выкарыстоўваюцца розныя метады.

ПРЫМА́РНАЯ ГРУ́ПА — група, парадкі ўсіх элементаў якой ёсць ступені фіксаванага простага ліку p. Часам П.г. называюць p - г р у п а й.

ПРЫМІТЫ́ЎНА РЭКУРСІ́ЎНАЯ ФУ́НКЦЫЯ — функцыя, атрыманая з функцый $O(x)\equiv O$, $S(x)=x+1$, $J_m^n(x_1,\dots,x_n)=X_m$ $(1\le m\le n)$ з дапамогай концай колькасці аперацый падстановы і прымітыўнай рэкурсіі. (Разглядаюцца функцыі, аргументы і значэнне якіх — натуральны лік; гл. *Рэкурсіўная функцыя.*) Клас прымітыўна рэкурсіўных функцый ёсць уласная частка класа *агульнарэкурсіўных функцый.* Мае вялікае значэнне ў тэорыі рэкурсіўных функцый.

ПРЫМІТЫ́ЎНЫ МНАГАСКЛА́Д — мнагасклад, каэфіцыенты якога належаць асацыятыўнаму і камутатыўнаму кольцу з адназначным раскладам на множнікі, напрыклад кольцу цэлых лікаў, і не маюць нетрывіяльных супольных дзельнікаў. Здабытак некалькіх П.м. таксама ёсць П.м.

ПРЫСТРАЛЯ́ННЯ МЕ́ТАД — метад лікавага развязання межавай задачы для звычайных дыферэнцыяльных раўнанняў, заснаваны на рэдукцыі да задач Кашы і замыкальных сістэм лікавых раўнанняў. У П.м. для межавай задачы

$$y' = f(t, y),\ a\le t\le b, \tag{1}$$

$$g(y(a), y(b)) = 0, \tag{2}$$

дзе $f\colon [a,b]\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$, $g\colon\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$, выбіраецца пункт і параметр прыстраляння, напрыклад $t_0=a$ і y_0. Пры гэтым y_0 выбіраецца як нейкае набліжанне да сапраўднага значэння развязку $y(t)$ задачы (1), (2) у пункце $t=a$ так, што $y_0\approx y(a)$. Уводзіцца задача Кашы:

$$z' = f(t, y),\ a\le t\le b, \tag{3}$$

$$z(a) = y_0 \tag{4}$$

і патрабуецца, каб развязак $z(t, y_0)$ задачы (3), (4) задавальняў межавую ўмову (2). Гэта прыводзіць да замыкальнай сістэмы раўнанняў у дачыненні да y:

$$h(y_0)\equiv g(y_0, z(b, y_0)) = 0, \tag{5}$$

дзе $h : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$. Для развязання сістэмы раўнанняў (5) ужываюцца ітэрацыйныя метады: метад простай ітэрацыі, *Ньютана метад* і інш. Калі траекторыі $z\ (t,\ y_0)$ няўстойлівыя, то няўстойлівы і П.м. Тады скарыстоўваецца метад мноствавага прыстралання, у якім выбіраецца сукупнасць пунктаў $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m = b$. Ім адпавядаюць значэнні параметраў $y_0, y_1, \ldots, y_m$. П.м. перспектыўны, мае вялікія магчымасці рэгулявання ўласцівасцяў прыстралальных траекторый і замыкальных сістэм.

ПРЫСТУ́ПКАВАЯ ФУ́НКЦЫЯ — функцыя, вызначаная на некаторым лікавым прамежку I (напрыклад, $I = [a, b)$) пры яго падзеле пунктамі $a_0 = a,\ a_1,\ \ldots,\ a_n = b$ ($I = \bigcup_{k=0}^{n-1} a_k, a_{k+1}$), якая мае выгляд

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n-1} c_k \varphi_k([a_k, a_{k+1})). \qquad (1)$$

У (1) $c_0, \ldots, c_{n-1}$ — сталыя рэчаісныя велічыні, $\varphi_k[a_k, a_{k+1})$ — *характарыстычная функцыя* прамежку $[a_k, a_{k+1})$, што роўная 1, калі $x \in [a_k, a_{k+1})$, і 0, калі $x \notin [a_k, a_{k+1})$. Кожную непарыўную функцыю можна заўгодна дакладна апраксімаваць П.ф. На гэтым заснаваны шмат дастасаванняў П.ф.

ПРЫХІ́ЛЬНЫЯ ЛІ́КІ — пара натуральных лікаў, кожны з якіх роўны суме сапраўдных дзельнікаў другога, г.зн. дзельнікаў, адрозных ад самога ліку. П.л. з'яўляюцца 284 і 220, бо 284 мае дзельнікі 1, 2, 4, 7, 71 і 142, а 220 — 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 і 110. Пры гэтым 220 = 1 + 2 + 4 + + 7 + 71 + 142, а 284 = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + + 22 + 44 + 55 + 110. Яшчэ Л.Ойлер ведаў каля 60 пар П.л. Да цяперашняга часу знойдзена некалькі сотняў пар П.л. У школе Піфагора прыпісвалі П.л. містычныя ўласцівасці.

ПРЭДЫКА́Т (ад лац. praedicatum — выказанае) — n-месцавая логікавая функцыя, вызначаная на мностве M (такая n-месцавая функцыя P, якая кожнаму набору $a_1, \ldots, a_n$ элементаў мноства M ставіць у адпаведнасць выказванне $P\ (a_1, \ldots, a_n)$. Звычайна ў матэматычнай логіцы выказванне атаясамляецца з яго значэннем: П — праўда і Н — няпраўда. Тады паняцце П. атрымлівае азначэнне: n-месцавым П. на мностве M называецца n-месцавая функцыя, вызначаная на M, якая прымае значэнні П і Н.

Мноства набораў значэнняў аргументаў $a_1, \ldots, a_n$ n-месцавага прэдыката $P\ (x_1, \ldots, x_n)$, для якіх $P\ (a_1, \ldots, a_n)$ праўдзівае, называецца м н о с т в а м п р а ў д з і в а с ц і гэтага П. Калі P — n-месцавы П. на мностве M, то яго абсяг праўдзівасці з'яўляецца n-месцавым дачыненнем на M і, наадварот, кожнаму n-месцаваму дачыненню на мностве M адпавядае n-месцавы П. на M. Вывучэнне П. і вывучэнне дачыненняў узаемазвязаныя. П. P называецца т о е с н а п р а ў д з і в ы м н а м н о с т в е M, калі $P\ (a_1, \ldots, a_n)$ праўдзівае для кожнага набору $a_1, \ldots, a_n$ элементаў з M (мноства праўдзівасці яго супадае з усім мноствам M), і т о е с н а н е п р а ў д з і в ы м на M, калі $P\ (a_1, \ldots, a_n)$ непраўдзівае для кожнага набору $a_1, \ldots, a_n$ элементаў з M (калі яго мноства праўдзівасці — пустое мноства). П. P называецца з д з я й с н я л ь н ы м, калі $P\ (a_1, \ldots, a_n)$ праўдзівае хоць бы для аднаго набору элементаў $a_1, \ldots, a_n$ з M. З дапамогай аперацый логікі выказванняў $\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ на падставе зададзеных П. магчыма будаваць новыя П. Акрамя таго, для ўтварэння новых П. з зададзеных ужываюцца *квантары*. Калі $P\ (x, x_1, \ldots, x_n)$ ёсць $(n+1)$-месцавы П., вызначаны на мностве M, то $\forall\, x\, P\ (x, x_1, \ldots, x_n)$ — n-месцавы П. (вызначаны на мностве M і залежны ад $x_1, \ldots, x_n$).

ПРЭДЫКА́ТАЎ ЗЛІЧЭ́ННЕ — агульны назоў фармальных сістэм, прызначаных для фармалізацыі логікавых разважанняў, у якіх улічваецца логікавая структура выказванняў (г.зн. як адны выказванні атрыманы з іншых з дапамогай логікавых аперацый) і іх суб'ектыўна-прэдыкатнае будаванне (г.зн. сувязь паміж с у б'е к т а м меркавання — пра што гаворыцца ў зададзеным меркаванні, і п р э д ы к а т а м — што гаворыцца пра суб'ект). У якасці аперацый бяруцца аперацыі логікі выказванняў $\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ і квантары $\forall, \exists$, суб'ектна-прэдыкатнае будаванне ўдакладняецца з дапамогай паняцця *прэдыката*. Магчымыя розныя варыянты будавання П.з., якія адрозніваюцца выбарам асноўных логікавых аперацый. Сістэма аксіём і правіла вывядзення выкарыстоўваюцца пры будаванні логіка-матэматычных злічэнняў (фармальных сістэм, напрыклад фармальнай арыфметыкі, аксіяматычнай тэорыі мностваў).

ПРЭДЫКА́ТНАЯ ЗМЕ́ННАЯ — зменная, магчымымі значэннямі якой з'яўляюцца *прэдыкаты*.

ПСЕЎДАМЕ́ТРЫКА н а м н о с т в е X — неадмоўная рэчаісная функцыя ρ на мностве ўсіх пар элементаў X, якая задавальняе ўмовы: а) калі $x = y$, то $\rho\,(x, y) = 0$; б) $\rho\,(x, y) = \rho\,(y, x)$;

в) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$, дзе x, y, z — адвольныя элементы X. У адрозненне ад *метрыкі* не патрабуецца, каб з $\rho(x, y) = 0$ вынікала, што $x = y$.

ПСЕЎДАРЫ́МАНАВА ПРАСТО́РА — прастора афіннай злучнасці (без кручэння), *датычная прастора* да якой у кожным пункце ёсць псеўдаэўклідава прастора.

ПСЕЎДАЭЎКЛІ́ДАВА ВЕ́КТАРНАЯ ПРАСТО́РА — рэчаісная вектарная прастора, у якой кожным двум вектарам $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ адпавядае рэчасіны лік $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ — скалярны здабытак, які задавальняе чатыры наступныя аксіёмы: $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$; $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$; $(\alpha \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) = \alpha(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$; існуюць такія n вектараў $\boldsymbol{l}_i$, што $\boldsymbol{l}\alpha \cdot \boldsymbol{e}\alpha > 0$, $\alpha \leq l$; $\boldsymbol{l}_\beta \cdot \boldsymbol{l}_\beta < 0$, $\beta > l$; $\boldsymbol{l}_i \cdot \boldsymbol{l}_j = 0$, $i \neq j$, $i, j = 1, ..., n$.

Лік n называецца памернасцю П.в.п., l — яго індэксам.

ПУАСО́НА ІНТЭГРА́Л — інтэгральнае выражэнне развязку *Дырыхле задачы* для *Лапласа раўнання* ў найпрасцейшых абсягах. У прыватнасці, для круга ў $\mathbf{R}^2$ адзінкавага радыуса з цэнтрам у нулі гэты інтэграл мае выгляд

$$U(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\Theta}) \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\varphi - \Theta) + r^2} d\Theta,$$

дзе f — дадзеная непарыўная на адзінкавай акружыне функцыя, r, φ — палярныя каардынаты. Упершыню ўвёў С.Пуасон (1823).

ПУАСО́НА РАЗМЕРКАВА́ННЕ — размеркаванне імавернасцяў выпадковай велічыні X, якая прымае цэлалікавыя неадмоўныя значэнні $k = 0, 1, 2, ...$ з імавернасцямі $P_k(\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, дзе $\lambda > 0$ — параметр. Да П.р. імкнецца *Бэрнулі размеркаванне* пры $n \to \infty$, калі $np \to \lambda$. П.р. мае матэматычнае спадзяванне $Mx = \lambda$ і $Dx = \lambda$. П.р. трапляецца пры разліках ліній сувязі, працэсаў радыеактыўнага распаду і г.д. У статыстыцы ў якасці параметра λ бяруць $\bar{X} = \frac{X_1 + ... + X_n}{n}$, дзе X_i — рэалізацыі. Ацэнка $\bar{X}$ пазбаўленая сістэматычнай памылкі і яе квадратовае адхіленне мінімальнае.

ПУАСО́НА РАЎНА́ННЕ — дыферэнцыяльнае раўнанне з частковымі вытворнымі

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f;$$

адно з асноўных раўнанняў тэорыі патэнцыялаў (П.р. пры $f = 0$ — Лапласа раўнанне); прыклад неаднароднага раўнання эліптычнага тыпу. Упершыню разгледзеў С.Пуасон (1812). П.р., у прыватнасці, вызначае ўнутры абсягу патэнцыял аб'ёмных масаў, размеркаваных у гэтым абсягу.

ПУАСО́НА ТЭАРЭ́МА — 1) лімітавая тэарэма імавернасцяў, якая з'яўляецца прыватным выпадкам *вялікіх лікаў закону*. П.т. абагульняе *Бэрнулі тэарэму* на выпадак незалежных выпрабаванняў, у якіх імавернасць надыходу нейкай падзеі залежыць ад нумара выпрабавання (с х е м а П у а с о н а). Фармулёўка П.т.: калі ў паслядоўнасці незалежных выпрабаванняў падзея A настае з імавернасцямі p_k, якія залежаць ад нумара выпрабавання k $(k = 1, 2, ...)$, $\frac{\mu_n}{n}$ — частасць A у першых n выпрабаваннях, то для кожнага $\varepsilon > 0$ імавернасць няроўнасці

$$\left| \frac{\mu_n}{n} - \frac{p_1 + ... + p_n}{n} \right| \leq \varepsilon$$

імкнецца да 1 пры $n \to \infty$. Тэарэма Бэрнулі вынікае з П.т. пры $p_1 = ... = p_n$; 2) П.т. — лімітавая тэарэма тэорыі імавернасцяў пра збежнасць *біномнага размеркавання* да *Пуасона размеркавання*: калі $P_n(m)$ — імавернасць таго, што ў n выпрабаваннях Бэрнулі нейкая падзея A настае m разоў і імавернасць яе роўная p, то пры вялікіх значэннях n і $1/p$ імавернасць $P_n(m)$ блізкая да $\exp(-np)\frac{(np)^m}{m!}$.

Велічыня $\lambda = np$ роўная сярэдняму значэнню колькасці надыходаў A у n выпрабаваннях, а паслядоўнасць значэнняў $e^{-\lambda}\frac{(\lambda)^m}{m!}$, $m = 0, 1, 2, ...$, утварае размеркаванне Пуасона. П.т. у выглядзе няроўнасці для больш агульнай (чым схема Бэрнулі) схемы выпрабаванняў: калі падзея надыходзіць у k-м выпрабаванні з імавернасцю p_k $(k = 1, 2, ...)$, то пры $n \geq 2$ праўдзіцца няроўнасць

$$\left| P_n(m) - e^{-\lambda}\frac{(\lambda)^m}{m!} \right| \leq \delta,$$

дзе $\lambda = p_1 + ... + p_n$, $\delta = p_1^2 + ... + p_n^2$. Гэтая няроўнасць паказвае памылку, якая ўзнікае пры замене $P_n(m)$ велічынёй $e^{-\lambda}\frac{(\lambda)^m}{m!}$.

ПУАСО́НАВА ПЛЫНЬ — тое, што *пуасонаў працэс*. Тэрмін выкарыстоўваецца, як правіла, у тэорыі масавага абслугоўвання.

ПУАСО́НАЎ ПРАЦЭ́С — выпадковы працэс $x(t)$ з незалежнымі прыростамі $x(t_2) - x(t_1)$, $t_2 > t_1$, якія маюць *Пуасона размеркаванне*. Для аднароднага П.п. пры адвольных $t_2 > t_1$ праўдзіцца роўнасць

$$P\{x(t_2) - x(t_1) = k\} = \frac{\lambda^k (t_2 - t_1)^k}{k!} \exp(-\lambda (t_2 - t_1)),$$

$k = 0, 1, 2, \ldots$. Канстанта $\lambda > 0$ называецца інтэнсіўнасцю П.п. $x(t)$. Траекторыі П.п. $x(t)$ — кавалкава-сталыя функцыі з адзінкавымі скачкамі ў моманты τ_n, $0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots$. Велічыні $\tau_{n+1} - \tau_n$, $n = 1, 2, \ldots$ з'яўляюцца незалежнымі і маюць паказнікавае размеркаванне са шчыльнасцю $\lambda \exp(-\lambda t)$, $t \geq 0$. У неаднародных П.п. інтэнсіўнасць $\lambda(t)$ залежыць ад часу t, размеркаванне $x(t_2) - x(t_1)$ вызначаецца формулай:

$$P\{|x(t_2)\} - x(t_1)| = k\} = \frac{\left[\int_{t_1}^{t_2} \lambda(\tau) d\tau\right]}{k!} \exp\left(\int_{t_1}^{t_2} \lambda(\tau) d\tau\right),$$

$k = 0, 1, 2, \ldots$. П.п. — гэта матэматычная мадэль, якая выкарыстоўваецца ў дастасаваннях тэорыі імавернасцяў. У прыватнасці, з дапамогай П.п. апісваецца аднародная плынь патрабаванняў у тэорыі масавага абслугоўвання.

ПУНКТ — адно з асноўных паняццяў *геаметрыі*, якое ёсць *неазначальнае паняцце* ў змястоўнай аксіяматыцы, выкарыстоўваецца як зыходнае пры сістэматычным выкладанні геаметрыі. У "*Пачатках*" *Эўкліда* П. называюць "тое, што не мае частак". У сучаснай матэматыцы П. называюцца элементы самай рознай прыроды (напрыклад, у n-мернай *эўклідавай прасторы* П. называецца ўпарадкаваная сукупнасць з n лікаў).

У многіх галінах матэматыкі сустракаюцца П., якія маюць спецыяльныя назовы, напрыклад *асаблівы пункт*. Так, у геаметрыі вывучаюцца асаблівыя П. крывых; у матэматычным аналізе — асаблівыя П. развязкаў дыферэнцыяльных раўнанняў, асаблівыя П. аналітычных функцый; у тэорыі мноства сустракаем П., якія характарызуюць уласцівасці разгляданага мноства (гл. *Лімітавы пункт*, *Межавы пункт*, *Шчыльнасці пункт*).

ПУСТО́Е МНО́СТВА — мноства, якое не змяшчае ніводнага элемента. П.м. абазначаюць сімвалам $\varnothing$. Крыніцай узнікнення паняцця П.м. з'яўляецца сам спосаб задання пэўных мностваў. Часам невядома, існуюць элементы мностваў з зададзенай уласцівасцю ці не. Да П.м. прыходзяць з жадання, каб вынік кожнай аперацыі над мноствамі быў таксама мноствам. П.м. ёсць падмноства ўсякага мноства.

ПУЧО́К — сям'я ліній на плоскасці або паверхняў у прасторы, лінейна залежных ад аднаго параметра. Няхай $F_1(x, y) = 0$ і $F_2(x, y) = 0$ — раўнанні плоскіх ліній. Тады $\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 = 0$ (дзе λ_1 і λ_2 такія, што $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0$) — раўнанне пучка. Гэтае раўнанне фактычна залежыць ад аднаго параметра $\lambda_1 : \lambda_2$. Аналагічна запісваецца выпадак паверхняў у прасторы.

ПЭА́НА АКСІЁМЫ — сістэма аксіём для паслядоўнасці натуральных лікаў. Прапанаваў *Дж. Пэана* (1889). Гл. таксама *Арыфметыка*.

ПЭ́ЛЯ РАЎНА́ННЕ — *дыяфантава раўнанне* выгляду

$$x^2 - Dy^2 = 1, \qquad (1)$$

дзе D — натуральны лік, які не з'яўляецца квадратам іншага натуральнага ліку. Разглядаецца таксама больш агульнае раўнанне

$$x^2 - Dy^2 = C, \qquad (2)$$

дзе C — цэлы лік. Усе развязкі раўнання (1) можна атрымаць па формуле:

$$x + y\sqrt{D} = m(x_0 + y_0\sqrt{D})^n,$$

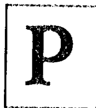
дзе n — адвольны лік, (x_0, y_0) — развязак з найменшымі дадатнымі значэннямі зменных. Агульнае раўнанне (2) або не мае развязкаў, або мае бясконца многа развязкаў. Развязкі П.р. выкарыстоўваюцца пры знаходжанні аўтамарфізмаў бінарных квадратовых формаў $ax^2 + bxy + cy^2$. Імем Пэля раўнанне назваў Л.Ойлер, які памылкова прыняў перакладніка кнігі па тэорыі лікаў за аўтара.

ПЯТЛЯ́ псеўдаграфа — дуга (або кант), у якіх пачатак і канец супадаюць.

ПЯ́ТЫ ПАСТУЛА́Т — сцверджанне *эўклідавай геаметрыі*, якое можна сфармуляваць наступным чынам: праз кожны пункт M па-за простай AB (на плоскасці, што праходзіць праз M і AB) можна правесці адну і толькі адну простую, якая не перасякае AB (паралельную AB).

Сцверджанне было сфармулявана Эўклідам у іншым выглядзе (сэнс той жа) і ўваходзіла ў сістэму аксіём эўклідавай геаметрыі. Пачынаючы з

часоў старажытнай Грэцыі матэматыкі спрабавалі вывесці гэтае сцверджанне з іншых аксіём, г.зн. даказаць яго як тэарэму. Сярод іх А.Хаям (11 ст.), Дж.Сакеры (1733), Ё.Лямбэрт (1766), А.Лежандр (1800) і інш. У выніку гэтых спробаў былі ўдасканалены метады матэматычнай логікі, але развязаць гэтую праблему не ўдавалася, бо звычайна замест П.п. уводзілася эквівалентнае яму сцверджанне. На аснове матэматычнага метаду доказу ад процілеглага П.Лабачэўскі (1826), Я.Больяі (1832) і К.Гаўс незалежна адзін ад аднаго пабудавалі геаметрыю, у якой П.п. быў заменены наступным сцверджаннем: праз кожны пункт M па-за простай AB (на плоскасці, што праходзіць праз M і AB) можна правесці не менш як дзве простыя, якія не перасякаюць AB. Гэтая геаметрыя называецца *Лабачэўскага геаметрыяй* і ўяўляе сабою адно з буйнейшых матэматычных дасягненняў 19 ст. Яе несупярэчлівасць даказвае незалежнасць П.р. ад іншых аксіём эўклідавай геаметрыі.



РАБА́СНАСЦЬ (ад анг. robust — моцны, устойлівы) — уласцівасць устойлівасці статыстычных крытэраў і ацэнак у дачыненні да малых скажэнняў звестак, што апрацоўваюцца, і мадэльных меркаванняў пра іх (такіх, як неаднароднасць выбаркавых значэнняў, іх статыстычная залежнасць, наяўнасць "выкідаў", парушэнне "гаўсавасці" выбаркі). Вядомыя два асноўныя падыходы да даследавання Р. статыстычных працэдур: мінімальны падыход П.Х'юберта і падыход Ф.Хампеля, заснаваныя на функцыях уплыву.

РАДЫКА́Л (ад лац. radicalis — карэнны) — 1) матэматычны знак $\sqrt[n]{\ }$, які абазначае аперацыю *каранявання* — развязвання алгебраічнага раўнання $x^n - a = 0$. Сімвал $\sqrt[n]{a}$, дзе $n = 2, 3, \ldots$, азначае адзін або ўсе развязкі гэтага раўнання; 2) азначэнне, звязанае з тэорыяй асацыятыўных кольцаў, якое разглядалі А.Кураш і С.Аміцур. У гэтак званым класічным выпадку Р. азначаецца як найбольшы нільпатэнтны ідэал алгебры.

РА́ДЫУС АКРУ́ЖЫНЫ (с ф е р ы) (ад лац. radius — прамень) — адрэзак простай, які злучае пункт акружыны (сферы) з цэнтрам; таксама даўжыня гэтага адрэзка.

РА́ДЫУС ЗБЕ́ЖНАСЦІ — радыус круга збежнасці ступеневага шэрагу. Велічыня Р.з. R вызначаецца па формуле Кашы—Адамара:

$$R = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

дзе a_n — каэфіцыент n-га складніка ступеневага шэрагу ($a_n \in C$).

РА́ДЫУС КРЫВІЗНІ́ к р ы в о й — радыус *судатычнай акружыны*.

РА́ДЫУС-ВЕ́КТАР — азначаецца для адвольнага пункта прасторы як вектар, накіраваны ў гэты пункт з нейкага фіксаванага пункта (*полюса*). Калі полюс з'яўляецца пачаткам дэкартавай прамавугольнай сістэмы каардынат, то праекцыі Р.-в. пункта M — каардынаты M.

РАДЫЯ́Н (ад лац. radius — прамень) — велічыня вугла, адпаведнага дузе акружыны з даўжынёй, роўнай радыусу (змяшчае прыблізна 57°17′44″); адзінка вымярэння кругавога або радыяннага вуглоў. Радыянная мера α і градусная мера $n°$ звязаныя формулай $180°\ \alpha = \pi n°$.

РАЗБЕ́ЖНАЯ ПАСЛЯДО́ЎНАСЦЬ — паслядоўнасць пунктаў тапалагічнай прасторы, якая не мае ліміту. З усякай Р.п. метрычнага кампакта можна вылучыць збежную паслядоўнасць. Калі паслядоўнасць пунктаў змяшчае дзве паслядоўнасці, збежныя да розных лімітаў, то гэта — Р.п. Адна і тая ж паслядоўнасць можа быць збежнай у адной унармаванай прасторы і разбежнай у іншай. Напрыклад, ліміт паслядоўнасці

$$(x_n) = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$$

у прасторы р э ч а і с н ы х л і к а ў роўны e, але ён не існуе ў прасторы р а ц ы я н а л ь н ы х л і к а ў.

РАЗБЕ́ЖНЫ ІНТЭГРА́Л — паняцце, процілеглае тэрміну "збежны інтэграл" (гл. *Неўласцівы інтэграл*). Інтэграл з бясконцымі межамі інтэгравання ці з неабмежаванай падынтэгральнай функцыяй называецца Р.і., калі ён мае бясконцае значэнне або не мае ніякага пэўнага значэння. Напрыклад, інтэгралы $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^a}$, $a \geq 1$, і $\int\limits_0^\infty \cos xdx$ ёсць Р.і., бо $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^a} = \infty$, а $\lim\limits_{A\to\infty} \int\limits_0^A \cos xdx$ не існуе. У некаторых выпадках неўласцівым Р.і. мож-

на прыпісваць пэўныя значэнні, напрыклад, калі $\int_{+\infty}^{-\infty} f(x)dx$ ёсць Р.і., але існуе $\lim_{a\to+\infty}\int_{-A}^{A} f(x)dx = B$, то лік B называюць галоўным значэннем Р.і. і абазначаюць $v.p. \int_{+\infty}^{-\infty} f(x)dx$. Так, $v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{1+x^2} = 0$.

РАЗБЕ́ЖНЫ ШЭ́РАГ — шэраг, паслядоўнасць частковых сумаў якога не мае канцага ліміту. Напрыклад, шэрагі

$$1-1+1-1+...+(-1)^{n-1}+...,$$

$$1+2+3+4+...+n+...,$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n}+...$$

разбягаюцца. Р.ш. могуць узнікаць: пры перамнажэнні шэрагаў, якія ўмоўна збягаюцца; пры раскладанні функцыі ў шэраг Фур'е; пры дыферэнцаванні і інтэграванні функцыйных шэрагаў і г.д. Існуюць шматлікія класы Р.ш., якія збягаюцца ў тым або іншым абагульненым сэнсе, г.зн. кожнаму такому шэрагу можна прысвоіць нейкую абагульненую суму, якая мае істотныя ўласцівасці сумы збежных шэрагаў (гл. *Сумаванне*).

РАЗВАЖА́ННЕ ЛАГІ́ЧНАЕ — разважанне (меркаванне), якое абапіраецца на аксіёмы дадзенай тэорыі, на шэраг дапушчэнняў або гіпотэз і складаецца з паслядоўнага пераходу ад гэтых аксіём і гіпотэз да новых, лагічна звязаных з папярэднімі сцверджаннямі з мэтай высвятлення праўдзівасці пэўнага сцверджання. У працэсе такога разважання ўзнікае цэлы ланцужок паслядоўна вылучаных сцверджанняў: адны з іх — у якасці аксіём ці дапушчэнняў, а кожнае з астатніх лагічна вынікае з некаторых раней сфармуляваных у дадзеным працэсе сцверджанняў. Апошнім павінна быць сцверджанне, праўдзівасць якога абгрунтоўваецца гэтым разважаннем. Часта Р.л. называюць менавіта гэты ланцужок узаемазвязаных сцверджанняў. Пераход ад аксіём і дапушчэнняў шляхам Р.л. да новых сцверджанняў мае важнае значэнне пры аксіяматычным будаванні матэматычных тэорый.

Калі аксіяматычная тэорыя задаецца як фармальная сістэма, то ўсе сцверджанні запісваюцца як формулы гэтай тэорыі, а спосабы Р.л. задаюцца як чыста фармальныя *вывядзення правілы.* В ы в я д з е н н е м з мноства гіпотэз Г называецца конечная паслядоўнасць формул гэтай тэорыі, кожная з якіх ёсць або аксіёма, або належыць Г, або атрыманая з папярэдніх формул з дапамогай аднаго з правілаў вывядзення. Формула называецца в ы в о д н а й з мноства гіпотэз Г, калі ёсць Р.л., апошняя формула якога — гэтая формула.

Для тэорый 1-га парадку, заснаваных на злічэнні прэдыкатаў, паняцце фармальнага вывядзення адэкватнае інтуітыўнаму паняццю лагічнага вывядзення, бо на падставе *Гёдэля тэарэмы пра поўнасць* для кожнай формулы, якая лагічна вынікае з аксіём дадзенай тэорыі і гіпотэз Г, існуе фармальнае вывядзенне такой формулы ў дадзенай тэорыі.

РАЗВЯ́ЗАК, р а ш э н н е — значэнне x з мноства праўдзівасці пэўнага прэдыката $A(x)$ або задачы. У якасці $A(x)$ можа быць некаторае раўнанне, няроўнасць або іх сістэма і г.д. Калі $A(x)$ — алгебраічнае раўнанне, то Р. называецца к о р а н е м. Мноства развязкаў раўнання (няроўнасці) можа быць пустым, мець канцую або бясконцую колькасць элементаў. Апошняе часта залежыць ад таго, на якім мностве разглядаецца зменная x. Напрыклад, раўнанне $x^2+1=0$ не мае Р. у мностве рэчаісных лікаў і мае два Р. у мностве камплексных лікаў. Гл. таксама *Развязанне.*

РАЗВЯЗА́ЛЬНАЕ МНО́СТВА — тое, што *рэкурсіўнае мноства.*

РАЗВЯЗА́ЛЬНАЯ ГРУ́ПА — група, якая мае нармальную паслядоўнасць падгрупаў з абэлевымі фактарамі (г.зн. існуе ланцужок падгрупаў $G = G_0 \supset G_1 \supset ... \supset G_n = 1$, дзе кожная G_i — нармальная падгрупа на G_{i-1}, а фактар-група G_i / G_{i-1} абэлева). Даўжыня найкарацейшага нармальнага шэрагу называецца с т у п е н н ю р а з в я з а л ь н а с ц і.

Усякая падгрупа і фактар-група Р.г. ёсць Р.г. Групы падстановў S_3 і S_4 развязальныя, а ўсе іншыя S_n пры $n \geq 5$ неразвязальныя. Група ўсіх верхніх трохвугольных матрыц — Р.г. Кожная матрычавая Р.г. змяшчае нармальную падгрупу канцага індэкса, спалучаную з падгрупай групы верхніх трохвугольных матрыц. Тэрмін Р.г. узнік у тэорыі Галуа ў сувязі з пытаннем пра развязальнасць алгебраічных раўнанняў у радыкалах. Такое раўнанне развязальнае ў радыкалах, калі і толькі калі яго група Галуа ёсць Р.г. Тэорыю лінейных Р.г. пабудаваў беларускі матэматык Дз.Супруненка.

РАЗВЯЗА́ЛЬНАЯ ФО́РМУЛА — формула дадзенай фармальнай сістэмы, якая ёсць або даказальная ў гэтай сістэме (г.зн. з'яўляецца тэарэмай), або абвяргальная (г.зн. даказальнае яе адмоўе).

РАЗВЯЗА́ННЕ, р а ш э н н е — працэс пошуку *развязкаў* пэўнага раўнання, няроўнасці, задачы. Развязаць раўнанне (сістэму, няроўнасць, задачу і да т.п.) — г.зн. знайсці ўсе развязкі або даказаць, што іх няма.

РАЗГО́РНУТЫ ВУ́ГАЛ — вугал, промні якога ўтвараюць простую; роўны суме двух прамых вуглоў.

РАЗГО́РТВАЛЬНАЯ ПАВЕ́РХНЯ — паверхня, утвораная паваротам простай. Пры дапамозе выгіну Р.п. можа быць размешчаная (разгорнутая) на плоскасці.

РАЗГО́РТКА м н а г а г р а н н і к а — мноства многавугольнікаў, на старанах і вяршынях якіх вызначаная паслядоўнасць іх злучэння, каб атрымаць зыходны мнагаграннік. Р. абсягу *разгортвальнай паверхні* — абсяг плоскасці, ізаметрычны зададзенаму абсягу. Будаванне Р. можа быць здзейсненае графічна сродкамі *нарыснай геаметрыі*.

РАЗМА́Х ВЫ́БАРКІ — рознасць паміж найбольшым і найменшым значэннямі вынікаў назіранняў. У матэматычнай статыстыцы Р.в. выкарыстоўваюць для ацэнкі квадратовага адхілення.

РАЗМЕРКАВА́ЛЬНЫ ЗАКО́Н — тое, што *дыстрыбутыўнасць*.

РАЗМЕРКАВА́ННЕ ІМАВЕ́РНАСЦЯЎ — заданне імавернасцяў усіх выпадковых падзей, якія апісваюць некаторую выпадковую з'яву. Калі выпадковая велічыня x прымае канцае або злічальнае мноства значэнняў $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ з імавернасцямі

$$P(x = x_n) = p_n\left(p_n > 0,\ \sum_n^{\infty} p_n = 1\right),$$

то Р.і. называюць д ы с к р э т н ы м і. Прыклады дыскрэтных Р.і.: *біномнае размеркаванне*, *Пуасона размеркаванне.*

Часта заданне Р.і. вышэй азначаным чынам немагчымае. Калі, напрыклад, выпадковая велічыня можа прымаць усе значэнні з пэўнага прамежку $[a, b]$, то Р.і. задаецца імавернасцямі таго, што выпадковая велічыня прымае значэнні з кожнага зададзенага прамежку $I \subset [a, b]$. Калі існуе функцыя $p(x) \geq 0$ такая, што $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$ і для якой пры адвольным інтэрвале (c, d) праўдзіцца роўнасць

$$P(c < x < d) = \int_c^d p(x)dx,$$

то Р.і. называюць а б с а л ю т н а н е п а р ы ў н ы м, а функцыю $p(x)$ — ш ч ы л ь н а с ц ю і м а в е р н а с ц і. Пры раўнамерным размеркаванні на адрэзку $[a, b]$ функцыя $p(x)$ мае выгляд

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in (a, b) \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases},$$

а для нармальнага размеркавання

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

дзе $-\infty < a < \infty$ і $\sigma > 0$. Існуюць і больш складаныя Р.і. — с і н г у л я р н ы я р а з м е р к а в а н н і.

РАЗМЕРКАВА́ННЯ ЗАКО́Н — апісальны тэрмін, які ў залежнасці ад кантэксту можа азначаць *размеркаванне імавернасцяў* (напрыклад, якой-небудзь выпадковай велічыні) або адпаведную *размеркавання функцыю* ці *шчыльнасць імавернасці.*

РАЗМЕРКАВА́ННЯ ФУ́НКЦЫЯ — функцыя $F_\xi(x) = P\{\xi < x\}$ аднамернай выпадковай велічыні ξ. Яе ўласцівасці: а) $0 \leq F_\xi(x) \leq 1$; б) $F_\xi(x)$ — манатонная неспадальная функцыя; в) $\lim_{x\to+\infty} F_\xi(x) = 1$, $\lim_{x\to-\infty} F_\xi(x) = 0$; г) $F_\xi(x)$ — непарыўная злева функцыя. Гл. таксама *Дыскрэтнае размеркаванне*, *Непарыўнае размеркаванне*, *Мнагамернае размеркаванне.*

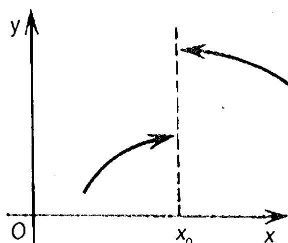
РАЗМЯШЧЭ́ННЕ з n э л е м е н т а ў п а m — концы ўпарадкаваны набор X з m элементаў n-элементавага мноства $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Калі ўсе элементы ў X розныя, то X называюць Р. б е з п а ў т о р а ў або проста Р. Колькасць Р. з n па m звычайна абазначаюць праз A_n^m, яе можна вылічыць па формуле $A_n^m = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)$. Калі элементы ў X не абавязкова розныя, то кажуць пра Р. з п а ў т о р а м і. Колькасць усіх Р. з n па m з паўторамі роўная n^m.

РАЗМЯШЧЭ́ННЯЎ ЗАДА́ЧА — адна з класічных *камбінаторных задач*, у якой патрабуецца знайсці колькасць $C_{nm}(r)$ спосабаў размяшчэння m розных прадметаў у n розных ячэях з зададзенай колькасцю r парожніх ячэяў. Мае месца формула

$$C_{nm}(r) = C_n^r \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^i C_{n-2}^i (n-r-i)^m,$$

дзе C_n^k — колькасць *спалучэнняў* з n на k.

РАЗРЫ́ВУ ПУНКТ — азначаецца для функцыі f: $E \to \mathbf{R}$ як такі пункт $x_0 \in E$, што не існуе $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ пры $x \in E$ (калі пункт x_0 ізаляваны, то ён не з'яўляецца Р.п.). Будзем лічыць, што x_0 — лімітавы пункт мноства E (рыс.). Калі $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$



пры $x \in E|x_0$ існуе (з'яўляецца лікам), але $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$, то можна разрыў скасаваць: увесці новую функцыю $f_1(x) = f(x)$ пры $x \in E \setminus x_0$ і $f_1(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ (у такім выпадку x_0 называецца скасавальным Р.п.). Калі $E \subset \mathbf{R}$ і існуюць концыя ліміты ("левы" і "правы") $f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ для $x \in E$, $x < x_0$ і $f(x_0 + 0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ для $x \in E$, $x > x_0$, для якіх выконваецца няроўнасць $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$, то x_0 — Р.п. першага роду. Ва ўсіх іншых выпадках разрыву x_0 называецца Р.п. другога роду.

РАЗРЫ́ЎНАЯ ФУ́НКЦЫЯ — функцыя, якая мае хоць бы адзін *разрыву пункт*. Сярод Р.ф. рэчаіснай зменнай выдзяляюцца *кавалкава-непарыўныя* і *прыступкавыя функцыі*, таксама Р.ф. класа Бэра; напрыклад, Р.ф. першага класа ёсць ліміт функцыйнай паслядоўнасці непарыўных функцый.

РАЗРЭ́ДЖАНАЯ МА́ТРЫЦА — матрыца з вялікай колькасцю нулявых элементаў, што дазваляе распрацоўваць спецыяльныя метады для дзеянняў з такімі матрыцамі. З іх дапамогай развязваюцца сістэмы лінейных раўнанняў з Р.м. значна большага памеру, чым сістэмы, якія развязваюцца звычайнымі метадамі.

РАНГ МА́ТРЫЦЫ — найвышэйшы з парадкаў адрозных ад нуля *мінораў* гэтай матрыцы. Р.м. над полем роўны найбольшаму ліку лінейна незалежных радкоў (або слупкоў) матрыцы. Р.м. не змяняецца пры элементарных пераўтварэннях матрыцы (пры перастаўленні радкоў ці слупкоў, множанні радка ці слупка на адрозны ад нуля лік і пры складанні радкоў ці слупкоў). Падобныя матрыцы маюць аднолькавы ранг. Ранг здабытку AB матрыцы A і B не перавышае рангу сумножнікаў. Калі A (або B) — незвыродная квадратная матрыца, то ранг AB роўны рангу другога сумножніка.

РА́НГАВЫ КРЫТЭ́Р — статыстычны крытэр, заснаваны на рангавай статыстыцы. Рангавай статыстыкай называецца статыстыка $T = T(R)$, якая ёсць функцыя ад вектара рангаў $R = (R_1, ..., R_n)$. Вектар рангаў будуецца на падставе выпадковага вектара назіранняў $X = (x_1, ..., x_n)$; i-я кампанента вектара рангаў вызначаецца паводле правіла $R_i = \sum\limits_{j=1}^{n} e(x_i - x_j)$, дзе $e(i)$ — адзінкавая функцыя Хэвісайда. Прыклады Р.к.: крытэры Вілкаксана і Мана—Уітні. Р.к. інварыянтны ў дачыненні да групы ўсіх пераўтварэнняў, якія задаюцца непарыўнымі строга нарастальнымі функцыямі і таму інварыянтныя да змены параметраў зруху і маштабу.

РАНДАМІЗА́ЦЫЯ — статыстычная працэдура, у якой намер выяўляецца выпадковым чынам. Няхай па рэалізацыі x выпадковай велічыні X, якая прымае значэнні ў выбаркавай прасторы (X, B, P), належыць выявіць намер з вымернай прасторы развязкаў, на якой зададзеная сям'я $\{Q_x\}$, $x \in X$, гэтак званых пераходных імавернасных размеркаванняў $Q_x(\cdot)$ такіх, што для адвольнай фіксаванай падзеі A функцыя ёсць B-вымерная ад x. У такім выпадку статыстычная працэдура выяўлення намеру, у якой па назіранай рэалізацыі выпадковай велічыні X намер выяўляецца з дапамогай розыгрышу паводле імавернаснага закону $Q_x(\cdot)$, называецца рандамізацыяй.

РАСКЛАДА́ННЕ — 1) Р. у шэраг функцыі, шэрагаванне функцыі — працэс пошуку шэрагу, які можна паставіць у адпаведнасць зададзенай функцыі $f(x)$, зыходзячы з пэўнай сістэмы функцый $(\varphi_n(x))_{n=0}^{\infty}$ (па якой раскладаем $f(x)$), і даследаванне атрыманага шэрагу на збежнасць да функцыі $f(x)$. Гл. *Раскладанне ў шэраг, Тэйлара шэраг, Фур'е шэраг, Чабышова мнагасклады*; 2) Р. вектара па базісе — выяўленне вектара ў выглядзе лінейнай камбінацыі базісных вектараў; 3) Р. мнагаскладу на множнікі — выяўленне мнагаскладу ў выглядзе здабытку двух або большай колькасці множнікаў меншай ступені, напрыклад, $x^4 - 4 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 2)$. Найпрацейшыя прыёмы

Р. на множнікі: вынясенне супольнага множніка за дужкі; спосаб групоўкі; скарыстанне формул скарочанага множання; 4) Р. р а ц ы я н а л ь н а й ф у н к ц ы і н а п р о с т ы я д р о б ы — гл. *Рацыянальная функцыя.*

РАСКЛАДА́ННЕ Ў ШЭ́РАГ ф у н к ц ы і $f(x)$ — функцыйны шэраг $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$ (дзе каэфіцыенты c_n знойдзены для $f(x)$ і сістэмы функцый $(\varphi_n(x))$ паводле пэўных формул), які на непустым мностве D збягаецца да $f(x)$, г.зн.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x), \quad x \in D. \qquad (1)$$

У выпадку роўнасці (1) кажуць яшчэ, што функцыя $f(x)$ выяўлена на D у выглядзе шэрагу Фур'е. Гл. таксама *Раскладанне, Тэйлара шэраг, Фур'е шэраг.*

РАСКЛА́ДАЎ ТЭО́РЫЯ — раздзел даследавання аперацый, у якім ствараюцца і аналізуюцца матэматычныя мадэлі *каляндарнага планавання* і распрацоўваюцца метады прыняцця планавых рашэнняў з выкарыстаннем гэтых мадэляў.

Многія вядомыя задачы Р.т. могуць быць ахопленыя наступнай схемай. На ўваход абслуговай сістэмы S, якая мае M прыстасаванняў, наступае мноства $N = \{1, 2, ..., n\}$ патрабаванняў. Патрабаванне $k \in N$ наступае ў момант часу d_k, працягласць яго абслугоўвання прыстасаваннем l складае t_{kl}. Пажаданы тэрмін завяршэння абслугоўвання — D_k. Кожнаму патрабаванню k адпавядае неспадальная функцыя $\varphi_k(t)$, якая характарызуе “штраф”, што трэба “заплаціць”, калі абслугоўванне гэтага патрабавання будзе завершана ў момант часу t. Працэс абслугоўвання патрабаванняў або павінен адбывацца безупынна, або могуць дапускацца спыненні з наступным дадатковым абслугоўваннем патрабаванняў. Ён можа спалучацца са спажываннем ці выкарыстаннем некаторых дадатковых рэсурсаў. Могуць быць накладзеныя пэўныя абмежаванні на паслядоўнасць абслугоўвання патрабаванняў і г.д. Калі кожнае патрабаванне можа быць поўнасцю абслужанае кожным з M прыстасаванняў, то S — а д н а с т а д ы й н а я с і с т э м а (з адным ці некалькімі паралельнымі прыстасаваннямі). У многастадыйных сістэмах для кожнага патрабавання звычайна задаецца паслядоўнасць (маршрут) праходжання прыстасаванняў. Калі гэтыя маршруты аднолькавыя для ўсіх патрабаванняў, то S — сістэма п л ы н е в а г а т ы п у. У сістэмах з нефіксаванымі маршрутамі кожнае патрабаванне павінна быць паслядоўна абслужанае кожным з прыстасаванняў, аднак парадак праходжання прыстасаванняў загадзя не зададзены і можа быць адвольным. Неабходна пабудаваць расклад (упарадкаванне ў часе) абслугоўвання патрабаванняў у сістэме S, пры якім сумарны або максімальны штраф найменшы. У залежнасці ад тыпу абслуговай сістэмы, характару абслугоўвання, параметраў патрабаванняў, функцый штрафу, крытэраў аптымальнасці атрымліваецца шырокі спектр аптымізацыйных задач, распрацоўка метадаў развязання якіх і складае асноўную мэту Р.т. у яе традыцыйным разуменні.

Задачы Р.т. у пераважнай большасці далучаюць да класа дыскрэтных аптымізацыйных задач. Метады Р.т. выкарыстоўваюцца пры планаванні і кіраванні ў гнуткіх вытворчых сістэмах, планаванні вылічальных працэсаў у сетках камп'ютараў, складанні раскладаў навучальных заняткаў і г.д. Сістэматычныя даследаванні ў галіне Р.т. пачаліся ў сярэдзіне 1950-х гг. У Беларусі ініцыятарам гэтых даследаванняў у пачатку 60-х гадоў выступіў акад. Дз.Супруненка, вядуцца яны ў асноўным у інстытутах матэматыкі і тэхнічнай кібернетыкі НАН Беларусі, БДУ.

РАСШЧАПЛЕ́ННЯ МЕ́ТАД — сеткавы метад развязання мнагамерных нестацыянарных задач, у якім пераход ад аднаго часавага пласта да іншага ажыццяўляецца з дапамогай паслядоўнага развязання падобных нестацыянарных задач з меншым лікам прасторавых зменных. Як правіла, Р.м. павінен быць пабудаваны такім чынам, каб выконваліся ўмовы абсалютнай устойлівасці, апраксімацыі ў тым або іншым сэнсе і эканамічнасці.

Звычайна для задач з p прасторавымі зменнымі пераход ад пласта да пласта праводзіцца з выкарыстаннем p дапаможных крокаў, на якіх развіваюцца аднамерныя рознасцевыя схемы па кожным кірунку. Таму часта Р.м. называецца таксама з м е н н ы х к і р у н к а ў м е т а д а м або д р о б н ы х к р о к а ў м е т а д а м. Маюць месца два падыходы да тэорыі Р.м. Адзін заснаваны на выкарыстанні паняццяў сastaўной схемы і сумарнай апраксімацыі. Схемы такога тыпу часта называюць л а к а л ь н а - а д н а м е р н ы м і або а д ы т ы ў н ы м і с х е м а м і. Годнасць гэтага падыходу ў яго прастаці і агульнасці, але дакладнасць атрыманых пры гэтым метадаў не вельмі высокая. Выкарыстоўваюцца таксама варыянты Р.м., у якіх расшчапленне праводзіцца не па прасторавых зменных, а па ф і з і ч н ы х п р а ц э с а х. Другі

падыход вылучае пробныя крокі з разгляду, рознасцевая схема і апраксімацыя разумеюцца ў звычайным сэнсе і незвычайнасць іх праяўляецца толькі ў тым, што на верхнім пласце схемы з'яўляецца рознасцевы аператар, які называецца ф а к т а р ы з а в а н ы м (расшчапляльным).

РАЎНАЗНАЧНАСЦЬ — тое, што *эквівалентнасць*.

РАЎНАЗНАЧНЫЯ РАЎНАННІ — тое, што *эквівалентныя раўнанні*.

РАЎНАМЕРНАЕ НАБЛІЖАННЕ — набліжанне функцый $f(x)$, непарыўных на множстве M, функцыямі $f_\alpha(x)$ з нейкага зададзенага класа, калі ў якасці меры набліжання разглядаюцца адхіленні ў раўнамернай метрыцы:

$$\rho(f, f_\alpha) = \sup_{x\in M} |f(x) - f_\alpha(x)|.$$

РАЎНАМЕРНАЕ РАЗМЕРКАВАННЕ — размеркаванне імавернасцяў на адрэзку $[a, b]$ выпадковай велічыні X, якое задаецца шчыльнасцю

$$p(x,a,b) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x\in(a,b) \\ 0, & x\notin[a,b] \end{cases}.$$

Р.р. мае матэматычнае спадзяванне $MX = (a+b)/2$ і дысперсію $DX = (a-b)^2/12$. Характарыстычная функцыя Р.р. мае выгляд

$$\frac{1}{it(b-a)}(e^{itb} - e^{ita}).$$

Звычайна на практыцы мадэлююць Р.р., а затым з дапамогай функцыйных пераўтварэнняў мадэлююць адвольнае непарыўнае размеркаванне.

РАЎНАМЕРНАЯ АБМЕЖАВАНАСЦЬ — уласцівасць сям'і F функцый $f(x)$, якія задавальняюць на дадзеным множстве X значэнняў x умову: існуе такі лік $C > 0$, што для кожнага $x\in X$ і ўсякай функцыі $f(x)$ з F выконваецца няроўнасць $|f(x)|<C$. Калі для раўнамерна абмежаванай сям'і F мае месца *роўнаступеневая непарыўнасць*, то ў ёй магчыма вылучыць паслядоўнасць, якая на дадзеным множстве X раўнамерна збягаецца да непарыўнай функцыі.

РАЎНАМЕРНАЯ ЗБЕЖНАСЦЬ — асобны выпадак *збежнасці*. Р.з. паслядоўнасці функцый $f_n: X\to Y$ (дзе X — адвольнае множства, а Y — метрычная прастора, $n = 1, 2, ...$) да функцыі $f: X\to Y$ азначае, што для адвольнага $\varepsilon > 0$ існуе такі нумар n_ξ, што для ўсіх нумароў $n > n_\xi$ і ўсіх пунктаў $x\in X$ выконваецца няроўнасць $\rho(f(x), f_n(x)) < \varepsilon$.

РАЎНАМЕРНАЯ НЕПАРЫЎНАСЦЬ — уласцівасць адлюстравання $f: X\to Y$ (дзе X, Y — метрычныя прасторы з метрыкамі ρ_X, ρ_Y): для кожнага $\varepsilon > 0$ існуе такі лік $\delta(\varepsilon) > 0$, што для ўсіх $x_1\in X$, $x_2\in X$, якія задавальняюць умову $\rho_X(x_1, x_2) < \delta$, выконваецца няроўнасць $\rho_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$. Раўнамерна непарыўнае адлюстраванне на зададзеным множстве непарыўнае на ім; адваротнае сцверджанне не праўдзіцца. Калі адлюстраванне $f: X\to Y$ непарыўнае на кампактнай прасторы X, то f раўнамерна непарыўнае на X. Кампазіцыя раўнамерна непарыўных адлюстраванняў ёсць раўнамерна непарыўнае адлюстраванне.

РАЎНАННЕ — аналітычны запіс задачы пошуку аргументаў функцый, пры якіх значэнні гэтых функцый роўныя. Аргументы, ад якіх залежаць функцыі, называюць н е в я д о м ы м і, а значэнні невядомых, пры якіх значэнні функцый роўныя, — р а з в я з к а м і раўнання. Сукупнасць развязкаў дадзенага Р. залежыць ад абсягу M значэнняў невядомых. Р. можа не мець развязкаў у M, тады яно называецца н е р а з в я з а л ь н ы м у абсягу M. Калі Р. р а з в я з а л ь н а е, то яно можа мець адно, некалькі або бясконцае множства развязкаў. Напрыклад, $x^4 - 4 = 0$ — неразвязальнае Р. у абсягу рацыянальных лікаў, але мае два развязкі $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$ у абсягу рэчаісных лікаў і чатыры развязкі $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$, $x_3 = i\sqrt{2}$, $x_4 = -i\sqrt{2}$ у абсягу камплексных лікаў. Калі Р. мае развязкамі ўсе лікі абсягу M, тады яно называецца т о е с н а с ц ю ў а б с я г у M. Напрыклад, Р. $x = \sqrt{x^2}$ — тоеснасць у абсягу неадмоўных лікаў і не з'яўляецца тоеснасцю ў абсягу рэчаісных лікаў. Для вызначэння развязкаў Р. часта карыстаюцца *эквівалентнымі раўнаннямі*.

Найбольш дакладна вывучаныя Р., для якіх функцыі f з'яўляюцца мнагаскладамі ад зменных x_i, $i = \overline{1, n}$ (а л г е б р а і ч н ы я Р.). Калі $f(x)$ — трансцэндэнтная функцыя, то Р. $f(x) = 0$ называецца т р а н с ц э н д э н т н ы м і ў залежнасці ад выгляду мае найменне трыганаметрычнага, лагарыфмічнага, паказнікавага, ірацыянальнага і інш. У т э о р ы і л і к а ў разглядаюць таксама *дыяфантавы раўнанні*, г.зн. Р. з некалькімі зменнымі, для якіх шукаюць цэлыя або рацыянальныя развязкі. Сукупнасць Р. называюць с і с т э м а й Р., калі ставіцца задача знаходжання развязку, які задавальняе ўсе роўнасці сукупнасці. Значэнні невядомых, якія адначасова праўдзяць усе гэтыя Р.,

называюць развязкамі сістэмы. З найбольш агульнага пункту гледжання Р. — запіс задачы пра вызначэнне такіх элементаў a пэўнага мноства A, што $F(a) = \Phi(a)$, дзе F і Φ — дадзеныя адлюстраванні мноства A у мноства B. Калі A, B — мноствы лікаў, то атрымліваюцца нададзеныя вышэй Р. Калі A, B — мноствы пунктаў у мнагамерных прасторах, тады ўзнікаюць сістэмы Р., калі ж A, B — мноствы функцый, то ў залежнасці ад характару адлюстраванняў узнікаюць *дыферэнцыяльныя раўнанні*, *інтэгральныя раўнанні* і інш.

РАЦЫЯНА́ЛЬНАЕ АДЛЮСТРАВА́ННЕ — абазначаецца для афіннай алгебраічнай мнагастайнасці $X \subset k^n$ як адлюстраванне, якое можа быць зададзена ў афінных каардынатах на k^n рацыянальнымі функцыямі:

$$f(x) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)),$$

дзе $f_i = p_i / q_i$; p_i, q_i — паліномы ад $x_1, \ldots, x_m$. Адлюстраванне алгебраічных мнагастайнасцяў $f\colon X \to Y$ называецца рацыянальным, калі ёсць пакрыцці $X = \cup V_\alpha$, $Y = \cup V_\beta$ адкрытымі афіннымі мноствамі такія, што $f(V_\alpha) \subset V_{\beta(\alpha)}$, і для адвольнага α $f|_{U_\alpha}: U_\alpha \to V_{\beta(\alpha)}$ — Р.а. афінных алгебраічных мностваў.

РАЦЫЯНА́ЛЬНАЯ ФУ́НКЦЫЯ ад адной зменнай над полем K — усякая функцыя $w = R(z)$, якую можна надаць у выглядзе

$$R(z) = P(z) / Q(z),$$

дзе

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n,\ Q(z) = \\ = b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_m$$

— мнагасклады ад z (цэлыя Р.ф.), $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_n \in K$ — канстанты, прычым $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$. Можна лічыць, што дроб P / Q — нескарачальны. Прыватны выпадак Р.ф. — дробава-лінейная функцыя ($n = m = 1$) і цэлая Р.ф. ($m=0$). Мноства ўсіх Р.ф. ад z над полем K ёсць поле (абазначаецца $K(z)$ і называецца трансцэндэнтным пашырэннем поля K).

Маюць месца агульныя ўласцівасці Р.ф. над полем **C** усіх камплексных лікаў. Мераморфныя скрозь на пашыранай камплекснай плоскасці $\hat{\mathbf{C}} := \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ функцыі і толькі яны з'яўляюцца Р.ф. Колькасць усіх полюсаў нясталай Р.ф. роўная колькасці ўсіх яе a-пунктаў (у прыватнасці, нулёў) і роўная max $\{n, m\}$; пры гэтым кожны пункт лічыцца столькі разоў, якая ў яго кратнасць. Калі назоўнік нескарачальнага дробу P / Q раскладзены на лінейныя множнікі

$$Q(z) = b_0 (z - z_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (z - z_r)^{k_r},$$

дзе $k_1 + \ldots + k_r = m$ і сярод лікаў $z_1, \ldots, z_r$ няма роўных, то гэты дроб адназначна надаецца ў выглядзе

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = M(z) + \sum_{\nu=1}^{r} \left[\frac{A_{\nu 1}}{z - z_\nu} + \ldots + \frac{A_{\nu_{k\nu}}}{(z - z_\nu)^{k\nu}} \right],$$

дзе M — мнагасклад, усе A_{ν_μ} знаходзяцца ў **C**. З гэтага выяўлення вынікае, што першаісная ад дробава-рацыянальнай функцыі — заўсёды *элементарная функцыя.*

РАЦЫЯНА́ЛЬНЫ ВЫ́РАЗ — алгебраічны выраз, які не змяшчае радыкалаў, напрыклад $a^2 + b^4, x^4 / y^2 - z^3$. Калі літары, якія ўваходзяць у Р.в., лічыць зменнымі, то Р.в. задае *рацыянальную функцыю* ад гэтых зменных.

РАЦЫЯНА́ЛЬНЫ ЛІК — лік, які можна запісаць у выглядзе дробу m / n, дзе m, n — цэлыя лікі ($n \neq 0$). Пры гэтым два дробы m_1 / n_1 і m_2 / n_2 лічаць роўнымі Р.л., калі $m_1 n_2 = m_2 n_1$. Асноўныя правілы дзеянняў над Р.л.:

$$\frac{m_1}{n_1} \pm \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 n_2 \pm m_2 n_1}{n_1 n_2};\quad \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 m_2}{n_1 n_2};$$

$$\frac{m_1}{n_1} : \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 n_2}{n_1 m_2}.$$

Мноства Р.л. з вышэй азначанымі дзеяннямі складання, адымання, множання і дзялення (акрамя дзялення на 0) ствараюць поле, якое абазначаюць **Q**. Існуе іншае азначэнне Р.л. як бясконцых дзесятковых перыядычных дробаў. Абодва азначэнні эквівалентныя. Поле Р.л. не з'яўляецца поўным. Яго мінімальнае папаўненне з уласцівасцю непарыўнасці — мноства *рэчаісных лікаў.*

РАЦЫЯНА́ЛЬНЫ ПУНКТ — азначаецца для алгебраічнай мнагастайнасці X над полем K у выпадку, калі X — афіннае падмноства ў K^n, як пункт $x \in X$, усе каардынаты якога належаць да поля K. У агульным выпадку трэба выбраць адвольнае афіннае адкрытае падмноства $V \subset X$, да якога належыць пункт x. Мноства Р.п. мнагастайнасці можа быць пустым (напрыклад, мноства пунктаў мнагастайнасці $x^2 + y^2 = -1$ над полем R), але калі яно непустое, то шчыльнае паводле Зарыскага ў X.

РАШЭ́ННЕ — гл. *Развязак* і *Развязанне.*

РОД замкнёнай паверхні — тапалагічны інварыянт замкнёнай паверхні, які роўны колькасці яе асаблівасцяў, падобных на ручку ў гіры. Напрыклад, сфера мае род 0, тор — род 1. Азначэнне Р. алгебраічнай крывой гл. у арт. *Алгебраічная крывая*.

РО́ЗНАСЦЕВАЕ РАЎНА́ННЕ — раўнанне, якое змяшчае *концыя рознасці* шуканай функцыі. Няхай $y(n) = y_n$, $(n = 0, \pm 1, ...)$ — функцыя цэлалікавага аргумента і $\Delta^k y_n$ — концыя рознасці k-га парадку, $k = 1, 2, ..., m$. Тады раўнанне $F(n; y_n, ..., \Delta^m y_n) = 0$, дзе y — шуканая і F — дадзеная функцыі, называецца Р.р. Калі выразіць усе $\Delta^k y_n$ праз $y_n, y_{n+1}, ...$, то Р.р. можна запісаць у наступным выглядзе: $\Phi(n; y_n, ..., y_{n+m}) = 0$. Тэорыя лінейных Р.р. мае шмат агульнага з тэорыяй звычайных дыферэнцыяльных раўнанняў. Напрыклад, агульны развязак неаднароднага Р.р. падаецца ў выглядзе сумы якога-небудзь прыватнага развязку і агульнага развязку аднароднага Р.р.

РО́ЗНАСЦЕВЫХ СХЕ́МАЎ ТЭО́РЫЯ — раздзел *вылічальнай матэматыкі*, які вывучае метады набліжанага развязання дыферэнцыяльных раўнанняў шляхам іх замены рознасцевымі раўнаннямі (рознасцевымі схемамі). Р.с.т. вывучае спосабы будавання рознасцевых схемаў, даследуе іх карэктнасць і збежнасць, распрацоўвае алгарытмы развязання рознасцевых задач. Метад концых рознасцяў (метад сетак) — універсальны вылічальны метад. Асноўныя паняцці, якімі аперуе Р.с.т., — паняцці апраксімацыі, устойлівасці, збежнасці.

Няхай у n-мерным абсягу G з мяжой Γ шукаецца развязак дыферэнцыяльнага раўнання

$$Lu(x) = f(x), \quad x \in G \tag{1}$$

з пачатковымі і межавымі ўмовамі

$$lu(x) = \mu(x), \quad x \in \Gamma. \tag{2}$$

У метадзе концых рознасцяў абсяг $G \cup \Gamma$ набліжана замяняюць дыскрэтным мноствам пунктаў — сеткай $G_n \cup \Gamma_n$. Параметр n — крок сеткі. Вытворныя, якія ўваходзяць у (1) і (2), апраксімуюць на сетцы рознасцевымі стасункамі, атрымліваецца сістэма лінейных алгебраічных раўнанняў

$$L_n Y_n(x) = \Phi_n(x),\ x \in G_n,\ l_n Y_n(x) = X_n(x),\ x \in L_n, \tag{3}$$

дзе $Y_n(x)$ — шуканая сеткавая функцыя, $\Phi_n(x)$, $X_n(x)$ — дадзеныя сеткавыя функцыі, L_n і l_n — рознасцевыя аператары. Мноства раўнанняў (3), якое залежыць ад параметра n, называецца рознасцевай схемай.

Няхай мноства сеткавых функцый, зададзеных на $G_n \cup \Gamma_n$, утварае вектарную прастору H_n, а аператары L_n, l_n дзейнічаюць у гэтай прасторы; у прасторах развязкаў $Y_n(x)$ і правых частак $\Phi_n(x)$, $X_n(x)$ уводзяцца нормы $\|\cdot\|_{(1)}, \|\cdot\|_{(2)}, \|\cdot\|_{(3)}$.

Рознасцевая задача (3) пастаўленая карэктна, калі для ўсіх дастаткова малых n і пры адвольных $\Phi_n, X_n \in H_n$ існуе адзіны развязак і для яго выконваецца ацэнка

$$\|Y_n\|_{(1)} < M(\|\Phi_n\|_{(2)} + \|X_n\|_{(3)}). \tag{4}$$

Апошняя ўласцівасць называецца ўстойлівасцю рознасцевай схемы. Ацэнкі выгляду (4) развязку рознасцевай задачы называюцца апрыёрнымі ацэнкамі, і іх атрыманне складае аснову Р.с.т.

Калі рознасцевая задача (3) сфармуляваная карэктна і мае m-ы парадак апраксімацыі, то яна збягаецца з хуткасцю $O(h^m)$. Выкарыстанне рэальных сетак прад'яўляе да рознасцевых схемаў шэраг дадатковых патрабаванняў. Рознасцевая схема павінна добра мадэляваць характэрныя ўласцівасці зыходнага раўнання і быць простай для рэалізацыі вылічальнага алгарытму.

Пры развязанні сістэм рознасцевых раўнанняў, якія апраксімуюць мнагамерныя нестацыянарныя задачы матэматычнай фізікі, можа хутка расці лік арыфметычных аперацый, неабходных для пошуку развязку. Таму часта карыстаюцца найбольш эфектыўным прыёмам будавання эканамічных схемаў прывядзення мнагамернай задачы да некалькіх аднамерных.

Пры развязанні аднамерных рознасцевых задач ужываюць звычайна *прагону метад*, які ёсць варыянт метаду паслядоўнага скасавання невядомых. Для развязання мнагамерных сеткавых раўнанняў, як правіла, карыстаюцца ітэрацыйнымі метадамі.

РО́ЗНАСЦЕВЫЯ МЕ́ТАДЫ — метады набліжанага развязання дыферэнцыяльных раўнанняў, якія грунтуюцца на замене гэтых раўнанняў раўнаннямі ў дачыненні да функцый дыскрэтнага аргумента.

РО́ЗНАСЦІ КО́НЦЫЯ — функцыі дыскрэтнага змянення аргумента, якія вызначаюцца наступным чынам: Р.к. n-га парадку функцыі $y = f(x)$, якая зададзеная ў пунктах $x_k = x_0 + kn$ (n = const, k — цэлае), ёсць $\Delta^n y_k = \Delta^n f_k = \Delta^{n-1} f_{k+1} - \Delta^{n-1} f_k$, дзе

$\Delta y_k = \Delta f_k = f_{k+1} - f_k$, $f_k = f(x_k)$, $n = 1, 2, \ldots$. Ужываюцца таксама ц э н т р а л ь н ы я р о з н а с ц і, якія вызначаюцца аналагічным чынам. Калі $n \neq \neq \mathrm{const}$, выкарыстоўваюцца н а д з е л е н ы я р о з н а с ц і:

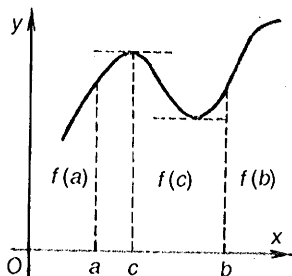
$$f[x_0;x_1] = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1},\ f[x_0;x_1;x_2] = \frac{f[x_0;x_1] - f[x_1;x_2]}{x_0 - x_2}$$

і г.д. Р.к. знаходзяць дастасаванне ў тэорыі набліжання функцый, пры набліжаным дыферэнцаванні і інтэграванні, пры набліжаным развязанні дыферэнцыяльных раўнанняў і іншых пытаннях. Мае месца аналогія паміж задачамі, у якіх выкарыстоўваецца Р.к. з дыферэнцыяльным і інтэгральным злічэннем. Напрыклад, аперацыя знаходжання рознасці адпавядае знаходжанню вытворнай і г.д.

РО́ЗНАСЦЬ — вынік *адымання*, г.зн. такі элемент $c = a - b$, што яго сума з b (адымнік) роўная a (*зменшыва*). Р. а р ы ф м е т ы ч н а й п р а г р э с і і — сталы лік d, роўны Р. двух суседніх элементаў гэтай прагрэсіі: $d = a_{n+1} - a_n$ (гл. *Арыфметычная прагрэсія*). Р. мностваў A і B — мноства ўсіх тых элементаў мноства A, якія не належаць мноству B; абазначаюць сімваламі $A \setminus B$ або $A - B$.

РО́ЛЯ ТЭАРЭ́МА — адна з тэарэм *дыферэнцыяльнага злічэння*, якую далучаюць да гэтак званых т э а р э м п р а с я р э д н я е. Калі функцыя f непарыўная на адрэзку $[a, b]$, дыферэнцавальная на інтэрвале (a, b) і $f(a) = f(b)$, то яе вытворная $f'(x)$ хоць бы адзін раз ператвараецца ў нуль на інтэрвале (a, b), г.зн. існуе такое ξ, $a < \xi < b$, што $f'(\xi) = 0$.

Геаметрычны сэнс Р.т. палягае ў тым, што на графіку (гл. рыс.) функцыі f, якая адпавядае ўмовам Р.т., існуе такі пункт, датычная ў якім паралельная восі Ox. З Р.т. вынікае, што паміж двума наслядоўнымі нулямі непарыўнай і дыферэнцавальнай функцыі (напрыклад, мнагасkладу) існуе хоць бы адзін нуль яе вытворнай. Упершыню тэарэму атрымаў у выпадку алгебраічных мнагаскладаў М.Роль (1690).



РОМБ — плоскі чатырохвугольнік з роўнымі старанамі. Р. з'яўляецца прыватным выпадкам *паралелаграма*. У сваю чаргу *квадрат* — прыватны выпадак Р.

РО́ТАР (ад лац. rotare — круціць) — тое, што *віхор*.

РОЎНАБАКО́ВАЯ ТРАПЕ́ЦЫЯ — *трапецыя* з роўнымі бакамі (бакавымі старанамі).

РОЎНАБАКО́ВЫ ТРОХВУГО́ЛЬНІК — *трохвугольнік*, у якога дзве стараны (б а к і) роўныя. У Р.т. вышыня, медыяна і бісектрыса, праведзеныя да магчыма няроўнай стараны (а с н о в ы), супадаюць.

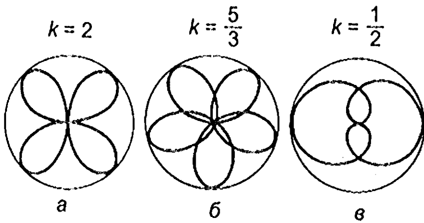
РОЎНАВЯЛІ́КІЯ І РАЎНАСКЛА́ДЗЕНЫЯ ФІГУ́РЫ — дзве фігуры эўклідавай плоскасці $\mathbf{R}^2$, якія маюць аднолькавыя плошчы і адпаведна два многавугольнікі A і B, якія можна разрэзаць на многавугольнікі так, што часткі, на якія разрэзалі A, роўныя адпаведным часткам, на якія разрэзалі B. Аналагічнае азначэнне і для прасторы $\mathbf{R}^3$ з заменай многавугольніка на мнагаграннік. Раўнаскладзеныя фігуры роўнавялікія, роўнавялікія многавугольнікі раўнаскладзеныя (тэарэма Бальяі—Гервіна). У прасторы гэта не заўсёды так (гл., напрыклад, *Дэна тэарэму*, якая дае адмоўны вынік да трэцяй праблемы Гільбэрта).

РОЎНАМАГУ́ТНЫЯ МНО́СТВЫ — мноствы, паміж якімі існуе ўзаемна адназначная адпаведнасць. Конпыя Р.м. — мноствы з аднолькавай колькасцю элементаў.

РОЎНАСТАРО́ННІ ТРОХВУГО́ЛЬНІК, п р а в і л ь н ы т р о х в у г о л ь н і к — трохвугольнік, у якога ўсе стораны роўныя. З'яўляецца *правільным многавугольнікам*.

РОЎНАСТУПЕ́НЕВАЯ НЕПАРЫ́ЎНАСЦЬ — уласцівасць сям'і F функцый f: $X \to Y$, дзе X, Y — кампактныя метрычныя прасторы з метрыкамі ρ_X, ρ_Y. Сям'я F мае Р.н., калі для кожнага $\varepsilon > 0$ існуе $\delta > 0$, што для ўсіх $x_1 \in X$, якія праўдзяць умову $\rho_X(x_1, x_2) < \delta$, і ўсякай функцыі f з F выконваецца няроўнасць $\rho_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$. Для кожнай функцыі з Р.н. сям'і функцый мае месца *раўнамерная непарыўнасць* на дадзеным мностве. Калі роўнаступенева непарыўная сям'я F раўнамерна абмежаваная, тады ў ёй магчыма вылучыць паслядоўнасць, якая на дадзеным мностве раўнамерна збягаецца да непарыўнай функцыі.

РУ́ЖЫ — плоскія крывыя, раўнанне якіх у палярных каардынатах мае выгляд $r = a \sin k\varphi$, дзе a і k — сталыя. Лік a дае радыус круга, у якім размяшчаецца ўся крывая (гл. рыс., *а—в*); ад k залежыць колькасць пялёсткаў, якія мае Р. Калі k — цэлы лік, то ў Р. k пялёсткаў пры k няцотным і $2k$ пялёсткаў — пры k цотным; калі $k = \frac{m}{n}$, дзе m, n — узаемна простыя, то Р. складаецца з m пялёсткаў пры m і n няцотных і з $2m$ пялёсткаў, калі хоць адзін з лікаў m або n цотны. Р. упершыню апісаў Г.Грандзі (1728).



РУ́НГЕ—КУ́ТА МЕ́ТАД — лікавы метад развязання задач Кашы для сістэм звычайных дыферэнцыяльных раўнанняў выгляду

$$y' = f(x, y), \quad x_0 \leq x \leq x, \tag{1}$$

$$y(x_0) = y_0, \tag{2}$$

дзе f: $[x_0, X] \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, $y_0 \in \mathbf{R}^n$. Метад аднакрокавы, для выкарыстання не патрабуе вылічэння пачатку табліцы.

Няхай $n = 1$ і значэнне развязку $y(x)$ задачы (1, 2) у пункце $x = x_j$ вядомае. У Р.—К.м. для вылічэння значэння $y(x_j + h)$ пры дастаткова малым $h > 0$ вызначаецца папраўка Δy_i:

$$\Delta y_i = \sum_{l=1}^{r} p_l k_l, \tag{3}$$

дзе $p_i \in R_0$, $k_1 = hf(x_j, y_j)$, $k_s = hf(x_j + \alpha_s h,\ y_j + \sum_{m=1}^{r-1} \beta_{sm} k_m)$, ds, $\beta_{sm} \in \mathbf{R}$. Цэлы лік r і каэфіцыенты p_i, α_s, β_{sm} выбіраюцца так, каб значэнне $y_{j+1} = y_j + Ay_j$ супадала найбольш дакладна са значэннем $y\ (x_j + h)$. Распрацавана вялікая колькасць правілаў Рунге—Кута (у тым ліку і няяўных), якія маюць адрозны парадак лакальнай дакладнасці і з'яўляюцца ўстойлівымі і збежнымі.

РУХ — пераўтварэнне *эўклідавай прасторы*, якое захоўвае адлегласць паміж двума пунктамі. Адрозніваюць Р. уласны (1-г а р о д у) і няўласны (2-г а р о д у) у залежнасці ад таго, захоўвае ці не захоўвае ён арыентацыю прасторы. У л а с н ы Р. на плоскасці можа быць зададзены ў прамавугольнай сістэме каардынат (x, y) формуламі:

$$x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi + a,\ \ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi + b.$$

Н я ў л а с н ы Р. на плоскасці можа быць зададзены ў прамавугольных каардынатах (x, y) формуламі:

$$x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi + a,\ \ y' = x\sin\varphi - y\cos\varphi + b.$$

А д в о л ь н ы Р. у прасторы з'яўляецца аваротам вакол нейкай восі, паралельным пераносам або можа быць пададзены ў выглядзе здабытку аваротy вакол якой-небудзь восі і наступнага паралельнага пераносу ўздоўж гэтай восі (ш р у б а в ы Р.).

РЫ́ЗЫКІ ФУ́НКЦЫЯ — характарыстыка, якая вызначае сярэднія страты эксперыментатара ў задачы выяўлення статыстычнага намеру. Няхай па рэалізацыі выпадковай велічыні X, якая прымае значэнні ў выбаркавай прасторы (X, B, P_0), $0 \in \Theta$, належыць выявіць намер d у дачыненні да параметра Θ. Няхай страты статыстыка ад выяўлення намеру d будуць вызначаныя функцыяй страт $L(\Theta, d)$. У такім выпадку, калі статыстык карыстаецца нерандамізаванай развязальнай функцыяй $\delta(x)$, то ў якасці характарыстыкі гэтай развязальнай функцыі ўжываюць функцыю

$$R(\Theta, \delta) = E_0\{L(\Theta, \delta(x))\} = \int_X L(\Theta, \delta(x))\, dP_\theta(x),$$

якая называецца Р.ф. (ці проста рызыкай) статыстычнай працэдуры.

РЫКА́ТЫ РАЎНА́ННЕ — звычайнае дыферэнцыяльнае раўнанне 1-га парадку выгляду

$$\frac{dy}{dx} + ay^2 = bx^\alpha,$$

дзе a, b, α — нейкія сталыя. У агульным выглядзе гэтае раўнанне даследаваў Я.Рыкаты (1723), хоць прыватныя выпадкі разглядаліся і раней. Калі $\alpha = -2$ або $\alpha = -4k\,(2k-1)$, $k \in \mathbf{Z}$, то Р.р. інтэгруецца ў элементарных функцыях (Д.Бэрнулі, 1724—25). У астатніх выпадках развязак раўнання атрымліваецца толькі з дапамогай *цыліндрычных функцый*. Існуюць абагульненні Р.р., якія маюць той жа назоў.

РЫ́МАНА ГЕАМЕ́ТРЫЯ — адна з *неэўклідавых геаметрый*, г.зн. геаметрычная тэорыя, заснаваная на аксіёмах, патрабаванні якіх адрозніваюц-

ца ад патрабаванняў аксіём эўклідавай геаметрыі. Асноўныя аб'екты, або элементы, трохмернай Р.г. — гэта пункты, простыя і плоскасці; асноўныя паняцці — паняцці прыналежнасці, парадку і кангруэнцыі. Патрабаванні прыналежнасці і парадку Р.г. супадаюць з патрабаваннямі аксіём *праектыўнай геаметрыі.*

Уласцівасці размяшчэння элементаў на плоскасці Рымана і ў прасторы Рымана супадаюць з уласцівасцямі размяшчэння элементаў на праектыўнай плоскасці і ў праектыўнай прасторы. Р.г. істотна адрозніваецца ад праектыўнай тым, што разглядае кангруэнцыю фігур і разам з тым вымярэнне геаметрычных велічынь (даўжыні, вуглоў, плошчаў, аб'ёмаў). Патрабаванні аксіём Р.г., якія датычаць кангруэнцыі, падобныя на патрабаванні адпаведных аксіём эўклідавай геаметрыі. Метрычныя ўласцівасці плоскасці Рымана "ў малым" супадаюць з метрычнымі ўласцівасцямі звычайнай сферы. Першыя даследаванні па Р.г. пачаў Б.Рыман (1854).

РЫМАНА ІНТЭГРАЛ — *вызначаны інтэграл* для некаторага класа разрыўных функцый. Уведзены Б.Рыманам (1853); для непарыўных функцый азначэнне Р.і., па сутнасці, даў А.Кашы (1823).

Няхай рэчаісная функцыя $f(x)$ зададзена на адрэзку $[a, b]$. Падзелім $[a, b]$ на n частак пунктамі $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ і абазначым $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta = \max_i \Delta x_i$, $i = \overline{1, n}$. Возьмем у кожным адрэзку $[x_{i-1}, x_i]$ адвольны пункт ξ_i, разгледзім суму $\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ і назавем яе інтэгральнай сумай Рымана, якая адпавядае дадзенаму падзелу адрэзка $[a, b]$ пунктамі x_i і выбару пунктаў ξ_i.

Лік I называецца лімітам інтэгральных сумаў Рымана пры $\Delta \to 0$, калі для адвольнага ліку $\varepsilon > 0$ існуе лік S такі, што для ўсіх інтэгральных сумаў σ, падпарадкаваных адзінай умове $\Delta < S$, выконваецца няроўнасць $|I - \sigma| < \varepsilon$. Калі існуе конечны ліміт I інтэгральных сумаў σ пры $\Delta \to 0$, то ён называецца вызначаным інтэгралам Рымана ад функцыі $f(x)$ на адрэзку $[a, b]$ і абазначаецца сімвалам $\int_a^b f(x)dx$.

У такім разе функцыю $f(x)$ называюць інтэгравальнай паводле Рымана на адрэзку $[a, b]$ пры $a < b$. Паводле азначэння лічаць, што

$$\int_b^a f(x)dx = 0 \text{ і } \int_b^a f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Неабходная і дастатковая ўмова існавання Р.і. — абмежаванасць функцыі $f(x)$ на $[a, b]$ і роўнасць нулю *Лебэга меры* мноства ўсіх пунктаў разрыву $f(x)$ на гэтым адрэзку.

Уласцівасці Р.і.: 1) калі існуе Р.і., то функцыя $f(x)$ абмежаваная на адрэзку $[a, b]$. Адваротнае сцверджанне, наогул кажучы, няправільнае. Напрыклад, *Дырыхле функцыя* абмежаваная на адрэзку $[a, b]$, але Р.і. ад яе не існуе; 2) лінейнасць Р.і. Калі функцыі $f(x)$ і $g(x)$ інтэгравальныя на $[a, b]$, то для адвольных канстантаў α і β функцыя $\alpha f(x) + \beta g(x)$ таксама інтэгравальная на $[a, b]$ і праўдзіцца роўнасць

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx;$$

3) адытыўнасць. Калі існуе Р.і. на кожным адрэзку $[a, b]$ і $[b, c]$, то існуе Р.і. на адрэзку $[a, c]$ і

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx;$$

4) калі $f(x)$ і $g(x)$ інтэгравальныя на $[a, b]$ і для ўсіх $x \in [a, b]$ праўдзіцца няроўнасць $f(x) \le g(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx;$$

5) з інтэгравальнасці на $[a, b]$ функцыі $f(x)$ вынікае інтэгравальнасць на гэтым адрэзку функцыі $|f(x)|$ і няроўнасць

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx;$$

6) тэарэма пра сярэдняе значэнне. Няхай функцыі $f(x)$ і $g(x)$ інтэгравальныя на адрэзку $[a, b]$, функцыя $g(x)$ неадмоўная або недадатная на $[a, b]$ і m, M — адпаведна дакладныя ніжняя і верхняя межы функцыі $f(x)$ на $[a, b]$. Тады існуе лік $\mu \in [m, M]$ такі, што праўдзіцца формула

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx.$$

Калі дадаткова патрабаваць, што $f(x)$ ёсць непарыўная на $[a, b]$, то знойдзецца такі пункт $\xi \in [a, b]$, што

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

РЫМАНА СФЕ́РА — сфера ў эўклідавай прасторы, якая ўзаемнаадназначна адлюстроўваецца на пашыраную камплексную плоскасць з дапамогай *стэрэаграфічнай праекцыі*. Напрыклад, можна ўзяць сферу S радыуса 1, якая датыкаецца ў пункце O да плоскасці α з сістэмай каардынат Oxy у ёй. Камплекснаму ліку $z = x + iy$ (якому на α адпавядае пункт $M(x, y)$) на сферы S адпавядае пункт $M' = MN \cap S$, дзе N — другі канец дыяметра з канцом O. У прыватнасці, ліку $z = 0$ на сферы адпавядае пункт O, бясконца аддаленаму пункту $z = \infty$ — пункт N. Калі ўвесці ў прасторы прамавугольную сістэму каардынат $O\xi\eta\zeta$ так, каб восі ξ і η супадалі з восямі x і y, то раўнанне сферы S будзе $\xi^2 + \eta^2 + \varsigma^2 - 2\varsigma = 0$; лёгка знаходзяцца каардынаты пункта M' на сферы, якому адпавядае лік $z = x + iy$:

$$\xi = 4x/\Delta,\ \eta = 4y/\Delta,\ \varsigma = 2(x^2 + y^2)/\Delta,$$
$$\Delta = 4 + x^2 + y^2.$$

РЫМАНА ТЭАРЭ́МА — 1) у камплексным аналізе: кожная адназлучная рыманава паверхня канформава эквівалентная толькі аднаму з трох абсягаў — сферы $\hat{\mathbf{C}} := \mathbf{C} \cup \{\infty\}$, плоскасці $\mathbf{C}$, кругу $|z| < 1$. (Пад канформавай эквівалентнасцю разумеюць існаванне канформавага гомеамарфізму паверхні на адпаведны абсяг.) У прыватнасці, Р.т. праўдзіцца для адназлучных абсягаў, што знаходзяцца ў $\hat{\mathbf{C}}$; 2) Р.т. пра ўмоўна збежныя шэрагі (гл. *Умоўная збежнасць*): калі шэраг з рэчаіснымі складнікамі ўмоўна збягаецца, то для адвольнага ліку A існуе такая перастанова складнікаў, што сума атрыманага шэрагу будзе роўная A.

РЫМАНАВА ЗЛУ́ЧНАСЦЬ — *злучнасць* спецыяльнага тыпу. Няхай (M, g) — гладкая мнагастайнасць M з рыманавай метрыкай g. Існуе адзіная афінная злучнасць ∇ на (M, g), якая не мае кручэння і такая, што паралельны перанос уздоўж крывых у дачыненні да гэтай злучнасці ёсць ізаметрычнае адлюстраванне датычных прастораў. Такая злучнасць называецца Р.з., або злучнасцю Леві — Чывіта. Вядома, што афінная злучнасць ∇ без кручэння з'яўляецца Р.з. на M, калі і толькі калі яе група галаноміі Γ належыць артаганальнай групе $O(n)$. З дапамогай тэнзара крывіні Р.з. азначаецца гэтак званая секцыйная крывіня (або крывіня ў двухмерным кірунку), якая абагульняе вядомае паняцце *гаўсавай крывіні*. У выпадку, калі секцыйная крывіня ў кожным двухмерным кірунку нязменная, маем прастору нязменнай крывіні.

РЫМА́НАВА МЕ́ТРЫКА на гладкай мнагастайнасці M — сіметрычнае дадатна вызначанае тэнзарнае поле g тыпу (0, 2). Мнагастайнасць M з Р.м. g называецца рыманавай мнагастайнасцю. Калі замест дадатнай вызначанасці поля g патрабаваць толькі яго неасаблівасць, тады прыйдзем да паняцця псеўдарыманавай метрыкі і псеўдарыманавай мнагастайнасці. У лакальнай карце (u, φ) на M з лакальнымі каардынатамі $(x_1, x_2, ..., x_n)$ Р.м. задаецца функцыямі

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right), \quad i, j = 1, 2, ..., n,$$

якія называюцца кампанентамі метрычнага тэнзара ў дачыненні да (u, φ). Р.м. існуе на кожнай сепарабельнай мнагастайнасці. Прыклады Р.м.: метрыка эўклідавай прасторы, а таксама першая квадратовая форма паверхні. Метрыка псеўдаэўклідавай прасторы (у прыватнасці, метрыка Мінкоўскага) — прыклад псеўдарыманавай метрыкі.

РЫМАНАВА МНАГАСТА́ЙНАСЦЬ — дыферэнцыяльная мнагастайнасць з *рыманавай метрыкай*. Тое, што *рыманава паверхня*.

РЫМАНАВА ПАВЕ́РХНЯ — мнагастайнасць M камплекснай памернасці 1, на якой зададзеная аналітычная структура. Структура задаецца атласам на M, г.зн. задаецца мноствам *картаў*.

Прыклады Р.п.: пашыраная камплексная плоскасць $\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$. Паняцце Р.п. першапачаткова ўвёў Б.Рыман з мэтай лепшага вывучэння мнагазначных аналітычных функцый, якія могуць узнікаць пры аналітычным працягу. Мнагазначная аналітычная функцыя становіцца адназначнай на спецыяльна пабудаванай паверхні, якая і ёсць Р.п. гэтай функцыі. Няхай, напрыклад, дадзена непрыводнае алгебраічнае раўнанне

$$f(z,w) \equiv \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} z^{\mu} w^{\nu} = 0, \qquad (1)$$

дзе $a_{\mu\nu} \in \mathbf{C}$. Калі яго ступень па w большая за 1, тады яно задае мнагазначную функцыю $w = w(z)$, аналітычную ўсюды, акрамя канцага мноства пунктаў. Р.п. зададзенага раўнання (1) — заўсёды замкнёная і арыентаваная паверхня. Усякая такая паверхня гамеаморфная сферы або сферы з ручкамі.

РЫМАНАВА ПРАСТО́РА — прастора, у малых абсягах якой мае месца (з дакладнасцю да малых вышэйшага парадку) *эўклідава геаметрыя*, хоць у цэлым гэтая прастора можа не быць эўклідавай. Названая ў гонар Б.Рымана, які заклаў у 1854 г. асновы тэорыі такіх прастораў (гл. *Рымана геаметрыя*). Найпрасцейшая Р.п. — *эўклідава прастора*.

РЫ́МСКІЯ ЛІ́ЧБЫ — сістэма ўмоўных знакаў для запісу лікаў, якія выкарыстоўваліся ў старажытным Рыме (узнікла каля 500 г. да н.э. у этрускаў). Знакамі для дзесяткавых разрадаў з'яўляюцца: I = 1, X = 10, C = 100, M = 1000; для іх палавінак: V = 5, L = 50, D = 500. У гэтай сістэме натуральныя лікі запісваюцца з дапамогай камбінацый з гэтых лічбаў, прычым калі большая лічба стаіць перад меншай, то яны складаюцца, а калі наадварот — меншая адымаецца ад большай (каб шмат разоў не паўтараць адну і тую ж лічбу). Напрыклад, VI = 5 + 1 = 6, IX = 10 – 1 = 9, XC = = 100 – 10 = 90, CM = 1000 – 100 = 900, IV = 5 – 1 = = 4, XL = 50 – 10 = 40, CD = 500 – 100 = 400, XIX = = 10 + 10 – 1 = 19, XXXIII = 10 + 10 + 10 + 1 + 1 + 1 = = 33 і г.д. Выконваць арыфметычныя дзеянні з вялікімі лікамі ў такім запісе няручна, таму ў наш час Р.л. карыстаюцца абмежавана (для абазначэння стагоддзяў, гадзін на цыферблатах гадзіннікаў, парадкавай нумарацыі з'ездаў, кангрэсаў і інш.).

РЭГРЭ́СІІ КАЭФІЦЫЕ́НТ — каэфіцыент пры незалежнай зменнай у *рэгрэсіі раўнанні*. Напрыклад, у раўнанні лінейнай рэгрэсіі $E(Y|X = x) = \beta_0 + \beta_1 x$, якое звязвае выпадковыя велічыні Y і X, Р.к. β_0 і β_1 роўныя адпаведна:

$$\beta_0 = m_2 - \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}m_1,\ \ \beta_1 = \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1},$$

дзе ρ — каэфіцыент карэляцыі Y і X, $m_1 = EX$, $m_2 = EY$, $\sigma_1^2 = DX$, $\sigma_2^2 = DY$. Знаходжанне ацэнак Р.к. — асноўная задача *рэгрэсійнага аналізу*.

РЭГРЭ́СІІ ЛІ́НІЯ — гл. *Рэгрэсія*.

РЭГРЭ́СІІ РАЎНА́ННЕ — гл. *Рэгрэсія*.

РЭГРЭСІ́ЙНЫ АНА́ЛІЗ — раздзел матэматычнай статыстыкі, які аб'ядноўвае практычныя метады даследавання рэгрэсійнай залежнасці паміж велічынямі па статыстычных звестках. Праблема рэгрэсіі ў матэматычнай статыстыцы характарызуецца тым, што няма дастатковай інфармацыі пра размеркаванні разгляданых велічынь. Р.а. развязвае задачы: 1) выбар мадэлі рэгрэсіі; 2) ацэнка невядомых параметраў у выбранай мадэлі рэгрэсіі; 3) праверка статыстычных гіпотэз пра рэгрэсію. Р.а. — адзін з найбольш пашыраных метадаў апрацоўкі эксперыментальных звестак пры вывучэнні залежнасцяў у фізіцы, біялогіі, тэхніцы і інш. На мадэлі Р.а. заснаваны такія раздзелы матэматычнай статыстыкі, як дысперсійны аналіз і планаванне эксперыменту; гэтыя мадэлі шырока выкарыстоўваюцца ў мнагамерным аналізе.

РЭГРЭ́СІЯ (ад лац. regressio — рух назад) — залежнасць сярэдняга значэння якой-небудзь выпадковай велічыні ад нейкай іншай велічыні або ад некалькіх велічыняў. Пры гэтым мяркуюць, што ў аснове з'явы, якая назіраецца, ляжыць імавернасная залежнасць: пры кожным фіксаваным значэнні x выпадковая велічыня Y мае пэўнае размеркаванне імавернасцяў з матэматычным спадзяваннем, якое з'яўляецца функцыяй x: $E(Y|x) = f(x)$. Гэтая роўнасць атрымала назоў *рэгрэсіі раўнанне*, а залежнасць $y = f(x)$, дзе x — незалежная зменная, называецца Р. (ці **функцыяй Р.**) у імавернасным разуменні гэтага тэрміна. Графік функцыі $f(x)$ называецца **лініяй рэгрэсіі** або крывой Р. велічыні Y па x. Зменная x называецца **рэгрэсійнай зменнай** ці **рэгрэсарам**. Найбольш важны выпадак, калі Р. лінейная. У агульным выпадку, калі Р. моцна адрозніваецца ад лінейнай, разглядаюць нелінейную Р., прыкладамі якой з'яўляюцца выпадкі Р. паліномнай, трыганаметрычнай, паказнікавай і інш.

РЭГУЛЯ́РНАЯ АНАЛІТЫ́ЧНАЯ ФУ́НКЦЫЯ — вызначаная ў абсягу камплекснай зменнай функцыя, для якой існуе концая вытворная ў кожным пункце абсягу. Р.а.ф. у пункце a — гэта Р.а.ф. у нейкім наваколлі гэтага пункта.

Р.а.ф. у абсягу $D \subset \mathbb{C}$ можна вызначыць яшчэ як функцыю, якую можна раскласці ў нейкім наваколлі кожнага пункта $z_0 \in D$ у ступеневы шэраг $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ (*Тэйлара шэраг*). Для Р.а.ф. ужываюцца таксама іншыя тэрміны, напрыклад *галаморфная функцыя*.

РЭГУЛЯ́РНАЯ ПРАСТО́РА — *тапалагічная прастора*, у якой для кожнага пункта x і кожнага замкнёнага мноства A, $x \notin A$, знойдуцца два неперасякальныя адкрытыя мноствы U і V такія, што $x \in U$, $A \subset V$.

РЭГУЛЯ́РНАЯ ФУ́НКЦЫЯ — іншы назоў *галаморфнай функцыі* ў тым выпадку, калі над

аналітычнымі ў нейкім абсягу функцыямі разумеюць як галаморфныя, так і мераморфныя ў гэтым абсягу функцыі.

РЭГУЛЯ́РНЫ ПУНКТ, правільны пункт — 1) Р.п. лініі (паверхні) — звычайныя пункты, у якіх няма асаблівасцяў, занулення вытворных або сістэм частковых вытворных і г.д.; 2) пункт x_0 называецца Р.п. разрыву функцыі $f(x)$, калі

$$f(x_0)=\frac{1}{2}\{f(x_0+0)+f(x_0-0)\},$$

дзе $f(x_0+0)$ і $f(x_0-0)$ — ліміты функцыі злева і справа адпаведна; 3) у аналітычнай тэорыі дыферэнцыяльных раўнанняў асаблівы пункт называецца рэгулярным для раўнання

$$\frac{d^2w}{dz^2}+P_1(z)\frac{dw}{dz}+P_2(z)w=0,$$

калі ён ёсць полюс парадку не вышэй за k для $P_k(z)$, $k=1, 2, \ldots$; 4) Р.п. функцыі $f(z)$ камплекснай зменнай $z=x+iy$ — пункт $z_0=x_0+iy_0$, у нейкай акрузе $|z-z_0|<\rho$ якога функцыя $f(z)$ вызначаная і выяўляецца *Тэйлара шэрагам.*

РЭГУЛЯРЫЗА́ЦЫІ МЕ́ТАД — метад будавання набліжанага развязку некарэктных задач.

РЭЗАЛЬВЕ́НТА — 1) у тэорыі інтэгральных раўнанняў функцыя $R(x,t,\lambda)$, з дапамогай якой развязак раўнання

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(t,x)\varphi(t)dt \qquad (1)$$

можна вывесці па формуле

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b R(x,t,\lambda)f(t)dt. \qquad (2)$$

Напрыклад, калі інтэрвал (a, b) концы, а функцыі $f(x)$, $K(t,x)$ непарыўныя і

$$\int_a^b |K(x,t)|dt\le M,\ a\le x\le b,$$

то для $|\lambda|<\frac{1}{M}$ інтэгральнае раўнанне (1) мае адзіны развязак (2), які таксама будзе непарыўным і для якога

$$R(t,x,\lambda)=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda^{j-1}K_j(x,t),$$

дзе $K_j(x,t)$ — гэтак званыя ітэраваныя ядры

$$K_j(x,t)=\int_a^b K(x,\tau)K_{j-1}(\tau,t)d\tau,\ n=2, 3, \ldots$$

$$K_1(x,t)=K(x,t);$$

2) Р. аператара — аператар R_λ, адваротны да $T_\lambda=A-\lambda T$, дзе A — замкнёны лінейны аператар, вызначаны на шчыльным мностве D_A банахавай прасторы X са значэннямі ў той жа прасторы. Пры гэтым λ павінна быць такая, што T_λ^{-1} ёсць лінейны непарыўны аператар, вызначаны на ўсёй прасторы X. Значэнні λ, для якіх існуе Р., называюцца рэгулярнымі пунктамі аператара A, а сукупнасць усіх рэгулярных пунктаў — рэзальвентавым мноствам $\rho(A)$ гэтага аператара; 3) Р. алгебраічнага раўнання $f(x)=0$ ступені n — алгебраічнае раўнанне $g(y)=0$, каэфіцыенты якога рацыянальна залежаць ад каэфіцыентаў $f(x)$ і такое, што карані зыходнага раўнання $f(x)=0$ могуць быць знойдзеныя па каранях Р. у выніку развязання больш простых раўнанняў ступені не вышэй за n. Напрыклад, Р. няпоўнага раўнання 4-й ступені

$$x^4+px^2+qx+r=0 \qquad (3)$$

(да якога зводзіцца кожнае раўнанне 4-й ступені) ёсць кубічнае раўнанне

$$y^3-2py^2+(p^2-4r^2)y+q^2=0,$$

карані якога y_1, y_2, y_3 можна знайсці паводле *Кардана формулы* і якія звязаныя з каранямі x_1, x_2, x_3, x_4 раўнання (3) роўнасцямі

$$y_1=(x_1+x_2)(x_3+x_4),$$
$$y_2=(x_1+x_3)(x_2+x_4),$$
$$y_3=(x_2+x_4)(x_2+x_3).$$

РЭЗУЛЬТА́НТ — азначаецца для двух мнагаскладаў

$$P(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0,$$
$$Q(x)=b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0$$

як вызначнік парадку $m+n$

$$R(P,Q)=\begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & \ldots & a_1 & a_0 & & & \\ & a_n & a_{n-1} & \ldots & a_1 & a_0 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & a_n & a_{n-1} & \ldots & a_1 & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & \ldots & b_1 & b_0 & & & \\ & b_m & b_{m-1} & \ldots & b_1 & b_0 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & b_m & b_{m-1} & \ldots & b_1 & b_0 \end{vmatrix},$$

дзе свабодныя месцы займаюць нулі. Калі $a_n \neq 0$ і $b_m \neq 0$, то $R(P, Q)$ можна запісаць у выглядзе

$$R(P,Q) = a_n^m b_m^n \prod_{i,j} (\alpha_i - \beta_j),$$

дзе здабытак бярэцца па ўсіх каранях $\alpha_1,...,\alpha_n$ мнагаскладу $P(x)$ і ўсіх каранях $\beta_1,...,\beta_m$ мнагаскладу $Q(x)$. З дапамогай Р. можна заўсёды звесці развязанне сістэмы алгебраічных раўнанняў да развязання аднаго раўнання з адным невядомым. Р. мнагаскладу і яго вытворнай з дакладнасцю да знака роўныя дыскрымінанту мнагаскладу.

РЭКАНСТРУЯВА́ЛЬНАСЦІ ГІПО́ТЭЗА — гіпотэза графаў тэорыі. Няхай G — граф і VG — мноства яго вяршыняў. Праз G_v абазначым граф, які атрымліваецца пры выдаленні з G вяршыні v і ўсіх кантаў, інцыдэнтных гэтай вяршыні. Набор $(G_v : v \in VG)$ усіх такіх падграфаў называецца к а л о д а й графа G і абазначаецца праз $P(G)$. Няхай кожны з графаў G і H мае n вяршыняў. Калоды графаў G і H называюцца аднолькавымі ($P(G) = (P(G) = P(H))$, калі існуе такая нумарацыя вяршынь гэтых графаў, што $G_i \cong H_i$, $i = \overline{1, n}$. Граф H называецца р э к а н с т р у к ц ы я й графа G, калі $P(G) = P(H)$. Граф G называецца р э к а н с т р у я в а л ь н ы м, калі ён ізаморфны кожнай сваёй рэканструкцыі. Не ўсе графы рэканструявальныя. Усе графы, якія маюць больш як дзве вяршыні, рэканструявальныя. Для графаў, якія маюць больш як тры канты, існуе гіпотэза к а н т а в а й р э к а н с т р у я в а л ь н а с ц і. Яна фармулюецца аднолькава з папярэдняй гіпотэзай, толькі замест вяршыняў выдаляюцца канты. Р.г. не даказаная і не абвергнутая (2001).

РЭКУРСІ́ЎНА ПЕРАЛІЧА́ЛЬНАЕ МНО́СТВА, п е р а л і ч а л ь н а е м н о с т в а — мноства, для якога існуе алгарытм, які крок за крокам у якасці выніку называе элементы гэтага мноства. Р.п.м. — адно з асноўных паняццяў *матэматычнай логікі*: у кожнай фармальнай сістэме мноства яе тэарэм пералічальнае.

РЭКУРСІ́ЎНАЕ МНО́СТВА (ад лац. reqursio — вяртанне), р а з в я з а л ь н а е м н о с т в а — мноства A натуральных лікаў, характарыстычная функцыя якога

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{калі } x \in A, \\ 0, \text{калі } x \notin A, \end{cases}$$

ёсць *агульнарэкурсіўная функцыя*. На падставе *Чорча тэзіса* Р.м. — гэта мноства натуральных лікаў, для якіх існуе алгарытм, што дазваляе выявіць для кожнага натуральнага ліку, належыць ён гэтаму мноству ці не. Дапаўненне Р.м. рэкурсіўнае, аб'яднанне і перасячэнне двух Р.м. таксама рэкурсіўнае. Кожнае Р.м. — рэкурсіўна пералічальнае. Аднак існуюць рэкурсіўна пералічальныя мноствы, якія не з'яўляюцца рэкурсіўнымі. Мноства рэкурсіўнае, калі і толькі калі яно і яго дапаўненне рэкурсіўна пералічальныя.

РЭКУРСІ́ЎНАЯ ФУ́НКЦЫЯ — агульны назоў класаў часткова рэкурсіўных і агульнарэкурсіўных функцый; адзін з найбольш распаўсюджаных варыянтаў матэматычнага ўдакладнення паняцця вылічальнай арыфметычнай функцыі. Вызначэнне часткова рэкурсіўнай і агульнарэкурсіўнай функцыі звычайна даюць наступным чынам. Будзем разглядаць толькі арыфметычныя функцыі, г.зн. функцыі, аргументы і значэнні якіх ёсць натуральныя лікі, і, акрамя таго, будзем разглядаць частковыя функцыі, не ўсюды вызначаныя, г.зн. абсяг іх вызначэння з'яўляецца падмноствам мноства натуральных лікаў. Фіксуецца мноства (зыходных, першапачатковых) функцый:

$$0(x) \equiv 0,\ S(x) = x + 1,\ J_m^n(x_1,...,x_n) = x_m$$
$$(1 \leq m \leq n).$$

Фіксуецца таксама некалькі аперацый, якія вылічальныя функцыі пераводзяць зноў у вылічальныя функцыі, менавіта аператары падстановы, прымітыўнай рэкурсіі і мінімізацыі. Функцыя называецца ч а с т к о в а р э к у р с і ў н а й, калі яна можа быць атрыманая з функцый 0, S, J_m^n з дапамогай канцай колькасці аперацый падстановы, прымітыўнай рэкурсіі і мінімізацыі. Усюды вызначаная часткова Р.ф. называецца а г у л ь н а р э к у р с і ў н а й. Клас агульнарэкурсіўных функцый ёсць уласны падклас класа часткова рэкурсіўных функцый.

Вялікую ролю ў тэорыі Р.ф. маюць п р ы м і т ы ў н а Р. ф., г.зн. функцыі, атрыманыя з функцый 0, S, J_m^n з дапамогай канцай колькасці аперацый падстановы і прымітыўнай рэкурсіі. Яны ўтвараюць уласную частку класа агульнарэкурсіўных функцый. З азначэння Р.ф. відаць, што яны інтуіцыйна вылічальныя. У нейкім сэнсе слушнае і адваротнае: ёсць сур'ёзныя падставы лічыць, што матэматычнае паняцце рэкурсіўнасці — дакладны эквівалент інтуіцыйнага паняцця вылічальнасці. Прапанова лічыць вылічальнасць супадальнай з паняццем рэкурсіўнасці вядомая ў тэорыі Р.ф. пад назовам *Чорча тэзіса*. Тэорыя Р.ф. — гэта частка *алгарытмаў тэорыі*, але яе

можна разглядаць як самастойную матэматычную дысцыпліну са сваёй праблематыкай і дадаткамі ў іншых раздзелах матэматыкі. Даследаванні сведчаць, што ўсе вядомыя ўдакладненні паняцця алгарытму прыводзяць да аднаго і таго ж класа функцый, супадальнага з класам Р.ф. Гэта сур'ёзны довад на карысць тэзіса Чорча.

РЭКУРСІЎНЫ АНАЛІЗ — тое, што *канструктыўны аналіз.*

РЭКУРЭНТНАЯ ПАСЛЯДОЎНАСЦЬ (ад лац. recurrens (recurrentis) — які вяртаецца) — паслядоўнасць $a_0, a_1, a_2, \ldots$, якая задавальняе роўнасць выгляду $a_{n+p} + c_1 a_{n+p-1} + \ldots + c_p a_n = 0$, дзе $c_1, \ldots, c_p$ — сталыя. Тасунак дазваляе вылічыць адзін за адным элементы паслядоўнасці, калі вядомыя першыя p элементаў. Класічны прыклад Р.п. — паслядоўнасць *Фібаначы лікаў*: 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... ($a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$). А.Муаўр, які ўвёў тэрмін "рэкурэнтнасць" (1720—30), разгледзеў пад назовам зваротных шэрагаў ступеневыя шэрагі $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ з каэфіцыентамі, якія ўтвараюць Р.п. Такія шэрагі заўсёды вызначаюць рацыянальныя функцыі.

РЭКУРЭНТНАЯ ФОРМУЛА — тое, што *рэкурэнтны тасунак.*

РЭКУРЭНТНЫ ТАСУНАК, р э к у р э н т н а я ф о р м у л а — формула выгляду $d_{n+p} = F(d_n, d_{n+1}, \ldots, d_{n+p-1})$, якая дазваляе вылічыць усякі наступны элемент паслядоўнасці, калі зададзеныя яго папярэднія элементы. Прыклады Р.т.: $d_{n+1} = qd_n$ ($q \neq 0$) — геаметрычная прагрэсія; $d_{n+1} = d_n + d$ — арыфметычная прагрэсія; $d_{n+2} = d_{n+1} + d_n$ — паслядоўнасць *Фібаначы лікаў.* У выпадку, калі Р.т. лінейны, паслядоўнасць, што яго задавальняе, называецца з в а р о т н а й п а с л я д о ў н а с ц ю (гл. *Рэкурэнтная паслядоўнасць*).

РЭЛАКСАЦЫІ МЕТАД (ад лац. relaxatio — змяншэнне напружання) — ітэрацыйны метад развязання сістэм лінейных алгебраічных раўнанняў $Ax = f$. Заснаваны на ідэі паслаблення або нейтралізацыі адмоўнага ўплыву адной ці некалькіх кампанент ($k+1$)-га набліжання $x_{k+1} = (x_1^{(k+1)}, \ldots, x_n^{(k+1)})^T$ да развязку x пры пераходзе ад ітэрацыі x_k да x_{k+1}. Р.м. выкарыстоўваецца для развязання сістэм з дадатна вызначанай матрыцай A.

РЭПЕР (ад франц. repère) — сукупнасць n лінейна незалежных вектараў $\boldsymbol{e}_1 = \overrightarrow{OM}_1$, $\boldsymbol{e}_2 = \overrightarrow{OM}_2$, $\boldsymbol{e}_n = \overrightarrow{OM}_n$ n-мернай вектарнай прасторы, узятых у пэўным парадку і адкладзеных ад супольнага пачатку. На плоскасці Р. могуць служыць адвольныя два цекалініярныя вектары, у прасторы — адвольная тройка некампланарных вектараў. Калі вектары, якія ўтвараюць Р., парамі артаганальныя, то Р. называецца а р т а г а н а л ь н ы м. Калі пры гэтым усе яны адзінкавай даўжыні, то Р. называецца о р т а ў н а р м а в а н ы м.

РЭПРЭЗЕНТАЦЫЙ ТЭОРЫЯ — тое, што *выяўленняў тэорыя.*

РЭПРЭЗЕНТАЦЫЯ ГРУПЫ — тое, што *выяўленне групы.*

РЭФЛЕКСІЎНАСЦЬ (лац. reflexivus — літаральна павернуты назад) — уласцівасць бінарных дачыненняў, якая выражае іх здзяйсняльнасць для параў аб'ектаў з супадальнымі элементамі. Дачыненне R на мностве X называецца р э ф л е к с і ў н ы м, калі xRx для адвольнага аб'екта $x \in X$. Тыповымі і найбольш важнымі прыкладамі рэфлексіўных дачыненняў могуць служыць дачыненні тыпу роўнасці (тоеснасці, эквівалентнасці, падобнасці і інш.): адвольная велічыня роўная сама сабе, і дачыненні нястрогага парадку: адвольны прадмет не меншы і не большы за самога сябе. Усякае бінарнае дачыненне, якое мае ўласцівасці сіметрычнасці і транзітыўнасці, рэфлексіўнае. Таму многія дачыненні ў матэматыцы, якія паводле азначэння не маюць Р., можна давызначыць такім чынам, каб яны сталі рэфлексіўнымі.

РЭЧАІСНАЯ ПРАЕКТЫЎНАЯ ПЛОСКАСЦЬ — дзвюхмерная праектыўная прастора $\mathbf{R}P^2$ над полем рэчаісных лікаў $\mathbf{R}$; мноства простых трохмернай рэчаіснай афіннай прасторы $\mathbf{R}^3$, якія праходзяць праз фіксаваны пункт. Існуе іншы погляд на Р.п.п. як на рэчаісную афінную плоскасць $\mathbf{R}^2$, дапоўненую бясконца аддаленымі пунктамі. Пры гэтым па кожным кірунку ў плоскасці $\mathbf{R}^2$ ствараецца адзіны бясконца аддалены пункт; пункты, вызначаныя процілеглымі кірункамі, лічацца с у п а д а л ь н ы м і. Як тапалагічная прастора, Р.п.п. $\mathbf{R}P^2$ ёсць фактар-прастора дзвюхмернай сферы $S^2 \subset \mathbf{R}^3$ на дачыненні эквівалентнасці: $x \sim y \Leftrightarrow x \pm y = 0$, г.зн. для будавання ў сферы "склейваюцца" дыяметральна процілеглыя пункты. Р.п.п. — адзін з асноўных прыкладаў злучнай кампактнай паверхні (дзвюхмернай мнагастайнасці): кожная неарыентаваная злучная кампактная паверхня ёсць злучная сума концага набору Р.п.п.

РЭЧАІСНАЯ ЧАСТКА — *рэчаісны лік x* (абазначаецца Re z) камплекснага ліку $z = x + iy$.

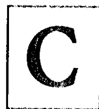
РЭЧАІСНЫ ЛІК, с а п р а ў д н ы л і к — кожны дадатны, адмоўны лік або нуль. Р.л. падзяляюцца на рацыянальныя і ірацыянальныя. Першыя можна падаць як у выглядзе рацыянальнага дробу p / q (дзе p і q — цэлыя, $q \neq 0$), так і ў выглядзе концага ці бясконцага перыядычнага дзесятковага дробу; ірацыянальныя Р.л. — толькі ў выглядзе бясконцага неперыядычнага дзесятковага дробу.

Мноства ўсіх Р.л. (лікавая простая) лінейна ўпарадкаванае і ўтварае поле ў дачыненні да асноўных арыфметычных аперацый (складанне і множанне). Лікавая простая "падобная" на геаметрычную простую, г.зн. паміж лікамі і пунктамі на простай можна ўсталяваць узаемна адназначную адпаведнасць з захаваннем упарадкаванасці. Найважнейшая ўласцівасць лікавай простай — яе непарыўнасць. Прынцып непарыўнасці лікавай простай мае розныя фармулёўкі. Гэта а к с і ё м ы (п р ы н ц ы п ы): В а е р ш т р а с а (усякае непустое абмежаванае зверху лікавае мноства мае дакладную верхнюю мяжу); Д э д э к і н д а (усякае сечыва ў абсягу Р.л. мае мяжу); К а н т а р а (усялякая сістэма ўкладзеных адрэзкаў лікавай простай мае толькі адзін лік, які належыць усім адрэзкам). На ўласцівасцях лікавай простай грунтуецца тэорыя лімітаў і наогул уся сістэма матэматычнага аналізу.

РЭШТА — 1) цэлы неадмоўны лік y, які для цэлых неадмоўных лікаў a, b і x задавальняе патрабаванні: $a = xb + y$, $y < b$. Р. ц э л а г а л і к у b па модулі m, $m > 0$, — такі цэлы лік a, што рознасць $b - a$ дзеліцца на m або, іншымі словамі, праўдзіцца параўнанне $a \equiv b \pmod{m}$. Мноства цэлых лікаў, кожны з якіх ёсць Р. аднаго і толькі аднаго з лікаў $0, 1, ..., m-1$, называецца поўнай сістэмай рэштаў па модулі m; 2) Р. а д н а з н а ч н а й а н а л і т ы ч н а й ф у н к ц ы і $f(z)$ у ізаляваным асаблівым пункце z_0 — гэта камплексны лік, роўны значэнню інтэграла $\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)dz$, які вызначаецца ў дадатным кірунку па акружыне дастаткова малога радыуса $\Gamma = \{|z - z_0| = r\}$ з цэнтрам у ізаляваным асаблівым пункце z_0 гэтай функцыі. Лік r выбіраюць настолькі малым, каб у акрузе $|z - z_0| \leq r$ не было больш асаблівых пунктаў функцыі $f(z)$, акрамя z_0. Р. функцыі $f(z)$ у пункце z_0 роўная каэфіцыенту a_{-1} пры раскладанні $f(z)$ у шэраг Лёрана:

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \int_\Gamma f(z)dz = a_{-1}, \quad f(z) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k (z - z_0)^k.$$

Р. — карысны сродак для вылічэння інтэгралаў ад функцыі рэчаіснай і камплекснай зменных. Гл. таксама *Квадратовая рэшта*.



САМАПЕРАСЯЧЭННЯ ПУНКТ п л о с к а й к р ы в о й, в у з л а в ы п у н к т п л о с к а й к р ы в о й — *асаблівы пункт* крывой, у якім перасякаюцца дзве галіны крывой, кожная з якіх мае ў гэтым пункце сваю датычную. Пункт $M(x_0, y_0)$ крывой $F(x, y) = 0$ з'яўляецца С.п., калі ў ім $F'_x = 0$, $F'_y = 0$, $F''_{xx}F''_{yy} - (F''_{xy})^2 = 0$, напрыклад, дэкартаў ліст $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ мае С.п. O (0, 0) (гл. рыс. на с. 126).

САМАСПАЛУЧАНАЯ МАТРЫЦА, э р м і т а в а м а т р ы ц а — матрыца $A = [a_{ij}]$ памеру $n \times n$ над полем камплексных лікаў **C**, якая супадае са сваёй камплексна спалучанай матрыцай (г.зн. $a_{ik} = \bar{a}_{kl}$). Усе дыяганальныя элементы С.м. — рэчаісныя лікі. Сума дзвюх С.м. ёсць С.м., а здабытак С.м. A і B тады і толькі тады ёсць С.м., калі $AB = BA$. Усе ўласныя значэнні С.м. — рэчаісныя лікі. Для кожнай С.м. A існуе унітарная матрыца S такая, што $S^{-1}AS$ — дыяганальная матрыца, элементы якой — рэчаісныя лікі. Кожную С.м. можна разглядаць як матрыцу самаспалучанага аператара ў нейкім базісе унітарнай прасторы. С.м. з'яўляецца таксама матрыцай эрмітавых формаў у вектарнай прасторы над **C**.

САМАСПАЛУЧАНЫ АПЕРАТАР — лінейны аператар A, які вызначаны на лінейным скрозь шчыльным мностве D (A) гільбэртавай прасторы H і супадае са сваім спалучаным аператарам. Калі A — абмежаваны С.а., то ён вызначаны на ўсёй прасторы H. Спектр С.а. не пусты і належыць рэчаіснай восі.

САПРАЎДНЫ ЛІК — тое, што *рэчаісны лік*.

САРТАВАННЯ ЗАДАЧА — адна з *камбінаторных задач*, якія найбольш часта трапляюцца

на практыцы. Яна палягае ў наступным. Няхай a_1, a_2, ..., a_n — паслядоўнасць элементаў, што выбраныя з мноства, на якім зададзены лінейны парадак (абазначаны $\leq$). Патрабуецца размясціць элементы дадзенай паслядоўнасці ў парадку непамяншэння, г.зн. знайсці такое перастаўленне π, што $a_{\pi(1)} \leq a_{\pi(2)} \leq ... \leq a_{\pi(n)}$. У залежнасці ад спосабу размяшчэння зыходных дадзеных у памяці камп'ютара адрозніваюць *нутраное* і *вонкавае сартаванне*. У першым выпадку дадзеныя размяшчаюцца ў аператыўнай (хуткай) памяці камп'ютара, а ў другім — у вонкавай, больш маруднай. Вонкавае сартаванне ўзнікае, у прыватнасці, у шматлікіх камерцыйных дастасаваннях, а нутраная часта выкарыстоўваецца ў камбінаторных алгарытмах і служыць важным сродкам павышэння іх хуткадзейнасці. Ёсць шмат даволі эфектыўных алгарытмаў для развязання С.з. у класе алгарытмаў, якія выкарыстоўваюць толькі аперацыі параўнання элементаў. С.з. магчыма развязаць шляхам выканання не больш чым $n \log n$ параўнанняў, і гэтая ацэнка найлепшая па парадку.

СВАБО́ДНАЯ ГРУ́ПА — група F разам з падмноствам $X \subset F$ такая, што для адвольнага адлюстравання $\varphi : X \to G$ мноства X у адвольную групу G знойдзецца адзін і толькі адзін гомамарфізм Φ: $F \to G$ такі, што $\Phi|_X = \varphi$. X звычайна называецца *базай* F. С.г. з базай X можа быць пабудаваная яўна, як мноства "словаў" $x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} ... x_n^{\varepsilon_n}$, дзе $x_i \in X$, $\varepsilon_i = \pm 1$, пры ўмове, што словы, якія атрымліваюцца адзін з аднаго ўстаўкай ці выкрэсліваннем падсловаў тыпу xx^{-1}, $x^{-1}x$, $x \in X$, атаясамляюцца, а здабытак словаў $x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} ... x_n^{\varepsilon_n}$ і $y_1^{\delta_1} y_2^{\delta_2} ... y_m^{\delta_m}$ ёсць слова $x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} ... x_n^{\varepsilon_n} y_1^{\delta_1} y_2^{\delta_2} ... y_m^{\delta_m}$. Адвольная група ёсць фактар-група С.г.

СВАБО́ДНАЯ УНІВЕРСА́ЛЬНАЯ А́ЛГЕБРА *мнагастайнасці* U — алгебра F з мнагастайнасці U, якая адпавядае ўмове: усякае адлюстраванне сістэмы свабодных утваральных гэтай алгебры ў кожную алгебру A з U пашыраецца да гомамарфізму $F \to A$. Гл. *Універсальная алгебра.*

СВАБО́ДНЫ ВЕ́КТАР — мноства ўсіх паралельных адрэзкаў, якія аднолькава накіраваныя і маюць аднолькавую даўжыню. Пункт прыкладання (пачатковы пункт) можна выбраць адвольна. С.в. ёсць, напрыклад, хуткасць руху матэрыяльнага пункта.

СВАБО́ДНЫЯ КАНСТРУ́КЦЫІ ў *тэорыі лікаў* — агульны назоў канструкцый свабоднага здабытку з аб'яднанай падгрупай, *HNN* пашырэння і пэўных іх абагульненняў.

СЕГМЕ́НТ (ад лац. segmentum — адрэзак) — 1) С. *на простай* — тое, што *адрэзак*; 2) С. *на плоскасці* — плоская фігура, якая знаходзіцца паміж крывой і яе хордай (напрыклад, С. круга); 3) С. *у прасторы* — частка цела, абмежаваная плоскасцю і адсечаным ёю кавалкам паверхні (напрыклад, шаравы С.).

СЕДЛАВЫ́ ПУНКТ — 1) С.п. *на гладкай паверхні* — пункт, блізу якога паверхня ляжыць з розных бакоў ад сваёй датычнай плоскасці. Калі С.п. ёсць пункт двойчы непарыўна дыферэнцавальнай паверхні, то яго гаўсава крывіня ў гэтым пункце не дадатная. Пры гэтым С.п. ёсць гіпербалічны пункт (г.зн. той пункт, у якім датычны парабалоід з'яўляецца гіпербалічным парабалоідам); 2) С.п. (*у тэорыі гульняў*) — для функцыі F, зададзенай на дэкартавым здабытку двух мностваў $X \times Y$, такі пункт (x_0, y_0), для якога

$$F(x_0, y_0) = \max_{x \in X} F(x, y_0) = \min_{y \in Y} F(x_0, y).$$

Наяўнасць С.п. у функцыі F раўназначная існаванню аптымальных стратэгій у гульцоў, якія гуляюць у антаганістычную гульню $\Gamma = (X, Y, F)$.

СЕ́КТАР (лац. sector ад seco — рэжу, рассякаю) — 1) С. *на плоскасці* — плоская фігура, абмежаваная дзвюма паўпростымі, якія выходзяць з нутранога пункта фігуры, і дугой контура; 2) С. *круга* — фігура, абмежаваная двума радыусамі і дугой, на якую яны абапіраюцца. Плошча С. круга роўная $S = lr/2$ або $S = \pi r^2 \alpha / 360°$, дзе l — даўжыня дугі, α — адпаведны гэтай дузе цэнтральны вугал у градусах і r — радыус круга; 3) С. *у прасторы* — частка цела, абмежаваная канічнай паверхняй, вяршыня якой знаходзіцца ўнутры цела, і часткай паверхні цела, што выразаецца. Пра С. шара гл. у арт. *Шаравы сектар.*

СЕКУ́НДА (ад лац. secunda (divisio) — другое (дзяленне градуса)) — адзінка вымярэння плоскіх вуглоў, роўная 1/3600 градуса або 1/60 мінуты. Абазначаецца знакам ″. Метрычная С. — гэта $1/10^6$ частка прамога вугла; абазначаецца знакам ^{cc}.

СЕМАФО́Р (ад грэц. sema — знак + phoros — які нясе) — адзін са спосабаў сінхранізацыі працэсаў. З'яўляецца цэлай зменнай s, значэнне якой могуць мяняць толькі аперацыі P і V. Калі працэс выконвае аперацыю $P(s)$, s памяншаецца на адзінку і 1) калі $s \geq 0$, то працэс працягвае работу; 2) калі $s < 0$, то працэс спыняецца, становіцца ў

чаргу для чакання, звязаную з s, і застаецца заблакаваным да той пары, пакуль аперацыя $V(s)$, выкананая іншым працэсам, не вызваліць яго. Калі працэс выконвае $V(s)$, s павялічваецца на адзінку і 1) калі $s > 0$, то працэс працягвае работу; 2) калі $s \le 0$, то адзін працэс выдаляецца з чаргі чакання і атрымлівае дазвол прадоўжыць работу; працэс, які звярнуўся да аперацыі $V(s)$, таксама можа працягваць работу. Аперацыі P і V непадзельныя. У кожны момант толькі адзін працэс можа выконваць аперацыю P або V над гэтым s. Таму калі $s = 1$ і два працэсы паспрабуюць аднача-сова выканаць аперацыю $P(s)$, то толькі аднаму з іх будзе дазволена працягваць работу, другі будзе заблакаваны і пастаўлены ў чаргу да семафора s.

СЕМІІНВАРЫЯНТ — тое, што *паўінварыянт.*

СЕПАРАБЕЛЬНАЕ ПАШЫРЭННЕ п о л я K — канцае пашырэнне палёў $K \subset E$ такое, што колькасць укладанняў поля E у алгебраічнае замыканне $\bar{K}$, якія пакідаюць K на месцы, роўная ступені $[E{:}K]$. Калі $K \subset E$ — канцае пашырэнне, то колькасць укладанняў E у $\bar{K}$ залежыць толькі ад пашырэння $K \subset E$. Лік $[E{:}K]$ называецца с т у п е н н ю н е с е п а р а б е л ь н а с ц і пашырэння $K \subset E$. Адвольнае алгебраічнае пашырэнне $K \subset E$ поля K (не абавязкова канцае) называецца с е п а р а б е л ь н ы м, калі і толькі калі кожнае канцае пашырэнне $K \subset F$ такое, што $F \subset E$ з'яўляецца сепарабельным.

СЕПАРАБЕЛЬНАЯ ПРАСТОРА — тапалагічная прастора, якая змяшчае злічальнае, усюды шчыльнае мноства. Прастора са злічальнай базай — сепарабельная, адваротнае не праўдзіцца.

СЕПАРАТРЫСА (ад лац. separatrix — тое, што раздзяляе, раз'ядноўвае) — тэрмін якаснай тэорыі дыферэнцыяльных раўнанняў. Гл. *Сядло.*

СЕТАК МЕТАД — назоў групы набліжаных метадаў развязання дыферэнцыяльных, інтэгральных і інтэгра-дыферэнцыяльных раўнанняў. У дастасаванні да дыферэнцыяльных раўнанняў з частковымі вытворнымі гэты тэрмін выкарыстоўваецца ў якасці сіноніма тэрміна *рознасцевы метад.* С.м. — адзін з найбольш пашыраных набліжаных метадаў развязання задач, звязаных з дыферэнцыяльнымі раўнаннямі. Шырокае выкарыстанне С.м. тлумачыцца яго універсальнасцю і параўнальнай прастасцю рэалізацыі на камп'ютары.

СЕТКАВАЕ ПЛАНАВАННЕ — сукупнасць метадаў каляндарнага планавання і кіравання, у аснове якіх ляжыць паняцце сеткавай мадэлі. Першыя варыянты гэтых метадаў, вядомыя пад назовам сістэм ПЕРТ (метад ацэнкі і кантролю праграм) і КШМ (крытычнага шляху метад), распрацаваныя ў ЗША ў канцы 1950-х гг. Пазней гэтыя метады значна ўдасканаленыя і атрымалі шырокае распаўсюджанне ва ўсіх прамыслова развітых краінах. С е т к а в а я м а д э л ь — арыентаваны граф без контураў (сеткавы графік), вяршыні якога адлюстроўваюць падзеі, што цікавяць нас, у працэсе выкарыстання комплексу работ, а дугі — работы, якія неабходна выканаць для надыходу той або іншай падзеі. Іншы раз вяршыні адлюстроўваюць работы, а дугі — парадак іх выканання. Сеткавы графік суправаджаецца інфармацыяй наконт працягласці работ і іх кошту, патрэбных рэсурсаў, імавернасцяў надыходу магчымых альтэрнатыўных падзей і г.д. Калі мець сеткавую мадэль і адпаведныя метады працы з ёю, то можна атрымаць досыць поўную інфармацыю. З'яўляецца магчымасць здзейсніць розныя аптымізацыйныя разлікі і ажыццявіць эфектыўны кантроль за ходам рэалізацыі работ. С.п. шырока выкарыстоўваецца пры арганізацыі навукова-даследчых і доследна-канструктарскіх распрацовак, у будаўніцтве і мадэрнізацыі розных збудаванняў, асваенні вытворчых магутнасцяў. Яно з'яўляецца асновай сучасных сістэм арганізацыйнага кіравання, гэтак званых сістэм сеткавага планавання і кіравання (СПК).

СЕЧНЫХ МЕТАД — метад вылічэння нулёў непарыўнай функцыі. Няхай на адрэзку $[a, b]$ змяшчаецца нуль непарыўнай функцыі $f(x)$; x_0, x_1 — розныя пункты гэтага адрэзка. Паслядоўнасць

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_{k-1} - x_k)}{f(x_{k-1}) - f(x_k)},$$

$k = 1, 2, \ldots$, ёсць ітэрацыйная формула С.м., і калі яна збягаецца, то абавязкова да кораня $f(x)$.

СІ — універсальная мова *праграмавання,* якая характарызуецца эканомным запісам адлюстраванняў, сучаснымі механізмамі кіравання вылічэннямі і структурамі звестак, багатым выбарам аперацый. Цесна звязаная з пераноснай аперацыйнай сістэмай *UNIX.* На ёй напісана сама *UNIX* і яе праграмнае забеспячэнне.

СІГНАТУРА (ад лац. signare — абазначаць, паказваць) — 1) С. к в а д р а т о в а й ф о р м ы — рознасць паміж дадатным і адмоўным індэксамі інерцыі гэтай квадратовай формы; 2) С. м о в ы —

сукупнасць прэдыкатных і функцыйных сімвалаў і прадметавых канстантаў дадзенай фармалізаванай мовы.

СІГНУМ (ад лац. signum — знак) — функцыя рэчаіснага аргумента (абазначэнне sgn або sign), якая азначаецца формулай

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{калі } x > 0, \\ 0, & \text{калі } x = 0, \\ -1, & \text{калі } x < 0. \end{cases}$$

Увёў Л.Кронэкер (1878).

СІЛЬВЕСТРА КРЫТЭР — *крытэр* дадатнай вызначанасці *квадратовай формы*

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \quad a_{ij} = a_{ji}. \qquad (1)$$

Згодна з С.к., квадратовая форма (1) дадатна вызначаная, калі і толькі калі ўсе вызначнікі

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & & a_{kk} \end{vmatrix}, \quad i \le k \le n,$$

дадатныя.

СІМВАЛІЧНАЯ ЛОГІКА — назоў матэматычнай логікі, звязаны з тым, што ў матэматычнай логіцы шырэй, чым у традыцыйнай, выкарыстоўваюцца сімвалы для выражэння логікавых сувязяў выказванняў.

СІМЕТРЫІ КЛАС — група сумяшчэнняў ідэальнага крышталічнага мнагагранніка. С.к., адпаведны крышталяграфічнай групе Γ, можа быць атрыманы як фактар-група $\Gamma/\Gamma \cap T$, дзе T — група трансляцый эўклідавай прасторы E^3.

С.к. — канцая група, парадкі яе элементаў могуць быць роўнымі толькі 2, 3, 4 ці 6. Усе С.к. знайшоў у 1967 г. А.Гадолін. Гэта 32 групы, якія з'яўляюцца падгрупамі групаў самасумяшчэнняў куба і шасціграневай простай прызмы. З якасцяў С.к. вынікаюць як вонкавая форма крышталя, так і амаль усе яго фізічныя якасці.

СІМЕТРЫЧНАСЦЬ — уласцівасць *бінарных дачыненняў*, якая выяўляецца ў незалежнасці выканання дачынення для якой-небудзь пары аб'ектаў ад парадку ўваходжання ў пару: дачыненне называецца сіметрычным, калі для адвольных x і y з xRy вынікае yRx. Дачыненні роўнасці, тоеснасці, эквівалентнасці, падобнасці даюць прыклад дачыненняў С.

СІМЕТРЫЧНАЯ ГРУПА мноства — азначаецца для мноства X як група $S(X)$ усіх падстаноў мноства (біекцый X на сябе) у дачыненні да аперацыі кампазіцыі (множання) адлюстраванняў. Калі X — канцае мноства з n элементаў, $S(X)$ абазначаецца S_n і называецца С.г. ступені n. Парадак групы S_n роўны $n!$. Адвольная падгрупа С.г. называецца групай падстаноў. Кожная абстрактная група G ізаморфная нейкай групе падстаноў мноства G (тэарэма Кэлі).

СІМЕТРЫЧНАЯ МАТРЫЦА — $n \times n$-матрыца $[a_{ij}]$, у якой усе элементы, сіметрычныя ў дачыненні да галоўнай дыяганалі, роўныя, г.зн. $a_{ik} = a_{ki}$, $i, k = 1, 2, \dots, n$.

СІМЕТРЫЧНАЯ ПАЎГРУПА G на мностве M — паўгрупа G усіх пераўтварэнняў мноства M у дачыненні да аперацыі суперпазіцыі пераўтварэнняў (г.зн. для ўсякіх $f, g \in G$, $x \in M$, $(f \circ g)(x) = f(g(x))$).

СІМЕТРЫЧНАЯ РОЗНАСЦЬ — аперацыя з элементамі ў булевай алгебры B: калі $x, y \in B$, а Cx, Cy — дапаўненні x і y, то С.р. $x \Delta y = (x \wedge Cy) \vee (y \wedge Cx)$.

СІМЕТРЫЧНАЯ ФУНКЦЫЯ — функцыя некалькіх зменных, якая не змяняецца пры ўсякіх іх перастаўленнях.

СІМЕТРЫЧНЫ МНАГАСКЛАД — мнагасклад f, які з'ўляецца *сіметрычнай функцыяй* ад сваіх зменных. Важнейшыя прыклады С.м. — элементарныя сіметрычныя функцыі:

$$S_1 = x_1 + \dots + x_n,\ S_2 = x_1 x_2 + \dots + x_{n-1} x_n,\ \dots,\ S_{n-1} =$$

$$= x_1 \cdot \dots \cdot x_{n-1} + \dots + x_2 \cdot \dots \cdot x_n,\ S_n = x_1 \cdot \dots \cdot x_n,$$

а таксама ступеневыя сумы

$$P_k(x_1, \dots, x_n) = x_1^k + \dots + x_n^k,$$

якія звязаныя з элементарнымі сіметрычнымі функцыямі формуламі Ньютана

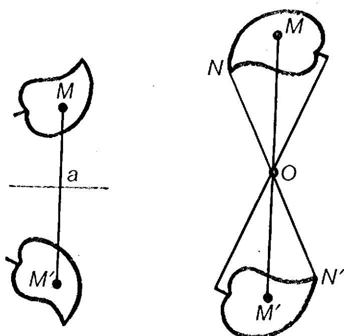
$$P_k - S_1 P_{k-1} + S_2 P_{k-2} + \dots + (-1)^k S_k = 0,$$

$$1 \le k \le n-1,\ P_{n+k} - S_1 P_{n+k-1} +$$

$$+ S_2 P_{n+k-2} + \dots + (-1)^n S_n P_k = 0.$$

Гэтыя формулы дазваляюць знаходзіць S_k, ведаючы P_m, і наадварот. Асноўная тэарэма С.м. сцвярджае, што кожны С.м. ёсць мнагасклад ад элементарных сіметрычных функцый.

СІМЕ́ТРЫЯ (ад грэц. symetria — супамернасць) — 1) С. у в у з к і м с э н с е: S_a плоскасці ў дачыненні да простай a (С. прасторы S_α у дачыненні да плоскасці α) — пераўтварэнне плоскасці (прасторы), пры якім кожны пункт M пераходзіць у пункт M' так, што адрэзак MM' перпендыкулярны да простай a (плоскасці α) і дзеліцца ёю папалам. Простая a (плоскасць α) з'яўляецца в о с с ю С. (плоскасцю С.), С. S_a — в о с е в а й С. Кожнае артаганальнае пераўтварэнне плоскасці (прасторы) ёсць здабытак концай колькасці люстраных адбіткаў. Аналагічна вызначаецца С. у дачыненні да гіперплоскасці ў n-мернай прасторы; 2) С. ф і г у р ы — уласцівасць фігуры Ф сумяшчацца з сабой пры дзеянні некаторых нятоесных



Рыс. 1. Плоская фігура, сіметрычная ў дачыненні да простай a; пункт M пераўтвараецца ў M' пры люстраным адбітку ў дачыненні да a

Рыс. 2. Плоская фігура, сіметрычная ў дачыненні да пункта O; пункты M і N пераўтвараюцца ў пункты M' і N' такім чынам, што $OM = OM'$ і $ON = ON'$

артаганальных пераўтварэнняў. Мноства ўсіх такіх пераўтварэнняў разам з тоесным утварае групу сіметрыі фігуры Ф. Прыклады на плоскасці: а) фігура, якая самасумяшчаецца пры С. у дачыненні да простай a (рыс. 1; група С. складаецца з двух элементаў: S_a і тоеснага); б) у дачыненні да пункта O (цэнтральная С.) — пераўтварэнне Z_0, пры якім пункт M пераходзіць у пункт M' такі, што O — сярэдзіна адрэзка MM' (рыс. 2); 3) С. у ш ы р о к і м с э н с е: у мастацтве — від кампазіцыі ў архітэктуры, дэкаратыўна-прыкладным мастацтве; у прыродазнаўстве — сродак вывучэння канфігурацый у малекулах, крышталёвых кратах; прынцып даследавання фізічнай прасторы і часу і інш.

СІ́МПЛЕКС (ад лац. simplex — просты) — найпрасцейшы выпуклы мнагаграннік дадзенай колькасці намераў n. Пры $n = 3$ трохмерны С. уяўляе сабой адвольны (у тым ліку няправільны) *тэтраэдр*. Пад двухмерным С. разумеюць адвольны трохвугольнік, а пад аднамерным — адрэзак. Усякія $(n+1)$ пунктаў эўклідавай n-мернай прасторы $\mathbf{R}^m$, $m \geq n$, якія не знаходзяцца ні ў якой падпрасторы, што мае n намераў, адназначна вызначаюць n-мерны С. з вяршынямі ў дадзеных пунктах e_0, e_1, ..., e_n; ён можа быць вызначаны як выпуклае замыканне сукупнасці зададзеных $n+1$ пунктаў, г.зн. як перасячэнне ўсіх выпуклых целаў прасторы $\mathbf{R}^m$, якія змяшчаюць гэтыя пункты. Нульмерныя грані С. — гэта вяршыні, а аднамерныя грані — канты.

СІ́МПЛЕКС-МЕ́ТАД — адзін з асноўных метадаў развязання задач лінейнага праграмавання (гл. *Лінейнае праграмаванне*).

СІ́МПСАНА ФО́РМУЛА, п а р а б а л м е т а д — асобны выпадак *Ньютана—Котэса квадратурнай формулы*, у якой бяруцца тры вузлы:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{b}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]. \quad (1)$$

Часта ўжываецца складаная С.ф.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\{f(x_0 + f(x_n) +$$

$$+ 2\,[f(x_2) + f(x_4) + \ldots + f(x_{n-2})] + \quad (2)$$

$$+ 4\,[f(x_1) + f(x_3) + \ldots + f(x_{n-1})]\},$$

дзе $h = (b-a)/n$, $x_j = a + jh$, $j = 0, 1, \ldots, n$, n — цотнае. Формулу (2) таксама называюць С.ф. Формулы (1), (2) дакладныя для мнагасклад у ступені 3. Калі $f(x)$ мае непарыўную вытворную 4-га парадку на $[a, b]$, то хібнасць формулы (2) (рознасць паміж левай і правай часткамі набліжанай роўнасці (2)) мае выгляд

$$R(f) = -\frac{b-a}{180}h^4 f^{(4)}(\xi),$$

дзе $a < \xi < b$. Формула названая імем Т.Сімпсана, які атрымаў яе ў 1743 г., але яна была вядомая раней, напрыклад Дж.Грэгары (1668).

СІНГУЛЯ́РНАЕ ІНТЭГРА́ЛЬНАЕ РАЎНА́ННЕ — раўнанне, якое змяшчае шуканую функцыю пад знакам неўласцівага інтэграла так, што адпаведны інтэграл разбягаецца і замяняецца сваім *галоўным значэннем* паводле Кашы. Тэорыя С.і.р. значна больш складаная ў параўнанні з тэо-

рыяй *Фрэдгальма раўнанняў*. Адрозніваюць аднамерныя і мнагамерныя С.і.р. Найбольш поўна распрацаваная тэорыя аднамерных С.і.р. з ядром Кашы:

$$a(t)\varphi(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int_\Gamma\frac{\varphi(t)}{r-t}d\tau+$$

$$+\int_\Gamma K(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau=f(t),\ t\in\Gamma, \qquad (1)$$

дзе a, b, K, f — вядомыя функцыі, K — ядро Фрэдгальма, φ — шуканая функцыя, Γ — плоская крывая. Інтэграл разумеюць у сэнсе галоўнага значэння паводле Кашы:

$$\int_\Gamma\frac{\varphi(t)}{\tau-t}d\tau=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon\frac{\varphi(t)}{\tau-t}d\tau,\ t\in\Gamma,$$

дзе $\Gamma_\varepsilon=\Gamma\setminus l_\varepsilon$, l_ε — дуга $t't\,t''$ крывой Γ такая, што даўжыні дугаў $t't$ і $t\,t''$ роўныя ε. Раўнанне

$$a(t)\psi(t)-\frac{1}{\pi i}\int\frac{b(\tau)\psi(r)}{\tau-t}dr+$$

$$+\int K(t,\tau)\psi(\tau)d\tau=g(t) \qquad (2)$$

называецца саюзным да (1).

С.і.р. (1), (2) з нулявымі правымі часткамі называюцца аднароднымі. У агульным выпадку С.і.р. (1), (2) у квадратурах не развязваюцца, а прыводзяцца да раўнанняў Фрэдгальма і развязваюцца набліжана. Вывучэнне С.і.р. распаўсюджваецца на выпадкі складаных контураў інтэгравання, розных функцыянальных прастораў, а таксама на сістэмы С.і.р. з ядром Кашы і іншыя тыпы інтэгральных раўнанняў, індэкс якіх адрозніваецца ад нуля.

СІНГУЛЯ́РНАЯ МА́ТРЫЦА — тое, што *звыродная матрыца*.

СІНГУЛЯ́РНЫ ІНТЭГРА́Л — 1) інтэграл выгляду

$$\varphi_s(x)=\int_a^b K_n(x,t)f(t)dt,$$

які пры $n\to\infty$ збягаецца (пры пэўных умовах на $f(t)$) да функцыі $f(x)$. Функцыя $K_n(x,t)$ называецца ядром С.і. Сінгулярныя інтэгралы знаходзяць дастасаванне ў пытаннях выяўлення і набліжання функцый. Сістэматычна даследуюцца з 1909 г. (А. Лебэг); 2) тое, што *неўласцівы інтэграл*, які існуе ў сэнсе галоўнага значэння паводле Кашы.

СІ́НУС (ад лац. sinus — выгін, крывіня) — 1) адна з *трыганаметрычных функцый*, абазначаецца $y=\sin x$. Абсяг вызначэння — уся лікавая простая, абсяг значэнняў — адрэзак [–1; 1]. Графік функцый $y=\sin x$ гл. у арт. *Сінусоіда*. С. звязаны з *косінусам* формулай $\sin^2x+\cos^2x=1$, з касэкансам — формулай $\sin x=\frac{1}{\operatorname{cosec}x}$. Вытворная С.: $(\sin x)'=\cos x$, інтэграл ад С. $\int\sin x dx=-\cos x+c$. Функцыя, адваротная да С. на $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, называецца арксінусам; функцыя, што вызначаецца формулай $\operatorname{sh}x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$, — гіпербалічным С.; 2) С. вострага вугла ў прамавугольным трохвугольніку — тасунак катэта, які ляжыць супраць гэтага вугла, да гіпатэнузы.

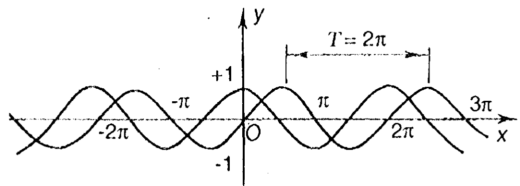
СІ́НУС ГІПЕРБАЛІ́ЧНЫ — гл. *Гіпербалічныя функцыі*.

СІ́НУСАЎ ТЭАРЭ́МА — тэарэма геаметрыі, якая вызначае сувязь паміж старанамі a, b, c адвольнага трохвугольніка і сінусамі супрацьлежных ім вуглоў A, B і C:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R,$$

дзе R — радыус акрэсленага круга.

СІНУСО́ІДА — графік функцыі $y=\sin x$; непарыўная крывая з перыядам $T=2\pi$ (рыс.). Пункты перасячэння С. з воссю Ox — гэта пункты $(k\pi)$,



$k\in\mathbb{Z}$. Графік функцыі $y=a\sin(bx+c)$, які называецца агульнай сінусоідай, у параўнанні з графікам функцыі $y=\sin x$ (звычайная сінусоіда) выцягнуты ўздоўж восі Oy у $|a|$ разоў, сціснуты ўздоўж восі Ox у $|b|$ разоў, зрушаны ўлева на адрэзак c/b і пры $a<0$ люстрана адбіты ў дачыненні да восі Ox; перыяд $T=2\pi/b$ (тут a, b, c — канстанты).

СІ́НУС-ПЕРАЎТВАРЭ́ННЕ — гл. *Фур'е інтэграл*.

СІСТЭ́МА АКСІЁМ ГЕАМЕ́ТРЫІ — набор аксіём, якія апісваюць уласцівасці дачыненняў паміж асноўнымі аб'ектамі геаметрыі. Класічны

прыклад С.а.г. — *Гільбэрта сістэма аксіём* элементарнай эўклідавай геаметрыі. Асноўныя геаметрычныя аб'екты ў ёй — пункты, простыя і плоскасці, якія могуць знаходзіцца паміж сабою ў дачыненнях "ляжаць", "паміж", "кангруэнтны". Акрамя С.а.г. Гільбэрта ёсць і іншыя, у якіх у якасці асноўных паняццяў выбіраюцца, напрыклад, вектар, сіметрыя, рух і г.д.

СКАЛЯ́Р (ад лац. scalaris — прыступкавы), скалярная велічыня — велічыня, кожнае значэнне якой можа быць паказана адным (звычайна рэчаісным) лікам. Прыклады скалярных велічыняў — даўжыня, плошча, аб'ём, тэмпература. У агульным выпадку С. — элемент нейкага поля. Тэрмін "скалярны" ўвёў У.Гамільтан (1843).

СКАЛЯ́РНАЕ ПО́ЛЕ — рэчаісная функцыя, вызначаная ў нейкай прасторы (звычайна ў трохмернай эўклідавай E або ў яе абсягу). Напрыклад, поле тэмпературы, поле электрычнага патэнцыялу. С.п. у E з сістэмай каардынат $Oxyz$ задаецца функцыяй $F(x, y, z)$. Паверхні $F(x, y, z) = C$ называюцца паверхнямі ўзроўню С.п. Асноўная характарыстыка С.п. — *градыент*, вектар, які ў дэкартавай сістэме каардынат роўны

$$\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

СКАЛЯ́РНАЯ ВЕЛІЧЫНЯ́ — тое, што *скаляр*.

СКАЛЯ́РНАЯ МА́ТРЫЦА — дыяганальная матрыца, у якой па дыяганалі размешчаныя роўныя паміж сабою элементы, г.зн. матрыца выгляду λE_n, дзе E_n — адзінкавая матрыца, λ — элемент поля, над якім разглядаецца матрыца.

СКАЛЯ́РНЫ ЗДАБЫ́ТАК — азначаецца для вектараў $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ прасторы або плоскасці як здабытак іх модуляў на косінус вугла φ паміж імі (φ — вугал, які не перавышае π): $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cos\varphi$. Іншыя абазначэнні: $\boldsymbol{ab}$, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$. С.з. ёсць *скаляр*.

Уласцівасці С.з.: $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$; $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$; $\lambda(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\lambda\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, \lambda\boldsymbol{b})$, дзе λ — адвольны лік; $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = 0$ ($\boldsymbol{a} \neq 0$, $\boldsymbol{b} \neq 0$), калі і толькі калі $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$; $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}^2 = |\boldsymbol{a}|^2$.

Калі ў ортаўнармаваным базісе з R^3 (або з R^2) вектары $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ маюць каардынаты $\boldsymbol{a}(a_1, a_2, a_3)$ і $\boldsymbol{b}(b_1, b_2, b_3)$ (на плоскасці $\boldsymbol{a}(a_1, a_2)$ і $\boldsymbol{b}(b_1, b_2)$), то $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ ($(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1b_1 + a_2b_2$).

Паняцце С.з. абагульняецца на мнагамерныя вектарныя прасторы: гэта — рэчаісны або камплексны лік (x, y), які супастаўлены элементам x і y вектарнай прасторы, такі, што $(x, x) = 0$, калі і толькі калі $x = 0$; $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$; $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$; $(x, y) = \overline{(y, x)}$. Вынікам з'яўляецца стасунак $(x,x) \geq 0$.

Вектарная прастора з С.з. называецца n-мернай эўклідавай прасторай або перадгільбэртавай прасторай. Поўная ў дачыненні да нормы $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ перадгільбэртава прастора называецца гільбэртавай прасторай.

СКАСАВА́ЛЬНЫ АСАБЛІ́ВЫ ПУНКТ — адзін з трох тыпаў ізаляваных *асаблівых пунктаў* адназначнай аналітычнай функцыі $f(z)$, $z \in$ C. С.а.п. характарызуецца тым, што ў яго працятым наваколлі функцыя $f(z)$ ёсць аналітычная і абмежаваная і існуе

$$\lim_{\substack{z \to a \\ z \neq a}} f(z) = f(a).$$

Гэты ліміт прымаюць за значэнне функцыі ў пункце a і атрымліваюць аналітычную функцыю (скасоўваюць асаблівасць). *Лёрана шэраг* функцыі $f(z)$ у акрузе С.а.п. не мае галоўнай часткі.

СКАСАВА́НАГА ТРЭ́ЦЯГА ЗАКО́Н — аксіёма класічнай логікі, сэнс якой у тым, што для кожнага выказвання A толькі адно з выказванняў "A" або "не A" праўдзівае. У матэматычнай логіцы С.т.з. выяўляецца тоесна праўдзівай формулай $A \vee \neg A$. Праўдзівасць гэтага закону аспрэчваецца прыхільнікамі розных кірункаў у логіцы: інтуіцыяністамі, канструктывістамі і інш.

СКАСАВА́ННЯ ТЭО́РЫЯ — тэорыя скасавання невядомых з сістэмы алгебраічных раўнанняў. Няхай зададзена сістэма раўнанняў

$$f_i(x_1, ..., x_n) = 0, \quad i = 1, ..., m,$$

дзе f_i — мнагасклады з каэфіцыентамі з зададзенага поля P. С.т. можа разглядацца як знаходжанне ўмоў на каэфіцыенты мнагаскладаў f_i, пры якіх сістэма супольная. У нейкіх простых выпадках развязак задач С.т. можа быць дадзены ў яўным выглядзе, напрыклад, сістэм лінейных аднародных і неаднародных раўнанняў; сістэмы дзвюх зменных x_1, x_2, аднародных па x_1, x_2. Тут неабходная і дастатковая ўмова існавання ненулявога развязку — роўнасць нулю *рэзультанта*, створанага з каэфіцыентаў мнагаскладаў. Скасаванне невядомых з адвольнай сістэмы алгебраічных раўнанняў можна здзейсніць паслядоўна. Такім чынам, прынцыпова С.т. дазваляе звесці развязанне сістэм раўнанняў да развязання шэрагу алгебраічных раўнанняў з адным невядомым.

СКАЧО́К ф у н к ц ы і — рознасць аднабаковых лімітавых значэнняў функцыі ў пункце, у якім яна не з'яўляецца непарыўнай. Гл. таксама *Разрыву пункт.*

СКЛАДА́НАЯ ФУ́НКЦЫЯ — функцыя ад функцыі. Пара функцый $z = h(y)$ і $y = g(x)$ усталёўвае залежнасць z ад x з дапамогай прамежкавых функцый g і h у выглядзе $z = z(x) = h(g(x))$. Функцыю, пабудаваную такім чынам, называюць С.ф., утворанай функцыямі h і g (кампазіцыяй функцый h і g), і абазначаюць праз $h \circ g$. С.ф. вызначаная тады, калі значэнні $g(x)$ трапляюць у мноства задання функцыі h.

Можна разглядаць С.ф., утвораныя большай колькасцю функцый (напрыклад, $\varphi \circ h \circ g$). Калі функцыі g і h вызначаныя адпаведна ў наваколлях пунктаў x і y $(y = g(h))$ і існуюць концыя вытворныя $g'(x)$ і $h'(y)$, то С.ф. $f = h \circ g$ вызначаная ў наваколлі пункта x і мае концую вытворную, якую можна вылічыць паводле правіла $f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x)$. Гэтае правіла называецца п р а в і л а м л а н ц у ж к а. Яно абагульняецца і на кампазіцыю адвольнай концай колькасці функцый. Паняцце С.ф. распаўсюджваецца і на функцыі некалькіх зменных, а таксама на вектарныя функцыі.

СКЛАДА́ННЕ — адно з асноўных арыфметычных дзеянняў. Вынікам складання лікаў a і b ёсць лік, які называецца с у м а й лікаў a і b (складнікаў) і абазначаецца $a + b$. Пры С. праўдзяцца камутатыўны $(a + b = b + a)$ і асацыятыўны $(a + (b + c)) = ((a + b) + c)$ законы. Акрамя С. лікаў разглядаюцца дзеянні (якія таксама называюцца С.) з рознымі іншымі матэматычнымі аб'ектамі: С. мнагаскладаў, вектараў, матрыц і г.д. Тэрмін С., як правіла, не ўжываюць да аперацый, якія не падпарадкоўваюцца камутатыўнаму і асацыятыўнаму законам.

СКЛАДА́ННЕ ІМАВЕ́РНАСЦЯЎ — тэарэма, паводле якой імавернасць аб'яднання парамі несупольных падзей $A_1, A_2, \ldots, A_n$ роўная суме іх імавернасцяў.

СКЛАДО́ВЫ ЛІК — натуральны лік, які не з'яўляецца *простым* (мае дзельнікі, адрозныя ад адзінкі і самога сябе). Напрыклад, 8, 27, 175. Усякі С.л. можна адзіным спосабам падаць у выглядзе здабытку ступеняў простых множнікаў (асноўная тэарэма арыфметыкі). Напрыклад, $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$.

СКРОЗЬ АБМЕЖАВА́НАЕ МНО́СТВА — мноства B метрычнай прасторы X з наступнай уласцівасцю: для кожнага ε існуе концае мноства пунктаў $x_i \in X$ і такіх, што адвольны пункт з A знаходзіцца ад нейкага пункта x_i на адлегласці, меншай за ε. С.а.м. — абмежаванае мноства, адваротнае сцверджанне праўдзіцца не заўсёды. Скрозь абмежаваная поўная прастора ёсць кампактная прастора.

СКРОЗЬ УПАРА́ДКАВАНАЕ МНО́СТВА — лінейна ўпарадкаванае мноства M, у якім існуе найменшы элемент і для кожнага (не найбольшага) элемента ў M існуе элемент непасрэдна за ім. Апошняя ўмова эквівалентная таму, што кожнае падмноства мноства M змяшчае найменшы элемент. Прыклад С.у.м. — паслядоўнасць натуральных лікаў са звычайным парадкам. Кожнае падмноства С.у.м. скрозь упарадкаванае.

СКРОЗЬ ШЧЫ́ЛЬНАЕ МНО́СТВА — падмноства A тапалагічнай прасторы X такое, што яго замыканне супадае з усёй прасторай X $(\bar{A} = X)$. Такім чынам, кожнае мноства $T \subset X$, адкрытае ў X, змяшчае хоць адзін пункт з падмноства A.

СКРЫ́НАК ПРЫ́НЦЫП — тое, што *Дырыхле прынцып.*

СЛАБА́Я ВЫТВО́РНАЯ — тое, што *Гато вытворная.*

СЛАБЫ́ ДЫФЕРЭНЦЫЯ́Л — абагульненне паняцця *дыферэнцыяла* лікавай функцыі. Для адлюстравання F, вызначанага ў наваколлі пункта x унармаванай прасторы X, ва ўнармаваную прастору Y ліміт

$$DF(x; h) = \lim_{t \to 0} \frac{F(x + th) - F(x)}{t}$$

называецца с л а б ы м д ы ф е р э н ц ы я л а м (або д ы ф е р э н ц ы я л а м Г а т о) адлюстравання F у пункце x пры прыросце h. Збежнасць разумеюць у сэнсе нормы прасторы Y. Калі С.д. лінейны па h, г.зн. $DF(x; h) = Ah$ (дзе A — абмежаваны лінейны аператар), то гэты аператар называецца с л а б о й в ы т в о р н а й (*Гато вытворнай*).

СЛЕД КВАДРА́ТНАЙ МА́ТРЫЦЫ $A = [a_{ij}]$ — сума яе дыяганальных элементаў. Абазначаецца $\mathrm{tr}\,A$ або $\mathrm{Sp}\,A$; $\mathrm{tr}\,A := a_{11} + \ldots + a_{nn}$. Калі A і B — матрыцы аднолькавага парадку над полем K, то $\mathrm{tr}\,(AB) = \mathrm{tr}\,(BA)$, $\mathrm{tr}\,(A + B) = \mathrm{tr}\,A + \mathrm{tr}B$, $\mathrm{tr}\,\alpha A = \alpha\,\mathrm{tr}\,A$. *Падобныя матрыцы* маюць роўныя сляды. У выпадку, калі поле K алгебраічна замкнёнае, $\mathrm{tr}\,A = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$, дзе $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — уласныя значэнні матрыцы A, узятыя з улікам іх кратнасці.

СЛІ́ЗГАЛЬНЫ ВЕ́КТАР — мноства роўных паміж сабою *вектараў*, размешчаных на адной простай. Напрыклад, сіла, прыкладзеная да цвёрдага цела, ёсць С.в.

СЛО́ВА — канцая паслядоўнасць літар пэўнага *алфавіта* (дапускаецца да разгляду і п у с т о е С., г.зн. С., якое не мае ніводнай літары). Напрыклад, шэраг знакаў "слова ў алфавіце" з'яўляецца С. у алфавіце, які складаецца з літар *а, в, е, і, л, о, с, ў, ф, ц*.

С. у алфавіце A індукцыйна вызначаецца наступнымі правіламі: а) пустое слова лічыцца С. у алфавіце A; б) калі аб'ект P ёсць С. у алфавіце A, а q — літара гэтага алфавіта, то аб'ект P_q таксама лічыцца С. у алфавіце A. С. — даволі агульны тып канструктыўнага аб'екта, таму паняцце С. значнае ў канструктыўнай матэматыцы. Яно шырока выкарыстоўваецца таксама ў алгебраічных даследаваннях, працах па матэматычнай лінгвістыцы і інш.

СЛУПКО́ВАЯ ДЫЯГРА́МА — тое, што *гістаграма*.

СЛУ́ШНАЯ АЦЭ́НКА — статыстычная ацэнка параметра размеркавання імавернасцяў. Няхай $X_1, X_2, ..., X_n$ — незалежныя вынікі назіранняў, размеркаванне якіх залежыць ад параметра θ. Ацэнка $T_n = T_n(X_1, X_2, ..., X_n)$ называецца С.а. θ, калі імавернасць падзеі $\{|T_k - \theta| > \varepsilon\}$ для $\forall\varepsilon > 0$ імкнецца да 0 пры $n \to 0$. Калі f — непарыўная функцыя, а T_n — С.а. параметра θ, то ў сваю чаргу $f(T_n)$ ёсць С.а. для $f(\theta)$. Найбольш распаўсюджаны метад атрымання пунктавых статыстычных ацэнак — метад максімальнай праўдападобнасці — вядзе да С.а. Трэба адзначыць, што калі існуе С.а. T_n параметра θ, то яна не адзіная. Гэты факт прыніжае значэнне паняцця С.а.

СО́БАЛЕВА ПРАСТО́РА — прастора $W_p^e(\Omega)$ функцый $f = f(x) = f(x_1,...,x_n)$, зададзеных на мностве $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, інтэгральных з p-й ступенню іх модуля разам са сваімі *абагульненымі вытворнымі* да парадку l улучна $(1 \le p \le \infty)$. Норма функцыі $f \in W_p^e(\Omega)$ азначаецца з дапамогай роўнасці

$$\|f\|_{W_p^e(\Omega)} = \sum_{|k| \le e} \|f^{(k)}\|_{L_p(\Omega)}. \qquad (1)$$

У (1)

$$f^{(k)} = \frac{\partial^{|k|} f}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}, \quad f^{(0)} = f$$

ёсць абагульненая частковая вытворная ад f парадку $|k| = k_1 + ... + k_n$ і

$$\|\varphi\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\varphi(x)|^p dx \right)^{1/p} \quad (1 \le p \le \infty).$$

С.п. з'яўляецца банахавай прасторай і шырока выкарыстоўваецца ў раўнаннях матэматычнай фізікі.

СПАДА́ЛЬНАЯ ПАСЛЯДО́ЎНАСЦЬ — паслядоўнасць (x_n), для якой выконваецца ўмова $x_{n+1} \le x_n \; \forall n \in \mathbf{N}$ (іншы раз такую паслядоўнасць называюць н е н а р а с т а л ь н а й). Калі $x_{n+1} < x_n$ для ўсіх $n \in \mathbf{N}$, то паслядоўнасць (x_n) называюць с т р о г а с п а д а л ь н а й (або спадальнай). Усякая абмежаваная знізу С.п. мае канцы ліміт, калі С.п. неабмежаваная знізу, то яна мае бясконцы ліміт (роўны $-\infty$).

СПАДА́ЛЬНАЯ ФУ́НКЦЫЯ — функцыя $f: X \to \mathbf{R}$, $X \subset \mathbf{R}$, такая, што для адвольных $x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2$ мае месца няроўнасць $f(x_1) \ge$ $\ge f(x_2)$ (іншы раз такія функцыі называюць н е н а р а с т а л ь н ы м і). Калі для ўсіх $x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2$ праўдзіцца няроўнасць $f(x_1) > f(x_2)$, то функцыю f называюць с т р о г а С.ф. н а м н о с т в е X (ці С.ф.). Дыферэнцавальная на (a, b) функцыя ёсць С.ф. на гэтым інтэрвале, калі і толькі калі выконваецца ўмова $f'(x) \le 0$ пры ўсіх $x \in (a, b)$. Для строгай спадальнасці дыферэнцавальнай на (a, b) функцыі дастаткова, каб было $f'(x) < 0$ пры ўсіх $x \in (a, b)$.

СПАЛУ́ЧАНАЯ МА́ТРЫЦА — тое, што *камплексна спалучаная матрыца*.

СПАЛУ́ЧАНАЯ ПРАСТО́РА — азначаецца для вектарнай прасторы X як вектарная прастора X_1, якая складаецца з непарыўных лінейных функцыяналаў на X.

СПАЛУ́ЧАНЫ АПЕРА́ТАР — лінейны аператар A_1, які дзейнічае з вектарнай прасторы Y_1, спалучанай да прасторы Y, у вектарную прастору X_1, спалучаную да прасторы X, і такі, што для адвольнага лінейнага функцыянала φ з Y_1 выконваецца $A_1\varphi(x) = \varphi(Ax)$.

СПАЛУ́ЧАНЫ ЛІК — 1) С.л. д а к а м п л е к с н а г а л і к у $z = a + ib$, камплексны лік $\bar{z} = a - ib$. Сума і здабытак С.л. $\bar{z}$ і z ёсць рэчаісныя лікі. Лікі z і $\bar{z}$ — карані квадратовага раўнання $z^2 - 2az + a^2 + b^2 = 0$. Увогуле, калі z — корань мнагаскладу з рэчаіснымі каэфіцыентамі, то С.л. $\bar{z}$ таксама корань таго ж мнагаскладу і мае тую ж

кратнасць, што і z; 2) С. л. д а а л г е б р а і ч н а г а л і к у α — лік, які з'яўляецца коранем *непрыводнага мнагаскладу* ліку α.

СПАЛУ́ЧАНЫ ФУ́НКТАР — паняцце, якое выяўляе універсальнасць і натуральнасць многіх матэматычных канструкцый. Няхай $T: \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ і $S: \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ — адвольныя функтары. S называецца с п а л у ч а н ы м с п р а в а з функтарам T, а T — с п а л у ч а н ы м з л е в а з функтарам S, калі для адвольнага аб'екта $C \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{C}$ і адвольнага аб'екта $D \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{D}$ існуе біекцыя мностваў C, D такая, што $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(C, S(D)) \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{D}}(T(C), D)$.

СПАЛУ́ЧАНЫ ЭЛЕМЕ́НТ — азначаецца для элемента a групы G як элемент $a' = g^{-1}ag$, дзе g — нейкі элемент G.

СПАЛУ́ЧАНЫХ ГРАДЫЕ́НТАЎ МЕ́ТАД — метад развязання сістэмы лінейных алгебраічных раўнанняў $Ax = b$ з дадатна вызначанай матрыцай A. Гэта прамы і ітэрацыйны метад адначасова: пры адвольным пачатковым набліжанні ён збягаецца за концую колькасць ітэрацый.

Разліковыя формулы С.г.м. задаюцца наступнымі рэкурэнтнымі стасункамі:

$$r_0 = b - Ax_0,\ s_1 = r_0,\ x_i = x_{i-1} + a_i s_i,$$

$$a_i = (S_i, v_{i-1}) / (S_i, AS_i),$$

$$r_i = r_{i-1} - a_i AS_i,\ \ S_{i-1} = r_i - \beta_i S_i,\ \ \beta_i = (r_{i2} AS_i) / (S_i, AS_i),$$

дзе x_0 — пачатковае набліжанне. Працэс заканчваецца пры пэўным k ($k \le m$, m — парадак сістэмы), для якога $r_k = 0$. С.г.м. развязвае задачу мінімізацыі функцыянала $\varphi(x) = (Ax, x) - 2(b, x)$, эквівалентную зыходнай. Значэнні x_i С.г.м. супадаюць з атрыманымі ў ітэрацыйным працэсе $x_{i-1} = x_0$, $x_{i+1} = x_i - a_i(Ax_i - b) + \beta_i(x_i - x_{i-1})$ пры $i > 0$, дзе a_i, β_i кожны раз вызначаюцца з умовы мінімуму велічыні $\varphi(x_{i+1})$.

СПАЛУ́ЧАНЫЯ ФУ́НКЦЫІ — функцыі $U(x, y)$ і $V(x, y)$ дзвюх рэчаісных зменных x і y, звязаных у нейкім абсягу D камплекснай зменнай $z = x + iy$ *Кашы—Рымана раўнаннямі*

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y},\quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}.$$

Калі вытворныя непарыўныя, то С.ф. u і v — рэчаісныя і ўяўныя часткі аналітычнай функцыі $f(z) = u + iv$, г.зн. С.ф. u і v абавязкова гарманічныя ($\Delta u = 0$, $\Delta v = 0$, дзе Δ — аператар Лапласа). Калі дадзеная адвольная гарманічная функцыя u у адназлучным абсягу D, то ў D з дакладнасцю да канстанты знаходзіцца спалучаная з u *гарманічная функцыя* v (*аналітычная функцыя* $f(z)$).

СПАЛУЧЭ́ННЕ з n э л е м е н т а ў п а m — усякае m-элементавае падмноства мноства, якое змяшчае n элементаў ($0 \le m \le n$). Колькасць С. з n па m абазначаецца праз C_n^m або $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$ і можа быць вылічана па формулах

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

або

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!},$$

дзе $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, $0! = 1$. Маюць месца стасункі

$$C_n^m = C_n^{n-m},\ C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1},$$

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n,\ A_n^m = C_n^m P_n,$$

дзе A_n^m — колькасць *размяшчэнняў* з n па m, P_n — колькасць *перастаўленняў* з n элементаў.

СПЕКТР (ад лац. spectrum — бачнае) — 1) С. м а т р ы ц ы A — карані характарыстычнага мнагаскладу $\det(A - \lambda E)$; 2) С. а п е р а т а р а A — сукупнасць лікаў λ, для якіх аператар $A - \lambda E$ не мае ўсюды вызначанага абмежаванага адваротнага аператара. Паняцце С. аператара A ёсць абагульненне паняцця сукупнасці ўласных значэнняў матрыцы.

СПЕКТРА́ЛЬНЫ АНА́ЛІЗ л і н е й н ы х а п е р а т а р а ў — абагульненне тэорыі ўласных значэнняў і ўласных вектараў матрыц на бясконцамерны выпадак. Найбольш распрацаваны С.а. самаспалучаных лінейных аператараў у гільбэртавай прасторы і унітарных лінейных аператараў у той жа прасторы.

СПЕКТРА́ЛЬНЫ РАСКЛА́Д — 1) С. р. л і н е й н а г а а п е р а т а р а — выяўленне лінейнага аператара ў выглядзе лінейнай камбінацыі аператараў праектавання, якое задавальняе пэўныя ўмовы; 2) С.р. в ы п а д к о в а й ф у н к ц ы і — расклад выпадковай функцыі ў шэраг або інтэграл па пэўнай сістэме функцый з каэфіцыентамі, якія ўзаемна некарэляваныя выпадковымі велічынямі; 3) С.р. ф у н к ц ы і — расклад функцыі ў шэраг па ўласных функцыях нейкага лінейнага

аператара. Прыватны выпадак: расклад функцыі ў шэраг Фур'е, расклады па іншых поўных сістэмах функцый.

СПЕЦЫЯЛЬНАЯ ЛІНЕЙНАЯ ГРУПА ступені n над целам K — падгрупа поўнай лінейнай групы $GL(n, K)$, утвораная трансвекцыямі (г.зн. матрыцамі выгляду $E_n + e_{ij}\lambda$, дзе E_n — адзінкавая матрыца, а $e_{ij} = [a_{ij}]$, $a_{ij} = 1$, $a_{\alpha\beta} = 0$, калі $\alpha \neq i$ або $\beta \neq j$, $\lambda \in K$); абазначаецца $SL(n, K)$. Яе таксама можна азначыць як ядро *гомамарфізму* f: $GL(n, K) \to K^*$, $f(g) = \det g$, $\forall g \in GL(n,K)$, дзе K^* — мультыплікатыўная група цела K, $\det g$ — вызначнік g. С.л.г. супадае з камутантам групы $GL(n, K)$ і з'яўляецца мноствам элементаў гэтай групы, вызначнік якіх роўны адзінцы.

СПЕЦЫЯЛЬНЫЯ ФУНКЦЫІ — функцыі, якія не з'яўляюцца *элементарнымі функцыямі*; выкарыстоўваюцца ў тэхніцы і матэматычнай фізіцы. Могуць вызначацца з дапамогай ступеневых шэрагаў, утваральных функцый, інтэгральных, дыферэнцыяльных і іншых раўнанняў, трыганаметрычных і абагульненых шэрагаў Фур'е, напрыклад, *гама-функцыя*, *бэта-функцыя*, *інтэгральны лагарыфм*, *інтэгральны сінус і інтэгральны косінус*, *гіпергеаметрычная функцыя*, *цыліндрычная функцыя*, *сферычная функцыя*, *эліптычная функцыя* і інш. Для С.ф. складаюцца табліцы значэнняў, інтэгралаў, шэрагаў.

СПІНОР — матэматычная велічыня, якая характарызуецца асаблівым законам пераўтварэння пры пераходзе ад адной сістэмы каардынат да іншай. С. знаходзіць дастасаванне ў розных пытаннях квантавай механікі, у тэорыі выяўленняў групаў, у тапалогіі і г.д.

СПІРАЛЬ (ад лац. spira — выгін, завіток) — плоская крывая, якая звычайна абыходзіць вакол аднаго (або некалькіх) пунктаў і пры гэтым набліжаецца ці аддаляецца ад яго. Адрозніваюць алгебраічныя С. і псеўдаспіралі.

Алгебраічныя спіралі — С., раўнанне якіх у палярных каардынатах ёсць алгебраічнае ў дачыненні да зменных ρ і φ. Да іх належаць *архімедава спіраль*, Галілея С., гіпербалічная С., парабалічная С., Фэрма С. Псеўдаспіралі — С., натуральныя раўнанні якіх можна запісаць у выглядзе $r = as^m$, дзе r — радыус крывіні, s — даўжыня шляху. Пры $m = 1$ псеўдаспіраль з'яўляецца *лагарыфмічнай спіраллю*, пры $m = -1$ — Карню С., пры $m = 1/2$ — *эвальвентай* акружыны.

СПЛАЙН, сплайн-функцыя — функцыя $S_m(\Delta_n; x)$, вызначаная на адрэзку $[a, b]$, якая супадае на частковых адрэзках $[x_i, x_{i+1}]$, утвораных сеткай Δ_n: $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$, з пэўнымі алгебраічнымі мнагаскладамі ступені не вышэй за m і мае на $[a, b]$ непарыўную $(m-1)$-ю вытворную. С. можна падаць у выглядзе

$$S_m(\Delta_n; x) = P_{m-1}(x) + \sum_{k=0}^{m-1} c_k (x - x_k)_+^m,$$

дзе c_k — рэчаісныя лікі, $P_{m-1}(x)$ — мнагасклад ступені не вышэй за $(m-1)$, $(x-t)_+ = \max(0, x-t)$. Пункты $\{x_i\}_{i=1}$ называюцца вузламі С. Калі С. $S_m(\Delta_n; x)$ мае на $[a, b]$ непарыўную $(m-k)$-ю вытворную ($k \geq 1$), а $(m-k+1)$-я вытворная ў вузлах С. разрыўная, тады кажуць, што ён мае дэфект k. С. ужываецца для інтэрпаляцыі функцый, пабудовы набліжаных развязкаў звычайных дыферэнцыяльных раўнанняў і раўнанняў з частковымі вытворнымі.

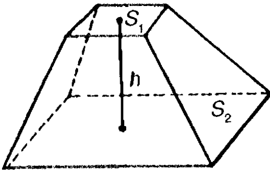
СПЛАЙН-ФУНКЦЫЯ — тое, што *сплайн*.

СПЛАСТАВАННЕ — непарыўнае (дыферэнцавальнае) сюр'ектыўнае адлюстраванне тапалагічных прастораў (гладкіх мнагастайнасцяў) $\pi: E \to B$. Адлюстраванне π называецца праекцыяй, B — базай, E — татальнай прасторай, $\pi^{-1}(b)$ — пластом над $b \in B$. Напрыклад, спластасаванне-здабытак $\pi: B \times F \to B$, дзе π — праекцыя на першы множнік. С. называецца спластаваннем з тыповым пластом, калі кожны яго пласт $\pi^{-1}(b)$ гамеаморфны (дыфеаморфны) тапалагічнай прасторы (мнагастайнасці) F. С. называецца лакальна трывіяльным, з тыповым пластом F, калі базу B можна накрыць наваколлямі $\{u_i\}$, каля кожнага з якіх існуе гомеамарфізм (дыфеамарфізм) $\varphi_i: u_i \times F \to \pi^{-1}(u_i)$, пры гэтым праекцыі π адпавядае праекцыя на першы множнік. Сечывам С. называецца адлюстраванне $S: B \to E$, для якога $\pi \cdot S = Id_B$. Існаванне сечыва для С. звязанае з яго лакальнай трывіяльнасцю. Паняцце С. узнікла ў першай палове 20 ст. у сувязі з задачамі тапалогіі і геаметрыі мнагастайнасцяў.

СПУСКУ МЕТАД — 1) метад развязання задач мінімізацыі $f'(x) = \min_x f(x)$, дзе f — нейкая функцыя зменнай $x = (x_1, ..., x_n)$. Ітэрацыйная паслядоўнасць $\{x^k\}$ С.м. вылічаецца па формуле $x^{k+1} = x^k + \alpha_k g^k$, дзе g^k — вектар, які паказвае нейкі кірунак спадання функцыі f у пункце x', α_k — даўжыня кроку ў кірунку g^k; 2) метад развязання *дыяфантавых раўнанняў*, прапанаваны П.Фэрма.

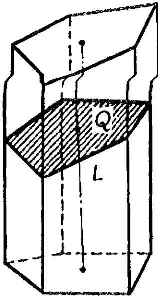
ССЕЧАНАЯ ПІРАМІДА — піраміда, у якой плоскасцю, паралельнай аснове, адсечаная яе верхняя (вострая) частка (гл. рыс.). Аб'ём С.п. роўны

$$V = \frac{1}{3}(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2),$$



дзе S_1 і S_2 — плошчы асноў, h — адлегласць паміж асновамі (вышыня С.п.). Для правільнай С.п. плошча бакавой паверхні $M = \frac{P+p}{2}l$, дзе P, p — перыметры асноў, l — апафема (вышыня бакавой грані).

ССЕЧАНАЯ ПРЫЗМА — частка прызмы, адсечаная плоскасцю, не паралельнай аснове (гл. *рыс.). Аб'ём С.п.* $V = lQ$, дзе l — *даўжыня адрэзка,*

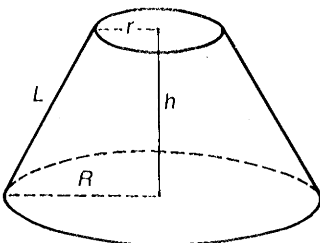


які злучае цэнтры асноў, Q — плошча сечыва прызмы плоскасцю, перпендыкулярнай гэтаму адрэзку. Для трохвугольнай С.п.

$$V = \frac{1}{3}(a + b + c)Q,$$

дзе a, b, c — даўжыні яе кантаў, Q — плошча перпендыкулярнага сечыва.

ССЕЧАНЫ КОНУС — частка конуса без верхняй (вострай) часткі, адсечанай плоскасцю, паралельнай аснове (гл. рыс.). Аб'ём С.к. роўны $V = \pi(R^2 + r^2 + Rr)h/3$, бакавая паверхня $S = \pi(R + r)/b$, дзе R і r — радыусы асноў, h — вышыня, $l = \sqrt{h^2 + (R-r)^2}$ — даўжыня ўтваральнай.



СТАЛАЯ ВЕЛІЧЫНЯ — тое, што *канстанта.*

СТАНДАРТНАЕ АДХІЛЕННЕ — тое, што *квадратовае адхіленне.*

СТАСУНАК — фармалізаваны выраз пэўных дачыненняў паміж матэматычнымі аб'ектамі, напрыклад,

$$a \le b,\ \ x^2 + 1 = x,\ \ \frac{ax+1}{b} = \frac{c}{d},\ \ \sqrt{x^3 - 1} = y,$$

$$x \in X,\ \ A(x) \Leftrightarrow B(x).$$

СТАТЫСТЫКА (ням. statistik ад лац. status — стан) — тэрмін, які ўжываецца ў *матэматычнай статыстыцы* для назову функцыі ад вынікаў назіранняў. Няхай выпадковая велічыня X прымае значэнні ў выбаркавай прасторы (X, F, P). Тады адвольнае B — вымернае адлюстраванне $T(\cdot)$ прасторы X у нейкую вымерную прастору называецца с т а т ы с т ы к а й. У тэорыі ацэньвання і праверкі статыстычных гіпотэз важную ролю мае паняцце д а с т а т к о в а й С. Яна дазваляе праводзіць рэдукцыю звестак без страты інфармацыі пра параметрычную сям'ю размеркаванняў, якая вывучаецца.

СТАТЫСТЫЧНАЕ АЦЭНЬВАННЕ — адзін з асноўных раздзелаў матэматычнай статыстыкі, прысвечаны ацэньванню па выпадковых назіраннях тых або іншых характарыстык іх размеркавання. У агульнай тэорыі ацэньвання назіранне X ёсць выпадковы элемент, невядомае размеркаванне якога належыць сям'і размеркаванняў P. Сям'ю размеркаванняў заўжды можна запісаць у параметрычным выглядзе $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$. Пры гэтым мяркуюць, што форма залежнасці ад параметра і мноства θ вядомыя. Задача ацэньвання па назіранні X невядомага параметра θ палягае ў тым, каб пабудаваць функцыю $\widehat{\Theta}(X)$ ад назіранняў, дастаткова набліжаную да θ. Адрозніваюць параметрычныя задачы ацэньвання, калі θ — падмноства канцамернай эўклідавай прасторы, і непараметрычныя. Найбольш вядомыя *момантаў метад, найменшых квадратаў метад* і *максімальнай праўдападобнасці метад.*

СТАТЫСТЫЧНАЕ МАДЭЛЯВАННЕ — метад дастасоўнай і вылічальнай матэматыкі, сутнасць якога ў рэалізацыі на камп'ютары спецыяльна распрацаваных стахастычных мадэляў, з'яваў ці аб'ектаў, якія вывучаюцца. Пашырэнне абсягу скарыстання С.м. звязанае з хуткім развіццём вылічальнай тэхнікі. З іншага боку, класічныя вылічальныя метады ў многіх выпадках недастаткова грунтоўныя для вывучэння ўсё болей складаных матэматычных мадэляў даследаваных з'яваў. Гэта таксама павышае ролю С.м., эфектыўнасць якога слаба залежыць ад памернасці і геаметрычных дэталяў задачы. Станоўчыя ўласцівасці гэтага метаду — простасць і натуральнасць алгарытмаў, а таксама магчымасць будавання мадыфікацый з улікам інфармацыі пра развязак. Задачы, якія развязваюцца метадам С.м., можна ўмоўна падзяліць на два класы. Да першага можна далучыць задачы са стахастычнай прыродай, калі выкарыстоўваецца прамое мадэляванне імавернаснай мадэлі; да другога — дэтэрмінаваныя задачы, дзе штучна будуецца лікавае развязанне ў выглядзе статыстычных ацэнак. С.м. шырока выкарыстоўваецца для развязання задач тэорыі масавага абслугоўвання і іншых складаных стахастычных сістэм.

СТАТЫСТЫЧНАЯ АЦЭНКА — функцыя ад вынікаў назіранняў, якая ўжываецца для ацэнкі невядомых параметраў тэарэтычнага размеркавання імавернасцяў. Адрозніваюць ацэнкі пунктавыя і інтэрвальныя. Пунктавай ацэнкай называецца такая С.а., значэнне якой можна паказаць геаметрычна ў выглядзе пункта ў той жа прасторы, што і значэнні невядомых параметраў. Звычайна разглядаюць уласцівасці пунктавых С.а.: нязрушанасць, слушнасць і эфектыўнасць. Найбольш распаўсюджаныя метады знаходжання пунктавых С.а.: *момантаў метад, максімальнай праўдападобнасці метад* і *найменшых квадратаў метад*. Інтэрвальнай ацэнкай называецца такая С.а., якую можна паказаць геаметрычна ў выглядзе мноства пунктаў, якія належаць прасторы параметраў. У якасці характарыстыкі праўдзівасці інтэрвальнай С.а. прымаюць даверу каэфіцыент — найменшае магчымае значэнне імавернасці, з якой гэтая ацэнка "накрые" невядомы параметрычны пункт.

СТАТЫСТЫЧНАЯ ГІПОТЭЗА — акрэсленае меркаванне пра ўласцівасці размеркавання імавернасцяў, якое ляжыць у аснове назіраных выпадковых з'яваў. Паводле зместу гіпотэзы, якія выказваюцца ў ходзе статыстычнай апрацоўкі вынікаў назіранняў, падзяляюць на наступныя тыпы: пра агульны выгляд закону размеркавання выпадковай велічыні, якая даследуецца; пра аднароднасць дзвюх або некалькіх выбарак, якія апрацоўваюцца; пра лікавыя значэнні параметраў генеральнай сукупнасці, якая даследуецца; пра агульны выгляд залежнасці, што існуе паміж кампанентамі мнагамернай прыкметы, якая даследуецца; пра незалежнасць і стацыянарнасць вынікаў назіранняў.

СТАТЫСТЫЧНЫ АНАЛІЗ выпадковых працэсаў — раздзел матэматычнай статыстыкі, прысвечаны метадам апрацоўкі і выкарыстання статыстычных звестак, якія маюць дачыненне да выпадковых працэсаў. Адзін з галоўных (з пункту гледжання дастасаванняў) класаў задач С.а. выпадковых працэсаў — гэта задачы выяўлення сігналу на фоне шуму (напрыклад, у радыёлакацыі). Матэматычныя задачы С.а.: праверка статыстычных гіпотэз, статыстычная ацэнка параметраў размеркавання. Шэраг задач С.а. мае дачыненне да задач на непараметрычныя метады статыстыкі.

СТАТЫСТЫЧНЫ КРЫТЭР — галоўнае правіла, з дапамогай якога на падставе вынікаў назіранняў выяўляецца намер у задачы праверкі статыстычных гіпотэз. Пабудаваць С.к. — гэта значыць: а) вызначыць тып праверанай гіпотэзы; б) прапанаваць і абгрунтаваць канкрэтны выгляд функцыі ад вынікаў назіранняў (крытычнай статыстыкі), на аснове значэнняў якой выяўляецца канчатковы намер; в) даць такі спосаб вылучэння абсягу магчымых значэнняў крытычнай статыстыкі з абсягу адхілення правяранай асноўнай гіпотэзы H_0, каб было выканана патрабаванне да велічыні памылковага адхілення гіпотэзы H_0 (г.зн. да ўзроўню значнасці крытэру). У выніку ўжывання С.к. можна або выявіць правільны намер, або зрабіць адну з дзвюх памылак: прыняць альтэрнатыўную гіпотэзу H_1, калі на самой справе праўдзіцца H_0 (памылка 1-га роду), ці прыняць H_0, калі на самой справе праўдзіцца H_1 (памылка 2-га роду).

СТАТЫСТЫЧНЫХ ВЫПРАБАВАННЯЎ МЕТАД — метад лікавага разліку, пры якім невядомыя велічыні разглядаюць як характарыстыкі аднаведнай выпадковай з'явы. Гэтая выпадковая з'ява лікава мадэлюецца, пасля чаго невядомыя велічыні ацэньваюцца з дапамогай імітацый назіранняў выпадковай з'явы. Для імітацыі выпадко-

вай з'явы звычайна выкарыстоўваюць паслядоўнасць незалежных выпадковых лікаў, раўнамерна размеркаваных на [0, 1]. Вялікі клас мадэляў, якія выкарыстоўваюцца ў С.в.м., звязаны са схемай выпадковых блуканняў. С.в.м. выкарыстоўваецца для развязання сістэм лінейных раўнанняў. Іншы назоў С.в.м. — *Монтэ-Карла метад* — у большай ступені адпавядае тэорыі мадыфікацый С.в.м.

СТАТЫСТЫ́ЧНЫХ ГІПО́ТЭЗ ПРАВЕ́РКА — адзін з асноўных раздзелаў *матэматычнай статыстыкі*, у якім развіваюцца ідэі і метады статыстычнай праверкі адпаведнасці паміж эксперыментальнымі звесткамі і гіпотэзамі наконт іх імавернаснай прыроды.

Няхай назіраецца выпадковы вектар $X = (x_1, ...$ $..., x_n)$, размеркаванне імавернасцяў якога належыць зададзенаму мноству імавернасных размеркаванняў $H = \{P_\theta, \theta \in \Theta\}$, дзе Θ — нейкае параметрычнае мноства. Кожнае непустое падмноства H_i мноства H называецца с т а т ы с т ы ч н а й г і п о т э з а й. Калі H_i складаецца толькі з аднаго элемента, то такая гіпотэза называецца п р о с т а й, у іншым выпадку — с к л а д а н а й. Гіпотэза $H_0 = \{P_\theta, \theta \in \Theta_0 \subset \Theta\}$ называецца а с н о ў н а й, а гіпотэза $H_1 = H \backslash H_0 = \{P_\theta, \theta \in \Theta_1 = \Theta \backslash \Theta_0\}$ — а л ь т э р н а т ы ў н а й.

Асноўнай задачай тэорыі С.г.п. у рамках мадэлі Ноймана—Пірсана з'яўляецца знаходжанне аптымальнага спосабу, карыстаючыся якім можна было б на падставе назіранняў выпадковага вектара X праверыць, справядлівая гіпотэза H_0 ці H_1. Пры гэтым галоўнае правіла, з дапамогай якога развязваецца гэтая задача, — *статыстычны крытэр.*

СТАТЫСТЫ́ЧНЫХ РАЗВЯЗА́ННЯЎ ТЭО́РЫЯ — агульная тэорыя правядзення статыстычных назіранняў, іх апрацоўкі і выкарыстання.

Няхай ёсць пэўная выпадковая з'ява Ф, якая апісваецца якасна вымернай прасторай (Ω, A) усіх магчымых яе зыходаў ω і колькасна — размеркаваннем P імавернасцяў зыходаў. Да пачатку доследаў статыстык мае ў дачыненні да P няпоўную інфармацыю. Правёўшы адно або некалькі назіранняў Ф і апрацаваўшы матэрыял, статыстык вымушаны прыйсці да высновы наконт закону размеркавання P і выбраць найболей карысныя паводзіны. У класічных задачах матэматычнай статыстыкі колькасць назіранняў фіксавалася і адшукваліся аптымальныя ацэнкі невядомага закону P. З гледзішча сучаснай агульнай канцэпцыі галоўнае правіла будзе аптымальным тады, калі яно мінімізуе рызыку — матэматычнае спадзяванне сумы ўсіх стратаў.

СТАХАСТЫ́ЧНАЕ ПРАГРАМАВА́ННЕ — раздзел матэматычнага праграмавання, прысвечаны даследаванню стахастычных экстрэмальных задач, г.зн. задач, у якіх умовы дапушчальнасці і (або) мэтавая функцыя залежаць ад выпадковых параметраў. Такія задачы ўзнікаюць пры мадэляванні працэсаў выяўлення намераў, у якіх уваходная інфармацыя (або яе частка) мае імавернасны характар. У выглядзе задач С.п. фармулююцца многія задачы аптымальнага планавання, кіравання і праектавання, а таксама некаторыя экстрэмальныя задачы матэматычнай статыстыкі.

У задачы С.п. мэтавая функцыя $f(x, \omega)$ і абмежаванні $g_i(x, \omega) \le 0$ ($i = 1, 2, ..., m$) залежаць ад вектара выпадковых параметраў ω (вектар x належыць нейкаму мноству G). Пры гэтым $f(x, \omega)$ і $g_i(x, \omega)$ пры адвольным фіксаваным значэнні $x \in G$ ёсць выпадковыя велічыні. У задачы С.п. звычайна патрэбна максімізаваць (мінімізаваць) нейкую характарыстыку выпадковай функцыі $f(x, \omega)$, напрыклад яе матэматычнае спадзяванне.

Змястоўная класіфікацыя задач С.п. вызначаецца таксама і тым, ці лічыцца дапушчальным развязкам задачы дэтэрмінаваны вектар x або вектар-функцыя $x(\omega)$, значэнні якой залежаць ад рэалізацыі выпадковых параметраў. У першым выпадку задачу называюць задачай п е р с п е к т ы ў н а г а С.п., у другім — задачай а п е р а т ы ў н а г а С.п.

СТАХАСТЫ́ЧНАЯ МА́ТРЫЦА — квадратная матрыца $X(t)$, элементы якой — неадмоўныя рэчаісныя лікі і сума элементаў кожнага радка роўная адзінцы. С.м. адыгрываюць значную ролю ў тэорыі імавернасцяў, бо С.м. можна разглядаць як матрыцу пераходу імавернасцяў у *Маркава ланцугу.*

СТАХАСТЫ́ЧНЫ ПРАЦЭ́С — тое, што *імавернасны працэс.*

СТАЦЫЯНА́РНЫ ВЫПАДКО́ВЫ ПРАЦЭ́С — спецыяльны клас выпадковых працэсаў. Выпадковы працэс $X(t)$ называюць с т а ц ы я н а р н ы м, калі ўсе яго імавернасныя характарыстыкі не змяняюцца з цягам часу t. Таму размеркаванне імавернасцяў велічыні $X(t)$ пры ўсіх t ёсць адно і тое ж, а сумеснае размеркаванне імавернасці велічыняў $X(t_1)$ і $X(t_2)$ залежыць толькі ад $t_1 - t_2$, г.зн. размеркаванні параў велічынь $\{X(t_1), X(t_2)\}$ і $\{X(t_1 + s), X(t_2 + s)$ аднолькавыя

пры ўсіх t_1, t_2 і s. З дапамогай С.в.п. добра апісваюцца многія рэальныя з'явы, напрыклад пульсацыя сілы току або напругі ў электрычным ланцугу. Першыя значныя вынікі ў галіне С.в.п. атрымалі Я.Слуцкі і А.Хінчын у канцы 1920 — пачатку 1930-х гг.

СТО́КСА ФО́РМУЛА — формула, якая звязвае крывалінейны інтэграл па замкнёным контуры L з паверхневым інтэгралам па гладкай, арыентаванай паверхні S, абмежаванай контурам L:

$$\int_L Pdx + Qdx + Rdx = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy +$$
$$+ \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx,$$

ці ў вектарнай форме:

$$\int_L \boldsymbol{a} d\boldsymbol{r} = \iint_S \boldsymbol{n} \operatorname{rot} \boldsymbol{a} ds,$$

дзе $\boldsymbol{a} = (P, Q, R)$, $d\boldsymbol{r}$ — элемент контура L, ds — элемент паверхні S, $\boldsymbol{n}$ — орт вонкавай нармалі паверхні: rot $\boldsymbol{a}$ — ротар поля $\boldsymbol{a}$, кірунак абыходу контура ўзгадняецца з арыентацыяй паверхні. Фізічны сэнс С.ф.: цыркуляцыя вектарнага поля па контуры L роўная плыні ротара гэтага поля праз паверхню S.

СТРАТЭ́ГІЯ (лац. strategia ад stratos — войска + ago — вяду) у т э о р ы і г у л ь н я ў — спосаб дзеяння гульцоў (ці кааліцыі гульцоў), пры якім асобныя камбінацыі, хады падпарадкаваныя агульнаму, загадзя абдуманаму плану. Гл. *Гульняў тэорыя.*

СТРО́ГА НАРАСТА́ЛЬНАЯ ФУ́НКЦЫЯ — тое, што *нарастальная функцыя.*

СТРО́ГА СПАДА́ЛЬНАЯ ФУ́НКЦЫЯ — тое, што *спадальная функцыя.*

СТРУКТУ́РА (ад лац. structura — будова, размяшчэнне) — 1) С. — паняцце, што ляжыць у аснове выкладання "Элементаў матэматыкі" Н.Бурбакі (агульны псеўданім групы французскіх матэматыкаў) — спроба асэнсаваць вынікі папярэдняга развіцця матэматыкі з пазіцый Д.Гільбэрта, г.зн. з пазіцый фармальнага аксіяматычнага метаду. С. парадку, групы, тапалагічныя і іншыя вызначаюцца заданнем дачыненняў, у якіх знаходзяцца элементы мноства (тыповая характарыстыка С.), і наступнымі пералікамі ўмоваў, якія задавальняюць дадзеныя дачыненні (аксіёмы С.) 2) С. — часткова ўпарадкаванае мноства, у якім кожнае двухэлементавае падмноства мае як дакладную верхнюю (sup), так і дакладную ніжнюю (inf) межы. Напрыклад, мноства ўсіх рэчаісных лікаў з натуральным парадкам $\leq$ (калі $a \leq b$, то sup $\{a; b\} = b$, а inf $\{a; b\} = a$, дзе sup — найменшае агульнае кратнае, а inf — найбольшы агульны дзельнік дадзеных лікаў); мноства ўсіх неадмоўных цэлых лікаў $\mathbf{Z}_0$, часткова ўпарадкаваных па падзельнасці ($a \leq b$, калі $b = ac$ для нейкага c). Гл. *Крата.*

СТРУКТУ́РА ЗВЕ́СТАК — клас аднародных матэматычных аб'ектаў, арыентаваны на эфектыўнае выяўленне звестак у нейкім класе задач, падрыхтаваных для развязання на камп'ютары. С.з. з'яўляюцца концыя паслядоўнасці аднатыповых або рознатыповых элементаў (масівы, запісы, спісы і г.д.), табліцы (дзвюхмерныя масівы, матрыцы і г.д.) і дрэвы.

СТУПЕ́НЕВАЯ ФУ́НКЦЫЯ — функцыя выгляду $y = x^a$, дзе a — фіксаваны лік, $a \in \mathbf{R}$. Калі a — цэлы лік, то С.ф. — прыватны выпадак рацыянальнай функцыі, напрыклад $y = x^2$ — квадратовая функцыя. Уласцівасці С.ф. рэчаіснага зменнага: пры $x > 0$ С.ф. вызначаная і дадатная; $0^a = 0$ $(a \neq 0)$; $x^0 = 1$ $(x \neq 0)$; 0^0 — нявызначанасць; С.ф. x^n, дзе n — цэлы дадатны лік, вызначаная пры ўсіх x; С. ф. $x^{-n} = 1/x^n$ вызначаная пры $x \neq 0$; С. ф. $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$, дзе n — цэлы, няцотны дадатны лік, вызначаная і адмоўная пры $x < 0$. У пэўных выпадках лічаць, што гэтая функцыя вызначаная толькі пры $x \geq 0$. Звычайна ўласцівасці С.ф. разглядаюць толькі пры $x > 0$, але многія з іх выконваюцца і пры $x \leq 0$ (напрыклад, калі a — цэлы дадатны лік, С.ф. x^a пры $x > 0$ непарыўная, нарастае, калі $a > 0$, і спадае, калі $a < 0$). Бясконца разоў дыферэнцавальная С.ф. камплекснай зменнай $z = x + iy$, якая вызначаецца пры $z \neq 0$ роўнасцю $w = z^a = e^{a\ln z} = e^{a(\ln|z| + i\arg z)}$ (гл. *Лагарыфмічная функцыя*), адназначная пры цэлых a. Калі $a = \frac{m}{n}$ — нескарачальны дроб, то С.ф. $w = z^{m/n}$ — n-значная функцыя, у астатніх выпадках С.ф. $w = z^a$ — бясконцазначная.

СТУПЕ́НЕВЫ ШЭ́РАГ — функцыйны шэраг выгляду

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots,$$

дзе z_0 — пэўны пункт (цэнтр *круга збежнасці*), a_k — каэфіцыенты, $a_k(z-z_0)^k$ — складнікі. Для кожнага С.ш. існуе радыус збежнасці R, які вызначаецца па формуле Кашы—Адамара

$$\frac{1}{R}=\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}.$$

Пры $R=0$ С.ш. збягаецца толькі для $z=z_0$, пры $R=\infty$ — для ўсіх $z\in\mathbf{C}$, пры $0<R<\infty$ — для z, якія задавальняюць умову $|z-z_0|<R$ (абсяг збежнасці С.ш. складаецца з круга $|z-z_0|<R$ і, магчыма, з нейкага падмноства акружыны $|z-z_0|=R$). Гл. таксама *Тэйлара шэраг.*

СТУПЕ́НЬ ЛІ́КУ, n-я ступень ліку a пры натуральным n — здабытак n множнікаў, кожны з якіх роўны a. Абазначаецца a^n; С.л. a^2 называецца квадратам, a^3 — кубам ліку a (a^2 — плошча квадрата, a^3 — аб'ём куба са стараной a). Дзеянні з С.л. a выконваюцца па формулах

$$a^na^m=a^{n+m};\ a^n:a^m=a^{n-m};\ (a^n)^m=a^{nm}.$$

Абагульненні С.л.: нулявая $a^0=1$ $(a\neq 0)$; адмоўная $a^{-n}=1/a^n$; калі a — ірацыянальны лік, то $a^\alpha=\lim a^{r_n}$, дзе r_n — усякая паслядоўнасць рацыянальных лікаў, збежная да α. Разглядаюцца таксама ступені з камплекснымі асновамі і паказнікамі $u^v=e^{v\ln u}$.

СТУПЕНЯВА́ННЕ — тое, што *падвышэнне да ступені.*

СТЫ́ЛЬТ'ЕСА ІНТЭГРА́Л — абагульненне паняцця *вызначанага інтэграла*, якое прапанаваў у 1894 г. Т.Стыльт'ес. У С.і. замест звычайных інтэгральных сумаў

$$\sum_{j=1}^{n}f(\xi_j)(x_j-x_{j-1})$$

разглядаюцца сумы

$$\sum_{j=1}^{n}f(\xi_j)(\varphi(x_j)-\varphi(x_{j-1})),$$

дзе $\varphi(x)$ — функцыя з абмежаванай варыяцыяй, $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$. Калі $\varphi(x)$ — кавалкава-сталая функцыя, то С.і. ператвараецца ў шэраг. Пры дыферэнцыяльнай функцыі $\varphi(x)$ С.і. можна падаць у выглядзе

$$\int_a^b f(x)d\varphi(x)=\int_a^b f(x)\varphi'(x)dx.$$

Гэтыя дзве абставіны робяць С.і. вельмі зручным у тэорыі імавернасцяў, бо дазваляюць адначасова ў адным запісе падаць дыскрэтныя і непарыўныя выпадковыя велічыні.

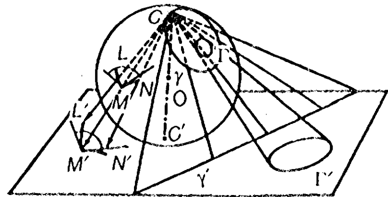
СТЭ́РЛІНГА ФО́РМУЛА — асімптатычная роўнасць, якая дазваляе знаходзіць набліжаныя значэнні фактарыяла $n!=1\cdot2\cdot\ldots\cdot n$ і *гама-функцыі* пры вялікіх значэннях n:

$$n!\approx\sqrt{2\pi n}n^ne^{-n},\ n\to\infty;$$

$$\Gamma(z+1)\approx\sqrt{2\pi z}z^ze^{-z},\ \ \mathrm{Re}z\to\infty$$

(знак "≈" разумеецца ў тым сэнсе, што дзель левай і правай частак імкнецца да адзінкі). Формула названая імем Дж.Стэрлінга, які ў 1730 г. атрымаў выраз для асімптатычнага раскладу лагарыфма гама-функцыі.

СТЭРЭАГРАФІ́ЧНАЯ ПРАЕ́КЦЫЯ — адпаведнасць паміж пунктамі сферы і пунктамі плоскасці ў прасторы R^3, усталяваная спецыяльным чынам. Менавіта: 1) выбіраецца пункт C на сферы (цэнтр С.п.); 2) плоскасць размяшчаецца перпендыкулярна радыусу CO (O — цэнтр сферы) у канцы дыяметра CC' або так, каб пункт O належаў ёй (гл. рыс.); 3) усе пункты сферы праектуюцца промнямі з пачаткам у пункце C на плоскасць



(гл. на рыс. прыклад пункта M з промнем CM і праекцыяй M'). Калі лічыць, што пункту C на сферы адпавядае бясконца аддалены пункт, то ўсталяваная адпаведнасць ёсць узаемна адназначная. Акружынам на сферы адпавядаюць акружыны на плоскасці, вуглы паміж лініямі захоўваюцца. Пры дапамозе С.п. пашыраная камплексная плоскасць $\overline{N}$ адлюстроўваецца ўзаемна адназначна і канформава на Рымана сферу.

СТЭРЭАМЕ́ТРЫЯ (ад грэц. stereos — прасторавы + metreo — мераю) — частка *элементарнай геаметрыі*, дзе вывучаюцца прасторавыя фігуры (у адрозненне ад *планіметрыі*, дзе разглядаюцца фігуры, якія знаходзяцца ў плоскасці).

СТ'Ю́ДЭНТА КРЫТЭ́Р — крытэр значнасці для праверкі гіпотэзы пра сярэднія значэнні нармальных размеркаванняў. Аднавыбаркавы С.к.

выкарыстоўваецца для праверкі гіпотэзы H_0: $a = a_0$ супраць складанай альтэрнатывы H_1: $a \neq a_0$, дзе a — параметр размеркавання нармальнай генеральнай сукупнасці. Ён заснаваны на статыстыцы

$$t_{n-1}(x) = \sqrt{n}\,\frac{\bar{x} - a_0}{S},$$

дзе $\bar{x}$ і S^2 — *выбаркавае сярэдняе* і *дысперсія*. Пры справядлівасці гіпотэзы H_0 статыстыка t_{n-1} падпарадкоўваецца *Ст'юдэнта размеркаванню* з $n-1$ ступенямі свабоды. Гіпотэза H_0 прымаецца, калі

$$|t_{n-1}(x)| < t_{n-1}\left(1 - \frac{a}{2}\right),$$

дзе $t_{n-1}\left(1 - \frac{a}{2}\right)$ — квантыль узроўню $\left(1 - \frac{a}{2}\right)$ размеркавання Ст'юдэнта з $n-1$ ступенямі свабоды. Для праверкі гіпотэзы аднароднасці (на матэматычных спадзяваннях) дзвюх выбарак з аднолькавай, але невядомай дысперсіяй нармальнай генеральнай сукупнасці выкарыстоўваецца дзвюхвыбаркавы С.к. на аснове статыстыкі

$$t_{n+m-2} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\tilde{S}\sqrt{1/n + 1/m}},$$

дзе n, m — аб'ёмы выбарак, $\bar{x}$, $\bar{y}$ — выбаркавыя сярэднія,

$$\tilde{S}^2 = (n + m - 2)^{-1}[(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2],$$

S_1^2, S_2^2 — выбаркавыя дысперсіі. Статыстыка t_{n+m-2} падпарадкоўваецца размеркаванню Ст'юдэнта з $n + m - 2$ ступенямі свабоды.

СТ'ЮДЭНТА РАЗМЕРКАВА́ННЕ з *n* ступенямі свабоды — размеркаванне імавернасцяў выпадковай велічыні X, зададзенае шчыльнасцю імавернасці

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \quad (-\infty < x < +\infty),$$

дзе Γ — гама-функцыя. Моманты:

$$\alpha_{2k-1} = 0,\ \alpha_{2k} = \frac{n^k}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} + k\right)\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot (2k < n).$$

У прыватнасці,

$$DX = \begin{cases} \frac{n}{n-2}, & \text{калі } n > 2, \\ \infty, & \text{калі } n \leq 2. \end{cases}$$

Пры $n = 1$ С.р. супадае з *Кашы размеркаваннем*. Пры вялікіх значэннях n С.р. асімптатычна набліжаецца да стандартнага *нармальнага размеркавання*.

СУБГАРМАНІ́ЧНАЯ ФУ́НКЦЫЯ (ад лац. sub — пад + грэц. harmonikos — зладжаны, суразмерны) — функцыя $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ n зменных ($n \geq 2$), якая непарыўная разам з вытворнымі 1-га і 2-га парадку ў нейкім абсягу D і праўдзіць там няроўнасць

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \geq 0.$$

Паняцце С.ф. можна разглядаць як абагульненне паняцця *гарманічнай функцыі*, якая задавальняе ўмову $\Delta f = 0$.

Калі для функцыі f выконваецца няроўнасць $\Delta f \leq 0$, то f называюць супергарманічнай *функцыяй*. Калі f — супергарманічная функцыя, то $-f$ ёсць С.ф. і наадварот. Уласцівасці С.ф.: сума дзвюх С.ф. ёсць С.ф.; здабытак С.ф. і дадатнага ліку — С.ф.; ліміт раўнамерна збежнай паслядоўнасці С.ф. ёсць С.ф.; ліміт манатонна спадальнай паслядоўнасці С.ф. ёсць С.ф.

СУВЫМЕ́РНЫЯ І НЕСУВЫМЕ́РНЫЯ ВЕЛІЧЫ́НІ — аднародныя велічыні (напрыклад, даўжыні, плошчы), якія маюць або не маюць супольную меру. Прыклад несувымерных велічыняў: даўжыня дыяганалі і даўжыня стараны квадрата; плошча круга і плошча квадрата, набудаванага на радыусе. Калі велічыні сувымерныя, то іх тасунак выражаецца рацыянальным лікам, тасунак несувымерных — ірацыянальным лікам.

СУДАТЫ́ЧНАЯ АКРУ́ЖЫНА ў пункце M крывой L — акружына, якая мае з гэтай крывой у пункце M дотык парадку $n \geq 2$ (гл. *Судотык*). Калі крывіня крывой L у пункце M роўная нулю, то С.а. выраджаецца ў простую.

Радыус С.а. называецца радыусам крывіні крывой L у пункце M, а цэнтр С.а. — цэнтрам крывіні. Радыус С.а. плоскай крывой $y = f(x)$ знаходзіцца на формуле

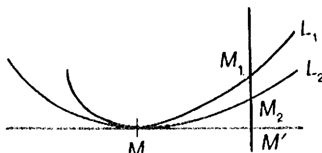
$$\rho = \left|\frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}\right|.$$

СУДАТЫ́ЧНАЯ ПЛО́СКАСЦЬ крывой L у пункце M — плоскасць, якая мае з гэтай

крывой у пункце M дотык парадку $n \geq 2$ (гл. *Судотык*). С.п. можна азначыць таксама як ліміт зменнай плоскасці, пабудаванай праз тры пункты крывой L, калі гэтыя пункты імкнуцца да M. Калі крывая z зададзеная раўнаннямі $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, то раўнанне С.п. мае выгляд

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0.$$

СУДО́ТЫК — азначаецца для крывой L_2 і крывой L_1 у зададзеным пункце M як геаметрычнае паняцце, якое азначае, што L_2 мае з L_1 у пункце M дотык максімальнага парадку ў параўнанні з кожнай іншай крывой з папярэдне зададзенай сям'і крывых (рыс.).



СУ́МА (ад лац. summa — вынік, агульная колькасць) — вынік аперацыі *складання* розных аб'ектаў (лікаў, функцый, выпадковых падзей, аператараў, вектараў, мностваў). У кожным выпадку С. надаецца свой сэнс. Напрыклад, у тэорыі мностваў С. ёсць тое самае, што і аб'яднанне мностваў. Пазначаецца сімвалам $\sum$.

СУ́МА МНО́СТВАЎ — тое, што *аб'яднанне* мностваў.

СУМАВА́ЛЬНАЯ ФУ́НКЦЫЯ — інтэгравальная паводле Лебэга рэчаісная функцыя, інтэграл ад якой — канцы лік.

СУМАВА́ННЕ шэрагаў (інтэгралаў) — вылічэнне сумаў шэрагаў (значэнняў інтэгралаў). Зводзіцца да знаходжання канцага ліміту пэўнай паслядоўнасці. Калі адпаведны ліміт існуе, то шэраг (інтэграл) называецца сумавальным. Значэнне гэтага ліміту прымаецца за суму шэрагу (за значэнне інтэграла).

У многіх выпадках для разбежнага шэрагу можна знайсці суму, якая ў абагульненым сэнсе мае асноўныя ўласцівасці звычайнай сумы збежнага шэрагу, г.зн. падсумаваць шэраг у тым або іншым сэнсе. Найбольш пашыраныя метады С. шэрагаў: шэраг $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ сумавальны метадам Чэзара да ліку S, калі

$$\lim_{n\to\infty} G_n = S,$$

дзе

$$G_n = \frac{S_0 + S_1 + \ldots + S_{n-1}}{n}, \quad S_k = a_0 + a_1 + \ldots + a_k;$$

таксама сумавальны метадам Абэля—Пуасон[а да] ліку T, калі

$$\lim_{t\to 1-0} \sum_{k=0}^{\infty} t^k a_k = T.$$

Шэраг $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^{k-1} + \ldots$ разбягаец[ца ў] звычайным сэнсе, аднак сумавальны метадам [Чэ]зара і метадам Абэля—Пуасона да 1/2. Шэ[раг] $1 - 2 + 3 - 4 + \ldots + (-1)_n^{n-1} + \ldots$ не сумавальны ў [звы]чайным сэнсе і метадам Чэзара, аднак сумавал[ьны] метадам Абэля—Пуасона да 1/4. Калі шэраг [збя]гаецца да ліку S, тады ён сумавальны да S мета[дам] Чэзара і метадам Абэля—Пуасона. Тэорыя С. [раз]бежных паслядоўнасцяў і інтэгралаў аналагі[чна] тэорыі С. разбежных шэрагаў.

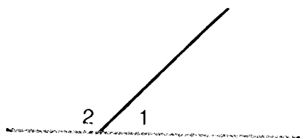
СУМАВА́ННЯ МЕ́ТАДЫ — будаванне [...]ным спосабам *абагульненых сумаў шэрагаў* (і [...]таў *паслядоўнасцяў*, значэнняў *неўласцівых і[нтэ]гралаў*). Неабходнасць абагульнення ўзнік[ае ў] выпадках, калі ў звычайным сэнсе назіраецца [раз]бежнасць; С.м. задаюцца ў выглядзе пэўных [пра]вілаў або аперацый (гл., напрыклад, *Чэзара ме[та]ды сумавання*).

Найбольш пашыраныя С.м. паводле іх а[зна]чэння падпарадкоўваюцца пэўным патраба[ван]ням: выкарыстаныя да збежнага шэрагу, [яны] даюць тую ж суму шэрагу (рэгулярна[сць] метаду); абагульненая сума ад лінейнай ка[мбі]нацыі шэрагаў роўная лінейнай камбінацыі іх [аба]гульненых сумаў (лінейнасць мета[ду]). Адзін і той жа шэраг (паслядоўнасць) можа б[ыць] сумавальным адным метадам і не сумаваль[ным] іншым. Множства ўсіх шэрагаў (паслядоўнасц[яў]) сумавальных пэўным метадам, называецца [по]лем сумавальнасці гэтага метаду. У [вы]падку супадзення палёў сумавальнасці каж[уць] пра раўназначнасць С.м. Два або больш С.м. [на]зываюцца сумяшчальнымі, калі сумавальн[ы] шэраг (паслядоўнасць) мае адну і тую ж сум[у]. [У] дачыненні да С.м. адрозніваюць два тыпы тэа[рэм]: 1) у тэарэмах абэлева тыпу з уласціва[сцяў] паслядоўнасцяў робяць выснову пра ўласці[васці] паслядоўнасцяў, атрыманых у выніку С.м. [На]прыклад, тэарэма Кашы сцвярджае, [што з] $S_n \to S$ вынікае $(S_0 + S_1 + \ldots + S_n)/(n+1) \to S$; [2) у] тэарэмах таўберава тыпу з уласціва[сцяў ...]

атрыманых у выніку скарыстання С.м., прыходзяць да высновы наконт уласцівасцяў зыходнай паслядоўнасці.

Паняцце абагульненага ліміту разглядаецца таксама для функцый і інтэгралаў (с у м а в а л ь н а с ц ь функцый і інтэгралаў адпаведна). Азначэнне С.м. лікавых і функцыйных паслядоўнасцяў абагульняецца на паслядоўнасці з элементаў некаторых іншых лінейных тапалагічных прастораў.

СУМЕ́ЖНЫЯ ВУГЛЫ́ — вуглы, у якіх адна старана агульная, а іншыя стораны знаходзяцца на адной простай. На рыс. вуглы 1 і 2 — сумежныя.



СУПЕРПАЗІ́ЦЫЯ ФУ́НКЦЫЙ — азначаецца для функцый $y = f(x)$ і $x = \varphi(t)$ як новая складаная функцыя $y = f(\varphi(t))$.

СУПО́ЛЬНАЯ СІСТЭ́МА — сістэма раўнанняў, якая мае хоць бы адзін развязак. Для канкрэтных тыпаў раўнанняў існуюць канструктыўныя ўмовы супольнасці (гл., напрыклад, *Кронэкера — Капэлі тэарэма*).

СУПО́ЛЬНЫЯ РАЗМЕРКАВА́ННІ — агульны тэрмін, які ўжываецца пры размеркаванні некалькіх выпадковых велічынь, зададзеных на адной і той жа імавернаснай прасторы. Гл. *Размеркаванне імавернасцяў*.

СУПРЭ́МУМ (ад лац. supremus — найвышэйшы) — дакладная верхняя мяжа нейкага мноства E рэчаісных лікаў, найменшы з лікаў, якія не меншы за адвольны лік з E. Абазначаецца $\sup E$.

СУПЯРЭ́ЧНАСЦІ ЗАКО́Н — закон логікі, які сцвярджае, што ніякае выказванне не можа быць праўдзівым разам са сваім адмаўленнем: $\neg(A \wedge \neg A)$.

СФЕ́РА (ад грэч. sphaira — шар, мяч) — замкнёная паверхня, усе пункты якой аднолькава аддаленыя ад аднаго пункта (цэнтра С.). Адрэзак, які злучае цэнтр С. з якім-небудзь яе пунктам (а таксама яго даўжыня), называецца р а д ы у́ с а м С. Плошча паверхні С. вызначаецца па формуле $S = 4\pi R^2$, дзе R — радыус С.

Частка прасторы, абмежаваная С., называецца ш а р а м. Перасячэнне С. плоскасцю, што праходзіць праз яе цэнтр, дае акружыну. З гледзішча аналітычнай геаметрыі С. — цэнтральная паверхня 2-га парадку, раўнанне якой у дэкартавай прамавугольнай сістэме каардынат мае выгляд

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2,$$

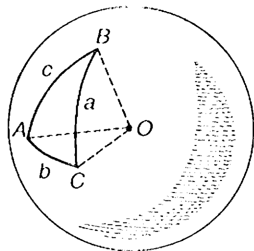
дзе a, b, c — каардынаты цэнтра С. Абагульненнем паняцця С. з'яўляецца гіперсфера, псеўдасфера, афінная С. і інш. Наконт геаметрыі і трыганаметрыі на С. гл. у арт. *Сферычная геаметрыя, Сферычная трыганаметрыя.*

СФЕРЫ́ЧНАЕ АДЛЮСТРАВА́ННЕ п а в е р х н і — непарыўнае адлюстраванне паверхні S на сферу P адзінкавага радыуса, якое вызначаецца на паралельнасці датычных плоскасцяў (або на паралельнасці нармаляў) у адпаведных пунктах паверхняў і сферы. С.а. паверхні адыгрывае важную ролю пры вывучэнні ўласцівасцяў саміх паверхняў.

СФЕРЫ́ЧНАЯ ГЕАМЕ́ТРЫЯ — раздзел матэматыкі, у якім вывучаюцца геаметрычныя аб'екты на сферы аналагічна таму, як у *планіметрыі* вывучаюцца геаметрычныя аб'екты на плоскасці.

СФЕРЫ́ЧНАЯ ТРЫГАНАМЕ́ТРЫЯ — матэматычная дысцыпліна, якая вывучае залежнасць паміж вугламі і старанамі *сферычных трохвугольнікаў* (гл. таксама *Сферычная геаметрыя*). С.т. знаходзіць дастасаванне ў астраноміі.

СФЕРЫ́ЧНЫ ТРОХВУГО́ЛЬНІК — фігура, утвораная дугамі трох вялікіх кругоў, якія злучаюць парамі тры якія-небудзь пункты на сферы



(гл. рыс.). Няхай A, B, C — вуглы, a, b, c — супрацьлеглыя ім стораны С.т., якія вымяраюцца адпаведнымі цэнтральнымі вугламі. Тады справядлівыя наступныя формулы С.т.:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

— т э а р э м а с і н у с а ў;

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c - \sin b \cdot \sin C \cdot \cos A$$

— т э а р э м а к о с і н у с а ў д л я с т а р о н;

$$\cos A = -\cos B \cdot \cos C + \sin B \cdot \sin C \cdot \cos a$$

— т э а р э м а к о с і н у с а ў д л я в у г л о ў;

$$\sin a \cdot \cos B = \cos b \cdot \sin c - \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A,$$

$$\sin A \cdot \cos B = \cos B \cdot \sin C + \sin B \cdot \cos c \cdot \cos a$$

— формулы, якія звязваюць 5 элементаў. Матэматычная дысцыпліна, якая вывучае залежнасці паміж вугламі і старанамі С.т., называецца *сферычнай трыганаметрыяй.*

СФЕРЫ́ЧНЫЯ КААРДЫНА́ТЫ — лікі ρ, θ і φ, звязаныя з прамавугольнымі каардынатамі формуламі:

$$x = \rho\cos\varphi\sin\theta,\ \ y = \rho\sin\varphi\sin\theta,\ \ z = \rho\cos\theta,$$

дзе

$$0 \le \rho \le \infty,\ \ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ \ 0 \le \theta \le \pi.$$

Сістэма С.к. артаганальная; элемент плошчы ў С.к.

$$ds = \sqrt{\rho^2\sin^2\theta(d\rho d\varphi)^2 + \rho^2(d\rho d\theta)^2 + \rho^4\sin^2\theta(d\varphi d\theta)^2}$$

і элемент аб'ёму

$$dV = \rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta.$$

С.к. выкарыстоўваюць у астраноміі.

СФЕРЫ́ЧНЫЯ ФУ́НКЦЫІ, ш а р а в ы я ф у н к ц ы і — *спецыяльныя функцыі*, якімі карыстаюцца пры даследаванні фізічных з'яваў у абсягах, абмежаваных сферычнымі паверхнямі, для развязання фізічных задач, якія маюць сферычную сіметрыю. С.ф. з'яўляюцца развязкамі дыферэнцыяльнага раўнання

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \mathrm{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2}\frac{\partial^2}{\theta\partial\varphi^2} + l(l+1)\right]Y(\theta,\varphi) = 0,$$

якое ўзнікае пры надзеле зменных у пэўных класах дыферэнцыяльных раўнанняў з частковымі вытворнымі. Агульны выгляд развязку:

$$Y_e(\theta,\varphi) = \sum_{m=-l}^{l} a_m P_l^m(\cos\theta)e^{im\gamma},$$

дзе a_m — канстанты, $P_l^m(\cos\theta)$ — д а л у ч а н ы я ф у н к ц ы і Л е ж а н д р а ступені l і парадку m, вызначаныя роўнасцю

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m P_n(x)}{dx^m},$$

дзе P_n — *Лежандра мнагасклады.* С.ф. увялі А.Лежандр і П.Лапляс у канцы 18 ст.

СЦЁК в е к т а р н а г а п о л я — пункт, у якім *дывергенцыя* поля адмоўная.

СЦІСКА́ЛЬНЫХ АДЛЮСТРАВА́ННЯЎ ПРЫ́НЦЫП — тэарэма, у якой сцвярджаецца існаванне і адзінасць нерухомага пункта мноства пры спецыяльным ("сціскальным") адлюстраванні яго ў сябе. Няхай A — адлюстраванне метрычнай прасторы M у сябе. Дзеянне адлюстравання A на пункт x можна падаць як зрух яго ў пункт $y = Ax$. Пункт x называецца нерухомым пунктам адлюстравання A, калі выконваецца роўнасць $Ax = x$. Такім чынам, пытанне пра развязальнасць гэтага раўнання з'яўляецца пытаннем пра знаходжанне нерухомых пунктаў адлюстравання A.

Адлюстраванне A метрычнай прасторы M у сябе называецца с ц і с к а л ь н ы м, калі існуе такі дадатны лік $\alpha < 1$, што для ўсякіх пунктаў x і y з M выконваецца няроўнасць

$$\rho(Ax, Ay) \le \alpha\rho(x, y),$$

дзе $\rho(u, v)$ — адлегласць паміж пунктамі u і v метрычнай прасторы M. С.а.п. сцвярджае, што кожнае сціскальнае адлюстраванне поўнай метрычнай прасторы ў сябе мае адзін і толькі адзін нерухомы пункт. Акрамя таго, для кожнага пачатковага пункта x_0 з M паслядоўнасць, вызначаная рэкурэнтнымі роўнасцямі $x_n = Ax_{n-1}$, $n \in \mathbf{N}$, мае сваім лімітам нерухомы пункт x адлюстравання A. Пры гэтым праўдзіцца наступная ацэнка хібнасці:

$$\rho(x_n, x) \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_0, Ax_0).$$

С.а.п. дае магчымасць адзіным метадам даказаць тэарэмы пра існаванне і адзінасць развязкаў дыферэнцыяльных, інтэгральных і іншых раўнанняў. Ва ўмовах дастасаванасці С.а.п. развязак можа быць з наперад зададзенай дакладнасцю вызначаны *паслядоўных набліжанняў метадам.* Пры дапамозе пэўнага выбару пэўнай метрычнай прасторы M і будаваннем адлюстравання A такія задачы напярэдне зводзяць да раўнання $Ax = x$. Потым вызначаюць умовы, пры якіх адлюстраванне A будзе сціскальным.

СЦІСКА́ННЕ — афіннае пераўтварэнне прасторы $\mathbf{R}^3$, якое ў прамавугольнай сістэме каарды-

нат задаецца формулай $x' = x,\ y' = y,\ z' = \lambda z$ (г.зн. С. прасторы паралельнае восі z). Калі $0 < \lambda < 1$, то адбываецца С. прасторы да плоскасці xOy у кірунку Oz. Пры $\lambda > 1$ С. называецца р а с ц я ж э н н е м, а пры $\lambda < 0$ С. (ці расцяжэнне) адбываецца адначасова з сіметрыяй у дачыненні да плоскасці xOy. С. плоскасці xOy у кірунку восі Oy аналагічна азначаецца формуламі $x' = x,\ y' = \lambda y$.

СЦЯКЛÓВА ФÝНКЦЫЯ — функцыя

$$fn(t) = \frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2} f(t+V)\,dV,$$

якая вызначаецца для ўсякай інтэгравальнай функцыі $f(t)$. С.ф. мае амаль скрозь вытворную

$$f_h'(t) = \frac{1}{h}\left[f\left(t+\frac{h}{2}\right) - f\left(t-\frac{h}{2}\right)\right].$$

Гэтую функцыю ўпершыню ўвёў У.Сцяклоў (1907).

СÉКАНС (ад лац. secans — які рассякае) — адна з трыганаметрычных функцый. Абазначаецца sec, вызначаецца як $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, дзе x — аргумент. С. в о с т р а г а в у г л а ў прамавугольным трохвугольніку называюць тасунак гіпатэнузы да катэта, прылеглага да гэтага вугла. Гл. *Трыганаметрычныя функцыі.*

СЮР'ЕКТЫЎНАЕ АДЛЮСТРАВÁННЕ, с ю р'е к ц ы я — адлюстраванне f мноства A у мноства B такое, што вобраз A роўны B, г.зн. $f(A) = B$. Замест "f сюр'ектыўнае" кажуць таксама "f ёсць адлюстраванне мноства A на мноства B".

СЮР'ÉКЦЫЯ — тое, што *сюр'ектыўнае адлюстраванне.*

СЯДЛÓ — тып размяшчэння траекторый аўтаномнай сістэмы двух дыферэнцыяльных раўнанняў першага парадку

$$\dot{x} = f(x),\ x \in \mathbf{R}^2;\ f{:}G \to \mathbf{R}^2,\ G \in \mathbf{R}^2, \qquad (1)$$

дзе G — абсяг адзінасці ў наваколлі асаблівага пункта (с т а н о в і ш ч а р а ў н а в а г і), x_0 — пункт, у якім $f(x_0) = 0$. Гэта значыць, існуе наваколле U пункта x_0 такое, што дзве траекторыі, якія пачынаюцца ў $U \setminus x_0$, імкнуцца да x_0 пры $t \to +\infty$ (у с т о й л і в ы я с е п а р а т р ы с ы) і дзве — пры $t \to -\infty$ (н я ў с т о й л і в ы я с е п а р а т р ы с ы). Усе астатнія траекторыі, якія пачынаюцца ў $U \setminus x_0$, пакідаюць $U \setminus x_0$ як пры нарастанні, так і пры спаданні t. Для сістэмы класа C^1 з незвыроднай матрыцай $f'(x_0) = A$ асаблівы пункт x_0 ёсць С., калі і толькі калі ўласныя лікі матрыцы A маюць розныя знакі. Для лінейнай сістэмы $f(x) = A(x - x_0)$ сепаратрысы — абагульненыя гіпербалы.

СЯРЭ́ДНІХ АРЫФМЕТЫ́ЧНЫХ МÉТАД СУМАВÁННЯ — адзін з метадаў сумавання паслядоўнасцяў і шэрагаў. Шэраг

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k \qquad (1)$$

ёсць с у м а в а л ь н ы м е т а д с я р э д н і х а р ы ф м е т ы ч н ы х да сумы S, калі

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_0 + S_1 + \ldots + S_n}{n+1} = S, \qquad (2)$$

дзе $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ — частковая сума шэрагу (1). Калі для адвольнай паслядоўнасці (S_n) выконваецца (2), то кажуць, што паслядоўнасць ёсць сумавальная С.а.м.с. да ліміту S.

СЯРЭ́ДНЯЕ ЗНАЧЭ́ННЕ — 1) С.з. л і к а ў — лікавая характарыстыка мноства лікаў. С.з. для дадзенай групы лікаў $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называецца нейкі лік, які ўмежаны паміж найменшым і найбольшым з іх. Найбольш ужывальныя С.з. дадатных лікаў: арыфметычнае С.з.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n};$$

геаметрычнае С.з.

$$g = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n};$$

гарманічнае С.з.

$$h = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}.$$

2) С.з. ф у н к ц ы і называецца нейкае яе значэнне, якое знаходзіцца паміж найменшым і найбольшым яе значэннямі. У дыферэнцыяльным і інтэгральным злічэнні існуе шэраг "тэарэм пра сярэдняе", што даказваюць існаванне такіх пунктаў, у якіх функцыя (або яе вытворная) атрымлівае тое або іншае С. з. Найбольш важная тэарэма пра С.з. у дыферэнцыяльным злічэнні — тэарэма Лягранжа (пра канцы прырост).

3) С.з. в ы п а д к о в а й в е л і ч ы н і — тое, што *матэматычнае спадзяванне* выпадковай велічыні.

я пачынаюцца ў $U \setminus x_0$,
астанні, так і пры спа-
C^1 з незвыроднай мат-
ункт x_0 ёсць С., калі і
эыцы A маюць розныя
$f(x) = A(x - x_0)$ сепа-
пербалы.

ТЫЧНЫХ МЕ́ТАД
етадаў сумавання па-
раг

(1)

етад сярэдніх
мы S, калі

$= S,$ (2)

сума шэрагу (1). Калі

ці (S_n) выконваецца
насць ёсць сумаваль-

Е — 1) С.з. лікаў —
оства лікаў. С.з. для
., x_n называецца нейкі
йменшым і найболь-
льныя С.з. дадатных

$\ldots + x_n$;

x_n;

$\ldots + \frac{1}{x_n}$.

ваецца нейкае яе зна-
іж найменшым і най-
дыферэнцыяльным і
шэраг "тэарэм пра ся-
ванне такіх пунктаў,
рная) атрымлівае тое
кная тэарэма пра С.з.
і — тэарэма Лягран-

велічыні — тое,
яванне выпадковай

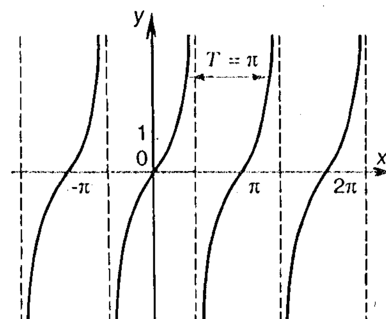
СЯРЭ́ДНЯЯ ЛІ́НІЯ — 1) С.л. трохвугольніка — адрэзак, які злучае сярэдзіны дзвюх старон трохвугольніка (трэцюю старану называюць асновай). С.л. трохвугольніка паралельная аснове і роўная яе палавіне. Тасунак плошчаў частак трохвугольніка, на якія падзяляе яго С.л., роўны 1:3; 2) С.л. трапецыі — адрэзак, які злучае сярэдзіны бакавых старон трапецыі. С.л. трапецыі паралельная яе асновам і роўная палавіне іх сумаў.

Т

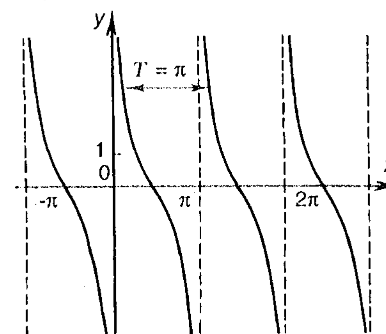
ТАЛЕ́СА ТЭАРЭ́МА — тое, што *Фалеса тэарэма.*

ТА́НГЕНС (ад лац. tangens — які датыкаецца) — 1) адна з *трыганаметрычных функцый*: $y = \operatorname{tg} x \frac{\sin x}{\cos x}$, дзе x — аргумент. Абсяг вызначэння — уся лікавая простая, акрамя пунктаў, абцысы якіх $\pi/2 + \pi n$, $n = \pm 1, \pm 2 + \ldots$ Т. — функцыя неабмежаваная, няцотная, перыядычная з асноўным перыядам π. З *катангенсам* Т. звязаны роўнасцю $\operatorname{tg} x = 1/\operatorname{ctg} x$. Вытворная Т. $\operatorname{tg}' x = \frac{1}{\cos^2 x}$; інтэграл ад Т. $\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x| + c$. Т. камплекснага аргумента z ёсць мераморфная функцыя, нулі якой знаходзяцца ў пунктах $z = k\pi$, дзе $k \in \mathbf{Z}$. Графік функцыі $y = \operatorname{tg} x$ гл. у арт. *Тангенсоіда*; 2) Т. вострага вугла ў прамавугольным трохвугольніку — тасунак катэта, які знаходзіцца супраць гэтага вугла, да катэта, што прылягае да гэтага вугла.

ТАНГЕНСО́ІДА (ад лац. tangens — датыкальны + грэц. eidos — выгляд) — графік функцыі $y = \operatorname{tg} x$ (рыс. 1); перыядычная крывая з асноўным перыядам π і асімптотамі $x = (k + 1/2)\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2 + \ldots$. Пры змяненні x ад $-\frac{\pi}{2}$ да $+\frac{\pi}{2}$ Т. манатонна нарастае ад $-\infty$ да $+\infty$. Абцысы пунктаў перасячэння з воссю Ox: $x = k\pi$, яны ж — пункты перагіну з вуглом $\pi/4$ нахілу датычнай да восі Ox. Т., люстрана адбітая ў дачыненні да восі Ox і зрушаная ўлева на адрэзак $\pi/2$ (рыс. 2), з'яўляецца графікам функцыі



Рыс. 1



Рыс. 2

$$\varphi = \operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right),$$

яе асімптоты $x = k\pi$.

ТАНГЕНЦЫ́ЙНЫЯ КААРДЫНА́ТЫ — назоў каэфіцыентаў раўнання простай, якія разглядаюцца як каардынаты. Раўнанне сувязі Т.к. датычнай да крывой называецца тангенцыйным раўнаннем гэтай крывой.

ТАПАЛАГІ́ЧНАЯ А́ЛГЕБРА — раздзел *алгебры*, у якім вывучаюцца розныя тапалагічныя алгебраічныя сістэмы (групы, паўгрупы, кольцы, алгебры, вектарныя прасторы і г.д.) з *тапалогіяй*, прычым алгебраічныя аперацыі гэтых сістэм непарыўныя. Асноўныя пытанні Т.а. — існаванне тапалогій у алгебраічных сістэмах, якія ператвараюць іх у тапалагічныя сістэмы; магчымасць працягу тапалогій на пашырэнне алгебраічных сістэм; уласцівасці тапалогій алгебраічных сістэм (у прыватнасці, магчымасць задання тапалогіі метрыкай або нормай).

ТАПАЛАГІ́ЧНАЯ ВЕ́КТАРНАЯ ПРАСТО́РА — вектарная прастора E над полем K (звычайна **R** або **C**) з тапалогіяй, узгодненай са структураю вектарнай прасторы. Прыклады Т.в.п.: *эўклідава прастора, банахава прастора, лакальна выпуклая прастора.* Матэматычны аналіз на Т.в.п. (гэтак званы б я с к о н ц а м е р н ы а н а л і з) з'яўляецца працягам класічнага аналізу і ў той жа час якасна адрозніваецца як вынікамі, так і метадамі. На мове бясконцамернага аналізу натуральна фармулююцца асноўныя задачы квантавай тэорыі поля, статыстычнай гідрамеханікі, механікі і г.д.

ТАПАЛАГІ́ЧНАЯ ГРУ́ПА, н е п а р ы ў н а я г р у п а — група G, якая з'яўляецца і тапалагічнай прасторай, такая, што групавая і тапалагічная структуры на G узгодненыя. Тэорыя Т.г. — распрацаваная галіна сучаснай матэматыкі, якая мае шматлікія дастасаванні. Заданнем на G дадаўняльных структур, узгодненых з групавой структурай, выдзяляюцца важныя падкласы Т.г. — групы Лі (G — дыферэнцавальная мнагастайнасць), *алгебраічныя групы* (G — алгебраічная мнагастайнасць) і г.д.

ТАПАЛАГІ́ЧНАЯ ПРАСТО́РА — сукупнасць двух аб'ектаў: мноства X і зададзенай на гэтым мностве тапалагічнай структуры, або *тапалогіі.* З паняццем Т.п. звязанае паняцце непарыўнага адлюстравання адной прасторы ў другую. Непарыўнае адлюстраванне $f: X \to Y$ называецца *гомеамарфізмам*, калі f — біектыўная, f^{-1} — непарыўная. Дзве прасторы X і Y называюцца т а п а л а г і ч н а э к в і в а л е н т н ы м і, калі існуе гомеамарфізм X і Y. Прыватныя выпадкі Т.п.: *метрычная прастора, вектарная прастора* і *ўпарадкаваная прастора.*

ТАПАЛО́ГІЯ — раздзел матэматыкі, у якім высвятляецца і даследуецца ідэя непарыўнасці. Паколькі гэтай ідэяй працятыя амаль усе раздзелы матэматыкі, то Т. разам з алгебрай складаюць аснову матэматыкі і садзейнічаюць яе еднасці. Т. вывучае ўласцівасці фігур і іх узаемнага размяшчэння, што захоўваюцца пры *гомеамарфізмах,* г.зн. узаемна адназначных і непарыўных у абодва бакі адлюстраваннях. Для азначэння гомеамарфізму не патрэбны такія грунтоўныя матэматычныя паняцці, як адлегласць, лінейнасць, гладкасць і інш., што робіць паняцце Т. мовай матэматыкі. Пры агульным падыходзе цэнтральным аб'ектам даследавання ў Т. з'яўляецца тройка (X, f, Y), дзе f — непарыўнае адлюстраванне тапалагічнай прасторы X у тапалагічную прастору Y. Да ліку найбольш ужывальных аб'ектаў Т. належаць *мнагастайнасці* (гладкія, кавалкава-лінейныя, тапалагічныя і інш.), лакальная пабудова якіх блізкая да эўклідавай прасторы функцый, *банахавы прасторы.* Т. мае шмат дастасаванняў амаль усюды, дзе прысутнічае ідэя непарыўнасці.

ТАСУ́НАК — выраз $\frac{a}{b}$ (або $a : b$), дзе a і b — пэўныя велічыні. Роўнасць двух Т. называюць п р а п о р ц ы я й, напрыклад, $a : b = c : d$. Запіс $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$ можна прачытаць таксама "a тасуецца з b як 3 і 2". Паняцце Т. шырока ўжываецца ў элементарнай матэматыцы, алгебры і інш.

ТА́ЎБЕРАВЫ ТЭАРЭ́МЫ — тэарэмы, у якіх атрымліваюцца такія ўмовы, што пры іх выкананні мае месца сумавальнасць шэрагу пэўнымі метадамі.

Адна з першых тэарэм гэтага тыпу — т э а р э м а Т а ў б е р а (1897): калі для лікавага шэрагу $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ існуе канцы ліміт $\lim_{r \to 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n = S$ і $\lim_{n \to \infty} n a_n = 0$, то гэты шэраг збягаецца да сумы S.

ТАЎТАЛО́ГІЯ (ад грэц. tauto — тое самае + logos — слова, вучэнне) — формула, якая пры падстанове ў яе якіх-небудзь выказванняў замест зменных заўсёды дае праўдзівае выказванне. Задача пра таўталагічнасць пэўнай формулы развязваецца ў агульным выпадку простым пераборам усіх магчымых значэнняў яе прапазіцыйных зменных. Прыклады Т.: $A \supset A$, $A \vee \neg A$, $(A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A)$. Гл. таксама *Выказванняў злічэнне, Прэдыкатаў злічэнне, Мнагазначная логіка.*

ТВІ́СТАР — элемент *вектарнай прасторы* памернасці $n = 4$ над полем камплексных лікаў $V(4; \mathbf{C})$, дзе скалярны квадрат вектара

$$\mathbf{Z} = (z_1, z_2, z_3, z_4) \in V(4; \mathbf{C})$$

зададзены формулай

$$\mathbf{Z} = |z_1|^2 + |z_2|^2 - |z_3|^2 - |z_4|^2.$$

Т., для якога $\mathbf{Z}^2 > 0$, — д а д а т н ы; калі $\mathbf{Z}^2 = 0$ — і з а т р о п н ы; калі $\mathbf{Z}^2 < 0$ — а д м о ў н ы. Т. ужываюцца ў фізічных тэорыях каліброўчных палёў.

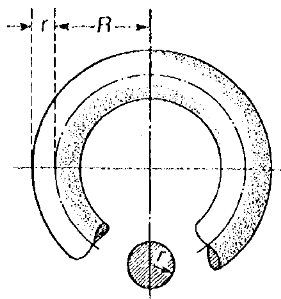
ТО́ЕСНАЕ ПЕРАЎТВАРЭ́ННЕ — 1) замена аднаго аналітычнага выразу іншым, які яму роўны на пэўным мностве (тым жа, што і зыход-

ны), але адрозны паводле формы. Мэтай Т.п. можа быць наданне выразу выгляду, больш прыдатнага для лікавых разлікаў або далейшых пераўтварэнняў, для лагарыфмавання, дыферэнцавання, інтэгравання, развязання раўнанняў і г.д. Да Т.п. далучаюць, напрыклад, раскрыванне дужак, раскладанне на множнікі, прывядзенне алгебраічных дробаў да супольнага назоўніка, раскладанне іх на элементарныя дробы; 2) пераўтварэнне (адлюстраванне ў сябе) нейкага мноства, якое пакідае на месцы кожны яго элемент.

ТО́ЕСНАСЦЬ — роўнасць двух аналітычных выразаў, якая праўдзіцца для ўсіх значэнняў літар з пэўнага мноства, што ўваходзіць у гэтыя выразы. Для абазначэння Т. ужываецца знак $\equiv$, які ўвёў Б.Рыман (1857).

Прыклады Т.: роўнасць $(a+b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$, што выконваецца пры ўсіх значэннях a і b; роўнасць $\frac{a^2-1}{a-1} = a+1$, якая праўдзіцца пры ўсіх значэннях a, акрамя $a = 1$; роўнасць $\log xy = \log x + \log y$, якая выконваецца пры ўсіх дадатных значэннях x і y.

ТОР (ад лац. torus — валік, пукатасць, вузел) — цела, якое ўтвараецца аваротам круга вакол простай, што знаходзіцца ў плоскасці гэтага круга, але не перасякае яго. Прыблізна форму Т. мае, напрыклад, абаранак або выратавальны круг. Т. называюць таксама некаторыя спецыяльныя групы.



Калі радыус круга, які аварочваецца, роўны r, а адлегласць ад цэнтра круга да восі авароту роўная R (гл. рыс.), то плошча паверхні Т. $S = 4\pi^2 Rr$, а яго аб'ём $V = 2\pi^2 Rr^2 \approx 19{,}74 Rr^2$. Паверхню, якая абмяжоўвае Т., часам таксама называюць *т о р а м*.

ТРАЕКТО́РЫЯ (ад лац. trajectus — перамяшчэнне) — непарыўная лінія, якую апісвае пункт пры руху. Т. *н а м н а г а с т а й н а с ц я х* вывучаецца ў *эргадычнай тэорыі*. Т. *в ы п а д к о в а г а п р а ц э с у* — тое, што і *выбаркавая функцыя*.

ТРАНЗІТЫ́ЎНАСЦЬ (ад. лац. transitus — пераход) — адна з важнейшых уласцівасцяў *бінарнага дачынення* R, вызначанага на мностве M. Дачыненне R называецца *т р а н з і т ы ў н ы м*, калі для ўсякіх $a, b, c \in M$ з aRb і bRc вынікае aRc. Дачыненні роўнасці і парадку ёсць транзітыўныя дачыненні.

ТРАНЗІТЫ́ЎНАЯ ГРУ́ПА — група падстановў (G, M) такая, што для ўсякіх x, y з мноства M існуе элемент g групы G такі, што $g(x) = y$. *А р б і т а* групы падстановў (B, M) ёсць падмноства M, на якім B дзейнічае транзітыўна. Т.г. мае толькі адну арбіту. Група, якая мае больш арбітаў, называецца *і н т р а н з і т ы ў н а й*.

Няхай H — падгрупа адвольнай групы G, а $M := \{Hx | x \in G\}$ — мноства ўсіх сумежных класаў G па H. Вызначым дзеянне G на M: $g(Hx) = Hxg$. Тады (G, M) ёсць Т.г., і наадварот, кожную Т.г. можна разглядаць як групу, якая дзейнічае на мностве ўсіх сумежных класаў па нейкай яе падгрупе. Група падстановў (G, M) называецца *k-т р а н з і т ы ў н а й*, калі для ўсякіх упарадкаваных падмностваў $(x_1, ..., x_k)$ і $(y_1, ..., y_k)$ мноства M існуе такі элемент $g \in G$, што $g(x_i) = y_i$, $i = \overline{1, k}$. Пры $n \geq 2k$ Т.г. называецца *к р а т н а т р а н з і т ы ў н а й*. Групы цэлых лінейных пераўтварэнняў $x \mapsto ax + b$, $x, a, b \in K$ адвольнага поля K ёсць *д в о й ч ы т р а н з і т ы ў н ы я* групы. Сіметрычная група S_n — n разоў транзітыўная, а знаказменная група d_n — $(n-2)$ разоў транзітыўная.

ТРАНСЛЯ́ТАР — службовая праграма, прызначаная для перакладу (*трансляцыі*) з адной фармальнай мовы на іншую. Найбольш распаўсюджаны Т. праграм з *праграмавання моваў* на лікавыя мовы вылічальных машын. Яны складаюць галоўную частку кожнай сістэмы праграмавання і падзяляюцца на *і н т э р п р э т а т а р ы* і *к а м п і л я т а р ы*. Першыя сумяшчаюць трансляцыю з выкананнем праграмы. Кампілятары ствараюць выхадную праграму, якую можна захаваць і выканаць пазней.

ТРАНСЛЯ́ЦЫЯ (ад лац. translatio — перадача) — 1) Т. у *п р а г р а м а в а н н і* — працэс, які пераўтварае праграму на ўваходнай мове ў нейкую праграму на аб'ектнай мове такім чынам, што абедзве праграмы выконваюць адну і тую ж функцыю. У практыцы праграмавання ўваходнай мовай звычайна з'яўляецца *праграмавання мова*, а аб'ектнай мовай — мова машынных праграм,

якія непасрэдна выконваюцца. Сама Т., як правіла, ажыццяўляецца аўтаматычна з дапамогай спецыяльнай праграмы, якая называецца *транслятарам*; 2) Т. у тэорыі вылічальных функцый і тэорыі алгарытмаў — кожнае эфектыўнае адлюстраванне адной нумарацыі вылічальных функцый у іншую, якое захоўвае ўласцівасць вобраза і правобраза быць нумарам адной і той жа функцыі.

ТРАНСПАЗІЦЫЯ (ад позналац. transpositio — перастанова) — надстанова мноства X, якая мяняе месцамі два элементы i, j мноства X $(i \neq j)$, а астатнія элементы з X пакідае нерухомымі; яна абазначаецца (i, j). У сіметрычнай групе $S(n)$ ступені n існуе дакладна $n(n-1)/2$ Т.

Няхай $SF(x)$ — падгрупа сіметрычнай групы $S(x)$, складзеная такімі падстановамі, якія перастаўляюць толькі канцае мноства элементаў (г.зн. $\gamma(x) \neq x$ толькі для канцага мноства элементаў $x \in X$). Кожная падстанова $\gamma \in SF(x)$ раскладаецца ў здабытак Т. У прыватнасці, кожная падстанова з S_n ёсць здабытак Т. Падстанова можа раскладацца ў здабытак Т. шмат якімі спосабамі, аднак для дадзенай γ характар цотнасці колькасці множнікаў у раскладанні на Т. не залежыць ад спосабу раскладання. Падстанова, якая раскладаецца ў здабытак цотнай колькасці Т., называецца цотнай, а ў здабытак няцотнай колькасці Т. — няцотнай. У S_n існуе $n!/2$ цотных падстаноў і столькі ж няцотных. Калі падстанова $\gamma \in S_n$ запісаная ў выглядзе

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix},$$

дзе $i_k = \gamma(i)$, $i = 1, \dots, n$, то яе цотнасць супадае з цотнасцю інверсій перастаўлення $i_1, i_2, \dots, i_n$, г.зн. з колькасцю параў (i_k, i_l), для якіх $k < l$, $i_k > i_l$. Усе цотныя падстановы складаюць нармальную падгрупу $A(X)$ групы $S(x)$, якая мае індэкс 2 у $SF(x)$; група $A(X)$ называецца знаказменнай групай. Пры $|X| = n$ падгрупа $A(X)$ абазначаецца A_n.

ТРАНСПАНАВАНАЯ МАТРЫЦА — матрыца, якая атрымліваецца з матрыцы $A = [a_{ij}]$ заменай радкоў матрыцы адпаведнымі слупкамі. Абазначаецца A^T. Такім чынам, $A^T = [a_{ji}]$. Калі матрыца A памеру $m \times n$, то A^T — матрыца памеру $n \times m$. Уласцівасці: $(A+B)^T = A^T + B^T$; $(AB)^T = B^T A^T$; $(A^T)^T = A$.

ТРАНСПАРТНАЯ ЗАДАЧА — адзін з важных прыватных выпадкаў агульнай задачы *лінейнага праграмавання*. Фармулюецца наступным чынам. Няхай у пунктах $A_1, A_2, \dots, A_m$ выпрабляецца нейкі аднародны прадукт, прычым у пункце A_i выпрабляецца a_i адзінак прадукту. Неабходна перавезці гэты прадукт у пункты $B_1, B_2, \dots, B_n$ у колькасці $b_1, b_2, \dots, b_n$ адзінак адпаведна. Выдаткі пры перавозцы адзінкі прадукту з A_i у B_j складаюць c_{ij} адзінак. Патрабуецца знайсці план перавозак, пры якім агульныя выдаткі былі б найменшыя. Т.з. зводзіцца да мінімізацыі лінейнай формы $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$ пры ўмовах

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i,\ i = \overline{1, m},\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b_j,$$

$$j = \overline{1, n},\ x_{ij} \geq 0,\ j = \overline{1, n},$$

дзе x_{ij} — колькасць прадукту, які перавозіцца з A_i у B_j. Найбольш вядомыя з алгарытмаў развязання Т.з. — метад патэнцыялаў і венгерскі метад.

Метад патэнцыялаў заснаваны на тэорыі дуальнасці, ён паслядоўна паляпшае план перавозак. Венгерскі метад заснаваны на тэорыі шляхоў, якія чаргуюцца; ён паслядоўна будуе дапушчальны план. У мнагаіндэксных Т.з. бяруцца пад увагу неаднастайнасці прадуктаў вытворчасці і транспартных сродкаў. Т.з. у сеткавай форме ўлічваюць прамежкавыя пункты паміж пунктамі вытворчасці і спажывання.

ТРАНСФІНІТНАЯ ІНДУКЦЫЯ — абагульненне прынцыпу матэматычнай індукцыі.

ТРАНСФІНІТНЫЯ ЛІКІ (ад лац. trans — скрозь + finitis — абмежаваны) — абагульненне *парадкавых лікаў*. Азначэнне Т.л. грунтуецца на паняцці *цалкам упарадкаванага мноства*.

Кожнае канцае мноства можна зрабіць цалкам упарадкаваным, калі выпісаць яго элементы ў пэўным парадку. Прыклад бясконцага цалкам упарадкаванага мноства — мноства ўсіх натуральных лікаў, якія размешчаныя ў парадку нарастання; тое самае мноства, якое размешчанае ў парадку спадання, не будзе цалкам упарадкаваным, бо ні адно з яго бясконцых падмностваў не мае першага найменшага элемента. Два ўпарадкаваныя мноствы X і Y падобныя або маюць аднолькавы парадкавы тып, калі паміж іх элементамі можна ўтварыць узаемна адназначную адпаведнасць, якая захоўвае парадак элементаў. Усе канцыя цалкам упарадкаваныя мноствы, якія змяшчаюць аднолькавую колькасць элементаў,

падобныя паміж сабою. Таму іх парадкавыя тыпы можна атаясаміць з натуральнымі лікамі, якія будуць у гэтым выпадку парадкавымі лікамі.

Т.л. называюцца парадкавыя тыпы бясконцых цалкам упарадкаваных мностваў. Т.л. мностваў, паміж якімі нельга ўтварыць узаемна адназначную адпаведнасць, розныя. Для Т.л. можна ўвесці паняцці "больш" і "менш". У дастасаваннях Т.л. да матэматыкі вялікую ролю адыгрывае прынцып *трансфінітнай індукцыі*, які абагульняе звычайны прынцып *матэматычнай індукцыі* на адвольныя цалкам упарадкаваныя мноствы: калі нейкае сцверджанне праўдзіцца для першага элемента цалкам упарадкаванага мноства X і калі з таго, што яно праўдзіцца для ўсіх элементаў мноства X, папярэдніх дадзенаму элементу a з мноства X, вынікае яго праўдзівасць і для элемента a, то гэтае сцверджанне праўдзівае і для кожнага элемента мноства X.

ТРАНСЦЭНДЭ́НТНАЕ ПАШЫРЭ́ННЕ п о л я — пашырэнне поля, якое не з'яўляецца алгебраічным.

ТРАНСЦЭНДЭ́НТНАЕ РАЎНА́ННЕ (ад лац. transcendens (transcendentis) — які выходзіць за межы) — раўнанне, якое змяшчае трансцэндэнтныя функцыі ад шуканай зменнай (трыганаметрычную, лагарыфмічную, паказнікавую). Агульных метадаў развязання Т.р. не існуе (акрамя набліжаных). Звычайна разглядаюцца толькі прыватныя выпадкі Т.р. (калі прысутнічаюць *трансцэндэнтныя функцыі* толькі аднаго віду).

ТРАНСЦЭНДЭ́НТНАЯ ФУ́НКЦЫЯ — аналітычная функцыя $f(z)$, якая раскладаецца ў збежны ступеневы шэраг і не праўдзіць алгебраічнае раўнанне $P(f(z)) = 0$, дзе каэфіцыенты P — мнагасклады ад z. Напрыклад, адрозныя ад мнагаскладаў цэлыя функцыі, паказнікавая, лагарыфмічная, трыганаметрычная, а таксама спецыяльныя функцыі (гама-функцыя, бэта-функцыя і інш.). Для Т.ф. характэрная наяўнасць у яе хоць бы адной асаблівасці, якая не з'яўляецца полюсам або пунктам галінавання канцага парадку. Напрыклад, e^z мае істотна асаблівы пункт $z = \infty$; $\ln z$ — два пункты галінавання бясконцага парадку $z = 0$ і $z = \infty$. Разглядаюцца таксама Т.ф. ад многіх зменных.

ТРАНСЦЭНДЭ́НТНЫ ЛІК — лік, які не з'яўляецца коранем ніякага мнагаскладу з цэлымі каэфіцыентамі. Першы прыклад Т.л. даў Ж.Ліўвіль (даказаў няроўнасць $|\alpha - p/q| > c(\alpha)/q^n$ (1844), дзе α — алгебраічны лік ступені $n \geq 2$, p, q — цэлыя рацыянальныя лікі, $c(\alpha)$ вылічаецца па α). Можна пабудаваць такія рэчаісныя лікі, якія не задавальняюць няроўнасць і таму яны трансцэндэнтныя. Г.Кантар (1874) даказаў існаванне Т.л. на аснове злічальнасці мноства алгебраічных лікаў і незлічальнасці мноства рэчаісных лікаў. Цяжка даказаць трансцэндэнтнасць канкрэтных лікаў. Трансцэндэнтнасць ліку e даказаў Ш.Эрміт (1873); трансцэндэнтнасць ліку π — Ф.Ліндэман (1882), развязаўшы праблему квадратуры круга.

ТРАПЕ́ЦЫЙ ФО́РМУЛА — формула для набліжанага вылічэння інтэграла

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{2}(f(b)-f(a)).$$

Для павелічэння дакладнасці вылічэння інтэграла скарыстоўваюць больш дакладную Т.ф.:

$$\int_a^b f(x)dx \cong$$

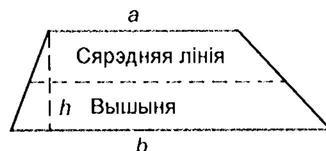
$$\cong h\left[\frac{1}{2}f(a)+f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_{n-1})+\frac{1}{2}f(b)\right],$$

дзе $x_i = a + ih$ $(i = 1, 2, ..., n-1)$, $h = \frac{b-a}{n}$. Калі $f(x)$ — двойчы непарыўна дыферэнцавальная на $[a, b]$ функцыя, то для хібнасці $R(f)$ Т.ф. маем роўнасць:

$$R(f) = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(c), \ c \in [a,b].$$

ТРАПЕ́ЦЫЯ (ад грэц. trapezion — чатырохвугольнік з няроўнымі бакамі; літаральна — столік) — выпуклы чатырохвугольнік, у якога дзве процілеглыя стараны (называюцца а с н о в а м і) паралельныя, а дзве іншыя (б а к а в ы я с т а р а н ы) непаралельныя.

Адлегласць паміж асновамі называецца в ы ш ы н ё й Т. (гл. рыс.). Адрэзак, які злучае сярэдзіны бакавых старон Т., называецца яе с я р э д н я й л і н і я й; апошняя паралельная асновам a і b,



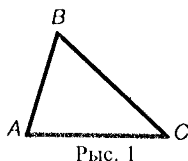
даўжыня яе роўная іх паўсуме. Плошча Т. $S = 0{,}5(a + b)\,h$, або яна роўная здабытку сярэдняй лініі на вышыню Т. Калі бакавыя стораны роўныя, Т. называецца р о ў н а б а к о в а й, калі адна з бакавых старон перпендыкулярная да асновы — п р а м а в у г о л ь н а й.

ТРОХ СІГМАЎ ПРАВІЛА — правіла, паводле якога лічаць практычна немагчымай падзею, што адхіляецца ад сярэдняга больш чым на тры квадратовыя адхіленні. Паводле *Чабышова няроўнасці,* Т.с.п. гарантуе імавернасць памылкі не больш за 1/9, але пры канкрэтных размеркаваннях яна значна меншая.

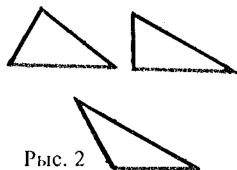
ТРОХВУГОЛЬНАЯ МАТРЫЦА — квадратная матрыца $[a_{ij}]$, усе элементы якой, што размешчаныя ніжэй (вышэй) за галоўную дыяганаль, роўныя нулю, г.зн. $a_{ik}=0$ пры $i>k$ ($a_{ik}=0$ пры $i<k$). У першым выпадку матрыца называецца в е р х н я й Т.м., у другім — н і ж н я й Т.м. Вызначнік Т.м. ёсць здабытак яе дыяганальных элементаў.

ТРОХВУГОЛЬНІК у э ў к л і д а в а й г е а м е т р ы і — тры пункты (вяршыні) і тры адрэзкі простых (стораны) з канцамі ў гэтых пунктах (рыс. 1). Часам Т. вызначаюць як частку плоскасці, абмежаваную старанамі Т. Адрозніваюць Т. (рыс. 2) в о с т р а в у г о л ь н ы я (усе вуглы вострыя), п р а м а в у г о л ь н ы я (адзін з вуглоў прамы), т у п а в у г о л ь н ы я (адзін з вуглоў тупы). У залежнасці ад даўжыняў старон Т. падзяляюцца (рыс. 3) на р о ў н а с т а р о н н і я (усе стораны роўныя) і р о ў н а б а к о в ы я (дзве стараны роўныя). Р о ў н ы м і (кангруэнтнымі) называюцца Т., стораны і вуглы якіх адпаведна роўныя (рыс. 4); п а д о б н ы м і — такія Т., у якіх адпаведныя стораны прапарцыйныя, а вуглы, што знаходзяцца паміж прапарцыйнымі старанамі, роўныя (рыс. 5). Т. дакладна вызначаны, калі зададзеныя: 1) тры стараны; 2) дзве стараны і вугал паміж імі; 3) старана і два прылеглыя да яе вуглы.

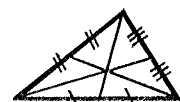
Калі вылучаюць адну з старон Т., то яна называецца а с н о в а й, а дзве іншыя — б а к а в ы м і с т а р а н а м і. Стораны, якія ўтвараюць прамы вугал, называюцца к а т э т а м і, а трэцяя старана — г і п а т э н у з а й. М е д ы я н а й называецца простая, якая злучае вяршыню з сярэдзінай процілеглай стараны (рыс. 6); б і с е к т р ы с а й — простая, якая дзеліць нутраны вугал Т. напалам (рыс. 7); в ы ш ы н ё й — перпендыкуляр, апушчаны з вяршыні на супрацьлеглую старану (рыс. 8); с я р э д н я й л і н і я й — простая, якая злучае сярэдзіны дзвюх старон Т. (рыс. 9). Н у т р а н ы м і в у г л а м і Т. называюцца тры вуглы, кожны з якіх утвораны двума промнямі, што выходзяць з вяршыні Т. і праходзяць праз дзве іншыя вяршыні; в о н к а в ы м в у г л о м — вугал, сумежны з нутраным вуглом (рыс. 10). Пункт, у якім перасякаюцца вышыні Т., называецца а р т а ц э н т р а м, а пункт, у якім перасякаюцца медыяны, — ц э н т р о і д а м (цэнтрам цяжару). У м е ж а н а й а к р у ж ы н а й у Т. (рыс. 11) называецца акружына, якая датыкаецца да трох старон Т. (яе цэнтр знаходзіцца ў пункце перасячэння бісектрыс); а к р э с л е н а я а к р у ж ы н а праходзіць праз вяршыні Т. (яе цэнтр знаходзіцца ў пункце перасячэння перпендыкуляраў, узведзеных з сярэдзін старон Т.).



Рыс. 1

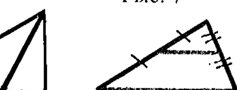

Рыс. 2

Рыс. 3


Рыс. 5

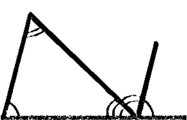
Рыс. 4

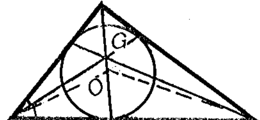
Рыс. 6


Рыс. 7

Рыс. 8

Рыс. 9


Рыс. 10



Рыс. 11

Даўжыня кожнай стараны Т. меншая за суму і большая за рознасць дзвюх іншых старон. Сума вуглоў Т. роўная двум прамым, вонкавы вугал роўны суме двух нутраных вуглоў, не сумежных з ім. Цэнтроід дзеліць медыяны у тасунку 2:1, калі лічыць ад вяршыні. Бісектрыса дзеліць супрацьлеглую старану на адрэзкі, прапарцыйныя дзвюм іншым старанам. Сярэдняя лінія паралельная трэцяй старане і роўная палавіне яе даўжыні. Калі a, b, c — даўжыні старон Т., A, B, C — супрацьлеглыя ім вуглы, S — плошча, R — радыус акрэсленай акружыны, r — радыус умежанай акружыны,

$p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ — паўперыметр, h_a — вышыня да стараны a, то праўдзяцца наступныя роўнасці:

тэарэма косінусаў

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A;$$

тэарэма сінусаў

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = 2R;$$

тэарэма тангенсаў

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}.$$

Плошча

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}ab\sin C = 2R^2\sin A\sin B\sin C =$$

$$= \frac{abc}{4R} = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Даўжыня вышыні да стараны a вызначаецца як

$$h_a = b\sin C = c\sin B = \frac{bc}{2R};$$

даўжыня бісектрысы вугла A:

$$l_a = \frac{\sqrt{bc(a+b+c)(b+c-a)}}{b+c};$$

даўжыня медыяны да стараны a:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}.$$

Радыус умежанай акружыны:

$$r = s/p;$$

радыус акрэсленай акружыны:

$$R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{abc}{4S}.$$

Пра Т. на сферы гл. у арт. *Сферычная геаметрыя, Сферычная трыганаметрыя.*

ТРОХВУГО́ЛЬНІКА НЯРО́ЎНАСЦЬ — няроўнасць, паводле якой даўжыня ўсякай стараны трохвугольніка не перавышае сумы даўжыняў дзвюх іншых старон. Т.н. дапускае наступнае абагульненне ў выглядзе гэтак званай аксіёмы трохвугольніка для метрычных прастораў:

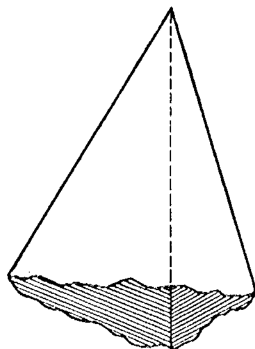
$$d(x,y) \le d(x,z) + d(y,z),$$

дзе $d(x,y)$ — адлегласць паміж x і y; для ўнармаваных прастораў

$$\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|,$$

дзе $\|x\|$ — норма x.

ТРОХГРА́НЕВЫ ВУ́ГАЛ, трохграневы кут — частка прасторы, абмежаваная бясконцай трохвугольнай пірамідай (гл. рыс.). Грані гэтай піраміды называюцца гранямі Т.в., яе вяршыня — вяршыняй Т.в., паўпростыя, на якіх перасякаюцца грані, — кантамі Т.в. Канты ўтвараюць паміж сабою плоскія вуглы Т.в., грані — дзвюхграневыя вуглы Т.в. Звычайна разглядаюць выпуклыя Т.в. — такія, дзвюхграневыя вуглы якіх меншыя за π.



ТРОХГРА́НЕВЫ КУТ — тое, што *трохграневы вугал.*

ТРОХМЕ́РНАЯ МНАГАСТА́ЙНАСЦЬ — *тапалагічная прастора,* у кожнага пункта якой існуе наваколле, гамеаморфнае прасторы $\mathbf{R}^3$. Гл. *Мнагастайнасць* (выпадак $n = 3$).

ТРЫАНГУЛЯ́ЦЫЯ (ад лац. triangulum — трохвугольнік) — падзел паверхні на крываліне́йныя трохвугольнікі. Напрыклад, калі тэтраэдр ці актаэдр умежыць у сферу і спраектаваць іх на яе з цэнтра, то сфера будзе падзеленая адпаведна на 4 і на 8 крывалінейных трохвугольнікаў, якія і ўтвараюць Т.

ТРЫГАНАМЕТРЫ́ЧНАЕ РАЎНА́ННЕ — *трансцэндэнтнае раўнанне,* алгебраічнае ў дачыненні да трыганаметрычных функцый невядомай зменнай. У агульным выпадку Т.р. мае безліч развязкаў (або яны адсутнічаюць). Звычайна Т.р. з дапамогай алгебраічных і трыганаметрычных пераўтварэнняў прыводзяць да найпрасцейшых Т. р. выгляду $\sin\alpha x = a$, $\cos\beta x = b$, $\operatorname{tg}\gamma x = c$,

$\alpha, \beta, \gamma, a, b, c \in \mathbf{R}$, пры развязанні якіх выкарыстоўваюцца адваротныя трыганаметрычныя функцыі. Раўнанне $\sin x = a$ ($|a| \leq 1$) мае развязкі $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; $\cos x = a (|a| \leq 1)$ — $x = \pm \arccos a + 2\pi n$; $\operatorname{tg} x = a$ — $x = \operatorname{arctg} a + \pi n$; $\operatorname{ctg} x = a$ — $x = \operatorname{arcctg} a + \pi n$.

ТРЫГАНАМЕТРЫЧНАЯ ІНТЭРПАЛЯ́ЦЫЯ — набліжанае выяўленне 2π-перыядычнай функцыі $f(x)$ у выглядзе трыганаметрычнага мнагасклада

$$T(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

значэнні якога ў вызначаных пунктах супадаюць з адпаведнымі значэннямі функцыі. Можна выбраць $2n+1$ каэфіцыент $a_0, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n$ мнагасклада $T(x)$ так, каб яго значэнні былі роўныя $f(x_k)$ у зададзеных $2n+1$ пунктах $0 \leq x_0 < < x_1 < \ldots < x_{2n} < 2\pi$. Звычайна бяруцца роўнааддаленыя пункты $x_k = 2\pi k/(2n+1)$, $k = 0, 1, \ldots, 2n$.

ТРЫГАНАМЕТРЫЧНАЯ СІСТЭ́МА — адна з артаганальных сістэмаў функцый. Функцыі Т.с.

$$1, \sin x, \cos x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots \qquad (1)$$

артаганальныя на кожным адрэзку даўжыні 2π, а функцыі

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \ldots$$

ствараюць *ортаўнармаваную сістэму* на тых жа адрэзках.

Т.с. поўная і замкнёная ў прасторы $L_p([-\pi, \pi])$ пры $1 < p < +\infty$ і ўтварае базіс гэтай прасторы. Іншы раз Т.с. (1) называюць асноўнай Т.с. адрозна ад сістэмы

$$\sin\frac{\pi x}{l}, \cos\frac{\pi x}{l}, \ldots, \sin\frac{\pi n x}{l}, \cos\frac{\pi n x}{l}, \ldots,$$

якая мае на кожным адрэзку даўжыні $2l$ уласцівасці, аналагічныя ўласцівасцям асноўнай Т.с. Шэрагі па Т.с. называюцца трыганаметрычнымі шэрагамі Фур'е.

ТРЫГАНАМЕТРЫЧНАЯ СУ́МА — конечная сума S выгляду

$$S = \sum_{x=1}^{n} e^{2\pi i F(x)},$$

дзе $F(x)$ — рэчаісная функцыя зменнай x. Т.с. называецца таксама сума S^* больш агульнага выгляду:

$$S^* = \sum_{x_1=1}^{n_1} \ldots \sum_{x_k=1}^{n_k} f(x_1, \ldots, x_k) e^{2\pi i F(x_0, \ldots, x_k)},$$

дзе $F(x_1, \ldots, x_k)$ — рэчаісная функцыя зменных $x_1, \ldots, x_k$, $f(x_1, \ldots, x_k)$ — камплекснaзначная функцыя. Калі $F(x)$ — мнагасклад, то S называецца сумай Вэйля; калі

$$F(x) = \frac{a_n x^n + \ldots + a_1 x}{q}$$

і $(a_1, \ldots, a_n, q) = 1$, то рацыянальнай Т.с.; калі $n = q$, то поўнай Т.с. Створаны І.Віноградавым метад ацэнак модуляў Т.с. дазволіў развязаць шмат задач аналітычнай тэорыі лікаў.

ТРЫГАНАМЕТРЫЧНЫ МНАГАСКЛА́Д — *функцыя* выгляду

$$T(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

дзе $a_0, a_k, b_k, k = \overline{1, n}$ — лікавыя каэфіцыенты. Парадкам Т.м. называецца лік n, калі $|a_n| + |b_n| > 0$. Т.м.можна запісаць таксама ў выглядзе

$$T(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}.$$

ТРЫГАНАМЕТРЫЧНЫ ШЭ́РАГ — функцыйны шэраг па косінусах і сінусах кратных вуглоў, г.зн. шэраг выгляду

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\frac{\pi k x}{l} + b_k \sin\frac{\pi k x}{l} \right) \qquad (1)$$

— рэчаісная форма Т.ш.; у камплекснай форме Т.ш. мае выгляд

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i\pi k x/l},$$

дзе $l > 0$ — фіксаваны, a_k, b_k і c_k — каэфіцыенты Т.ш.

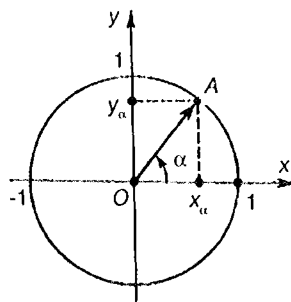
Упершыню Т.ш. сустракаецца ў Л.Ойлера (1744). Ён атрымаў расклад у Т.ш. пэўных элементарных функцый. У сярэдзіне 18 ст. у сувязі з даследаваннем задачы пра свабодныя ваганні струны ўзнікла пытанне наконт магчымасці выяўлення функцыі, што характарызуе начатковае становішча струны, у выглядзе сумы Т.ш. Гэтае пытанне выклікала спрэчкі сярод матэматыкаў Д.Бэрнулі, Ж.Д'Алямбэра, Ж.Лагранжа і Л.Ойлера. Развязаў задачу Ж.Фур'е (1807). Ён атрымаў формулы для знаходжання каэфіцыентаў Т.ш. для функцыі $f(x)$, $x \in [0, 2l]$:

$$a_k = \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx,\ k = 0, 1, 2, ...,$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx,\ k = 1, 2, ... \ . \quad (2)$$

Ён дастасаваў формулы (2) да развязання задач цеплаправоднасці. Формулы (2) называюцца каэфіцыентамі Фур'е, хоць сустракаліся раней у А.Клеро (1754) і Л.Ойлера (1777). Т.ш. (1), каэфіцыенты якога знаходзяцца па формулах (2), называецца *Фур'е шэрагам* (Т. ш. Фур'е). У тэорыі Т.ш., у прыватнасці Т.ш. Фур'е, даследуюцца пытанні збежнасці шэрагаў (1) і магчымасць выяўлення імі функцый. Інтэграл у (2) можна разумець як інтэграл Рымана (Лебэга і г.д.). Тэорыя Т.ш. Фур'е набыла сучасны выгляд пасля распрацоўкі тэорыі інтэграла Лебэга. Першую прыкмету збежнасці Т.ш. Фур'е атрымаў П.Дырыхле (1829). Абагульненне яго выніку — тэарэма Жардана (1881): калі функцыя мае абмежаваную варыяцыю, то яе Т.ш. Фур'е збягаецца для ўсіх x, прычым у пунктах непарыўнасці збягаецца да $f(x)$, у пунктах разрыву — да $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$. Дадаткова, калі $f(x)$ непарыўная і $f(0) = f(2l)$, збежнасць да $f(x)$ будзе раўнамернай на $[0, 2l]$. П.Дзюбуа-Рэймонд (1873) першы пабудаваў прыклад непарыўнай на $[0, 2l]$ функцыі з умовай $f(0) = f(2l)$, для якой Т.ш. Фур'е разбягаецца ў кожнай колькасці пунктаў. Існуюць розныя метады сумавання шэрагаў Фур'е. У тэорыі агульных Т.ш. даследуюцца пытанні раскладу адвольных (не абавязкова сумавальных) функцый, пытанні адзінасці такога раскладу, пытанні збежнасці і інш.

ТРЫГАНАМЕТРЫЧНЫЯ ФУНКЦЫІ — клас элементарных функцый, да якога належаць *сінус* (sin), *косінус* (cos), *тангенс* (tg), *катангенс* (ctg), *сэканс* (sec), *касэканс* (cosec). Каб вызначыць Т.ф., разглядаюць на каардынатнай плоскасці акружыну (рыс. 1) з радыусам $R = 1$ і цэнтрам у пункце O. Адвольнаму вуглу α адпавядае пункт A на акружыне, так што α — гэта вугал, які ўтварае вектар OA з дадатным кірункам восі абцыс. Пры гэтым калі вугал дадатны, то адлік вядзецца супраць руху гадзіннікавай стрэлкі, калі ж α адмоўны — то ў адваротным кірунку (інакш кажучы, α — палярны вугал пункта A). Сінусам (sinα) і косінусам (cosα) вугла α называюць адпаведна ардынату і абцысу пункта A. Астатнія трыганаметрычныя функцыі азначаюцца формуламі:



Рыс. 1

$$\text{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi;$$

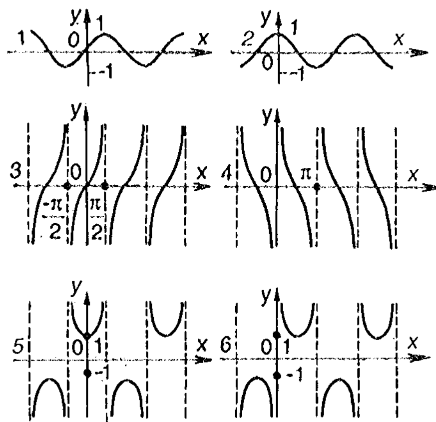
$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha},\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi;$$

$$\text{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \alpha \neq k\pi;\quad \text{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha},\ \alpha \neq k\pi$$

(усюды $k \in \mathbb{Z}$). Т.ф. адвольнага ліку x лічаць роўнымі аднайменным Т.ф. вугла x, выражанага радыяннай мерай. Графікі Т.ф. прыведзеныя на рыс. 2. У прамавугольным трохвугольніку з катэтамі a, b, гіпатэнузай c і вуглом x, супрацьлеглым катэту a, маюць месца наступныя роўнасці:

$$\sin x = a/c,\ \cos x = b/c,\ \text{tg}x = a/b,\ \text{ctg}x = b/a,$$

$$\sec x = c/b,\ \text{cosec}x = c/a.$$



Рыс. 2. Графікі трыганаметрычных функцый: 1 — $y = \sin x$ (крывая — сінусоіда); 2 — $y = \cos x$ (крывая — касінусоіда, г.зн. сінусоіда, зрушаная ўлева па восі Ox на $\pi/2$); 3 — $y = \text{tg}\, x$ (крывая — тангенсоіда); 4 — $y = \text{ctg}\, x$ (тангенсоіда, люстрана адбітая дастасоўна да восі Oy і зрушаная ўправа на $\pi/2$); 5 — $y = \sec x$; 6 — $y = \text{cosec}\, x$ (графік сэканса, люстрана адбіты дастасоўна да восі Ox і зрушаны ўправа на $\pi/2$)

Усе Т.ф. перыядычныя, прычым tg і ctg маюць перыяд π, астатнія — 2π. Для вуглоў, якія дапаўняюць вугал x да $\pi/2$, выконваецца

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x,\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\operatorname{ctg} x.$$

Выкарыстоўваючы перыядычнасць функцый і формулы прывядзення, атрымаем наступныя значэнні аргумента з першай чвэрці:

$$\sin(x+n\pi)=(-1)^n\sin x,\ \cos(x+n\pi)=(-1)^n\cos x.$$

Паварот восяў вакол пункта 0 прыводзіць да формул складання:

$$\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y,$$

$$\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y,$$

$$\operatorname{tg}(x\pm y)=\frac{\operatorname{tg}x\pm\operatorname{tg}y}{1\pm\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}.$$

Гэтыя формулы даюць магчымасць знайсці выразы для Т.ф. падвойнага або палавіннага аргумента і выразіць здабытак Т.ф. у выглядзе сумы. Вытворныя ўсіх Т.ф. выражаюцца праз Т.ф., напрыклад,

$$(\sin x)'=\cos x,\ (\cos x)'=\sin x,\ (\operatorname{tg}x)'=\sec^2 x.$$

Першаіснымі для Т.ф. з'яўляюцца Т.ф. або лагарыфмы Т.ф., напрыклад, для $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cosec} x$ першаісныя адпаведна роўныя:

$$-\cos x,\ \sin x,\ \ln|\sec x|,\ \ln|\operatorname{tg}x/2|.$$

Т.ф. раскладаюцца ў ступеневыя шэрагі. Так, для ўсіх x маюць месца роўнасці

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots-\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots,$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots-\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\ldots.$$

Гэтыя расклады выкарыстоўваюць пры вызначэнні Т.ф. ад камплекснага аргумента. Напрыклад, для адвольнага камплекснага z сінус азначаецца формулай

$$\sin z=z-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots-\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots.$$

Сувязь паміж Т.ф. і *паказнікавай функцыяй* даецца формуламі Ойлера:

$$\cos x=(e^{ix}+e^{-ix})/2,\ \sin x=(e^{ix}-e^{-ix})/2i.$$

Выкарыстоўваюць Т.ф. у розных галінах навукі і тэхнікі, напрыклад для апісання перыядычных вагальных працэсаў. Гл. таксама *Адваротныя трыганаметрычныя функцыі.*

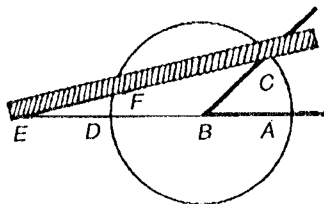
ТРЫГАНАМЕ́ТРЫЯ (ад грэц. trigonon — трохвугольнік + metreo — мераю) — раздзел матэматыкі, які вывучае *трыганаметрычныя функцыі* і іх уласцівасці, залежнасці паміж імі, а таксама іх дастасаванні да геаметрыі (планіметрыі і стэрэаметрыі). Т. падзяляецца на плоскую і *сферычную трыганаметрыю*. Важныя формулы плоскай Т. даюць *косінусаў тэарэма, сінусаў тэарэма* (гл. таксама *Трохвугольнік*).

Элементы Т. сустракаюцца ў Эўкліда (3 ст. да н.э.). Значнае развіццё Т. атрымала ў працах арабскіх і індыйскіх матэматыкаў (9—13 стст.), а таксама ў працах М.Каперніка, Ц.Браге, Ф.Віета, Ё.Кеплера (18 ст.). Раней Т. вывучалася як асобная дысцыпліна ў сярэдняй школе, цяпер размеркаваная паміж курсамі алгебры, геаметрыі, пачаткаў аналізу.

ТРЫЛЬЁН (ад франц. trillion) — тысяча *мільярдаў*; лік, які паказваецца адзінкай з 12 нулямі, г.зн. лік 10^{12}. У некаторых краінах Т. называецца лік 10^{18}.

ТРЫСЕ́КЦЫЯ ВУГЛА́ (ад лац. tri — на тры часткі + sectio — рассяканне) — задача пра падзел вугла з дапамогай цыркуля і лінейкі на тры роўныя часткі. Развязаць задачу Т.в. удавалася толькі ў асобных выпадках (напрыклад, для вуглоў у 90° і $90°/2^n$, дзе n — натуральны лік).

Пачынаючы з 5 ст. да н.э. грэкі прыцягваюць квадратрысы (спецыяльныя плоскія крывыя) для развязання задач Т.в. і квадратуры круга. У працах Архімеда Т.в. ажыццяўляецца з дапамогай гэтак званага прыёму ўстаўкі, які здзяйсняецца цыркулем і лінейкай (з дзяленнямі), менавіта развязанне задачы пра Т.в. ABC (рыс.) прыводзіцца да ўстаўкі адрэзка $EF=BA$ (для гэтага пункты E і F адзначаюцца на лінейцы) паміж працягам дыяметра AD і акружынай так, каб праця́г EF прайшоў праз C; тады $\angle AEF=\frac{1}{3}\angle ABC$. У сярэдня-



вечнай літаратуры Т.в. звязваецца з задачамі алгебры і трыганаметрыі. У 9—10 стст. Т.в. зводзіцца да развязання кубічнага раўнання выгляду $x^3+q=px$. У канцы 16 ст. Ф.Віет, выкарыстоўваючы Т.в., даў трыганаметрычнае развязанне кубічнага раўнання ў гэтак званым непрыводным выпадку. Доказ немагчымасці дакладнай Т.в. у агульным выпадку з дапамогай цыркуля і лінейкі (г.зн. неразвязальнасць адпаведнага кубічнага раўнання ў квадратовых радыкалах) даў П.Ванцэль (1837).

ТУПЫ́ ВУ́ГАЛ — вугал, большы за прамы і меншы за разгорнуты.

ТЭАРЭ́МА (грэц. theorema ад theoreo — разглядаю, даследую) — матэматычнае сцверджанне, праўдзівасць якога даказваецца шляхам лагічных разважанняў. Кожны раздзел матэматыкі складаецца з Т., якія наслядоўна даказваюцца на падставе раней даказаных Т., а самыя першыя сцверджанні (аксіёмы) прымаюцца без доказу і з'яўляюцца лагічнай асновай дадзенай галіны матэматыкі.

Большасць матэматычных Т. фармулюецца ў выглядзе $A \Rightarrow B$ ("калі A, то B", "з A вынікае B"), дзе A, B — пэўныя сцверджанні. У такой фармулёўцы вылучаюць умову A і выснову B. Т. дадзенага тыпу называецца прыкметай або дастатковай умовай для B. Пры гэтым кажуць, што B — неабходная ўмова для A. Калі Т., выказаную ў форме $A \Rightarrow B$, лічыць прамой, то адпаведная ёй Т., выказаная ў форме $B \Rightarrow A$, называецца адваротнай, у форме $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$ — процілеглай, а ў форме $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ — процілеглай да адваротнай. Прамая Т. і процілеглая да адваротнай разам праўдзівыя ці непраўдзівыя. На гэтым факце грунтуецца метад доказаў ад процілеглага. Праўдзівасць адваротнай і процілеглай Т. не вынікае з праўдзівасці прамой і патрабуе высвятлення ў кожным выпадку. Калі для сцверджанняў A і B праўдзіцца і прамая, і адваротная Т., то гэта азначае, што справядлівая Т. тыпу $A \Leftrightarrow B$ ("A, калі і толькі калі B"), якая называецца крытэрам або неабходнай і дастатковай умовай для B (ці для A).

ТЭ́ЙЛАРА МНАГАСКЛА́Д — вызначаецца для функцыі f, n разоў дыферэнцавальнай пры $x=x_0$, як мнагасклад ступені n выгляду

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Значэнні Т.м. і яго вытворных да парадку n вызначаныя ў пункце $x=x_0$ і супадаюць са значэннямі функцыі і яе адпаведных вытворных у гэтым пункце: $f^{(k)}(x_0)=P_n^{(k)}(x_0)$, $k=0, 1, \ldots, n$. Т.м. — мнагасклад найлепшага набліжэння функцыі f пры $x \to x_0$ у тым сэнсе, што

$$f(x)-P_n(x)=o((x-x_0)^n),\ x\to x_0, \qquad (1)$$

і калі які-небудзь мнагасклад $Q_n(x)$ ступені, не большай за n, мае ўласцівасць $f(x)-Q_n(x)=$ $=o((x-x_0)^m)$, $x\to x_0$, дзе $m\ge n$, то ён супадае з Т.м. $P_n(x)$. Інакш кажучы, мнагасклад, які мае ўласцівасць (1), адзіны. Калі хоць бы адна з вытворных $f^{(k)}(x)$, $k=0, 1, \ldots, n$, не роўная нулю ў пункце x_0, то Т.м. з'яўляецца галоўнай часткай *Тэйлара формулы*.

ТЭ́ЙЛАРА ФО́РМУЛА — выяўленне функцыі ў выглядзе сумы яе мнагасклада Тэйлара ступені n ($n=0, 1, \ldots$) і рэштквага складніка. Калі рэчаісная функцыя f адной зменнай мае n вытворных у пункце x_0, то яе Т.ф. мае выгляд

$$f(x)=P_n(x)+r_n(x),$$

дзе

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

— *Тэйлара мнагасклад*, рэштквы складнік $r_n(x)$ можна запісаць у форме Пэана:

$$r_n(x)=o((x-x_0)^n), \quad x\to x_0.$$

Калі функцыя f дыферэнцавальная $(n+1)$ разоў у некаторай акрузе $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$, $\delta>0$, пункта x_0, то рэштквы складнік у гэтай акрузе можна запісаць у форме Шлёмільха—Роша:

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{p\cdot n!}(1-\theta)^{n-p+1}(x-x_0)^{n+1},$$

дзе $p=1, 2, \ldots, n+1$. Прыватныя выпадкі гэтай формулы — форма Лягранжа:

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1};$$

форма Кашы

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1},$$

$$0<\theta<1, \quad x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta).$$

Калі вытворная парадку $(n+1)$ функцыі f інтэгравальная на адрэзку з канцамі ў пунктах x і x_0, то рэштkавы складнік можна запісаць у інтэгральнай форме:

$$r_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt.$$

Т.ф. з некаторымі формамі запісу яе рэштkавага складніка абагульняецца на выпадак функцыі некалькіх зменных. З дапамогай Т.ф. вывучэнне пэўных уласцівасцяў дыферэнцавальнай функцыі можна звесці да больш простай задачы вывучэння гэтых уласцівасцяў у адпаведнага мнагаскладу Тэйлара. На гэтым заснаваныя дастасаванні Т.ф., напрыклад, для вылічэння лімітаў функцый, даследаванні іх экстрэмумаў, пунктаў перагіну, інтэрвалаў выпукласці і ўвагнутасці, збежнасці шэрагаў і інтэгралаў, ацэнкі хуткасці іх збежнасці або разбежнасці.

ТЭЙЛАРА ШЭРАГ — *ступеневы шэраг* з цэнтрам у пункце z_0 ($z_0 \in \mathbf{C}$) функцыі $f(z)$, для якой існуюць вытворныя ўсіх парадкаў у гэтым пункце:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n =$$

$$= f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \ldots .$$

Частковыя сумы Т.ш. — *Тэйлара мнагасклады*. Пры $z_0 = 0$ Т.ш. з'яўляецца *Маклёрына шэрагам*:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}z^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}z + \frac{f''(0)}{2!}z^2 + \ldots .$$

Для некаторых функцый $f(z)$ сума іх Т.ш. роўная $f(z)$ у пэўным наваколлі пункта z_0, напрыклад: геаметрычны шэраг

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots$$

(радыус збежнасці $R = 1$); біномны шэраг

$$(1+z)^m = 1 + \binom{m}{1}z + \binom{m}{2}z^2 + \ldots + \binom{m}{n}z^n + \ldots + z^m;$$

лагарыфмічны шэраг

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \ldots + (-1)^n\frac{z^n}{n} + \ldots \quad (R = 1);$$

шэраг для экспаненты

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots \quad (R = \infty);$$

для косінуса

$$\cos x = 1 - \frac{z^2}{2!} + \ldots + (-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n+1)!} + \ldots \quad (R = \infty);$$

для сінуса

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \ldots + (-1)^n\frac{z^{(2n+1)}}{(2n+1)!} + \ldots \quad (R = \infty).$$

Т.ш. збягаецца да сваёй функцыі $f(z)$ у пэйкай акрузе пункта z_0, калі і толькі калі $f(z)$ ёсць аналітычная ў пункце z_0 (пры гэтым зменная z можа быць як рэчаіснай, так і камплекснай). Аднак існуюць функцыі $f(z)$, для якіх сума яе Т.ш. адрозніваецца ад $f(z)$. Напрыклад, функцыя

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2) & \text{пры } x > 0, \\ 0 & \text{пры } x \le 0, \end{cases} \quad x \in \mathbf{R},$$

мае вытворныя ўсіх парадкаў у пункце $x = 0$, прычым $f^{(n)}(0) = 0$ для ўсіх n, але яе шэраг Маклёрына збягаецца да функцыі $g(x) \equiv 0$, а не $f(x)$.

ТЭНЗАР (ад лац. tendere — напружваць, расцягваць) — велічыня, каардынаты якой пераўтвараюцца па асобных правілах пры пераходзе ад адной сістэмы каардынат да другой (гл. *Тэнзарнае злічэнне*). Паняцце Т. можа быць уведзенае рознымі спосабамі. Напрыклад, Т. на вектарнай прасторы V над полем $\mathbf{P}$, p разоў контрварыянтны і q разоў каварыянтны, — элемент t тэнзарнага здабытку

$$T_q^p(V) = \underbrace{V\otimes\ldots\otimes V}_{p}\otimes\underbrace{V^*\otimes\ldots\otimes V^*}_{q},$$

дзе V^* — мноства лінейных функцый на V. Лік $p+q$ называецца валентнасцю Т. t, пара лікаў (p, q) — тыпам Т. Элементы поля $\mathbf{P}$ лічацца Т. валентнасці 0: $T_0^0(V) = \mathbf{P}$. Т. тыпу (1, 0) — гэта вектар з V; Т. тыпу (0, 1) — гэта лінейная функцыя на V; Т. тыпу (1, 1) атаясамляецца з лінейным аператарам на V; Т. тыпу (0, 2) — з білінейнай функцыяй на V. Калі $(a_1,\ldots,a_n)$ — базіс V, $(f^1,\ldots,f^n)$, дуальны да першага базіса V^* (г.зн. $f^j(a_i) = \delta_i^j$ — сімвал Кронэкера), тады

$$a_{i_1}\otimes\ldots\otimes a_{i_p}\otimes f^{j_1}\otimes\ldots\otimes f^{j_q},$$

$$1 \le i_1,\ldots,i_p,\; j_1,\ldots,j_q \le n,$$

утвараюць базіс вектарнай прасторы $T_p^q(V)$. Лікі $t_{j_1...j_q}^{i_1...i_p}$, якія з'яўляюцца каэфіцыентамі раскладу Т. t на азначаным базісе

$$t = \sum_{i,j} t_{j_1...j_q}^{i_1...i_q} a_{i_1} \otimes ... \otimes a_{i_p} \otimes f^{j_1} \otimes ... \otimes f^{j_q},$$

называюцца кампанентамі або каардынатамі Т. t. Няхай $(a'_1, ..., a'_n)$ — другі базіс V, $a'_i = l_i^j a_j$. Кампаненты $t'^{i_1...i_p}_{j_1...j_q}$ Т. t у другім базісе звязаныя з кампанентамі t у першым базісе з дапамогай формулы

$$t'^{i_1...i_p}_{j_1...j_q} = \alpha_{j_1}^{l_1} ... \alpha_{j_q}^{l_q} \beta_{k_1}^{i_1} ... \beta_{k_p}^{i_p} t_{l_1...l_q}^{k_1...k_p}, \qquad (1)$$

дзе $(\beta_j^i) = ((\alpha_j^i)')^{-1}$. Формула (1) — аснова класічнага азначэння Т.: кажуць, што на n-мернай вектарнай прасторы V зададзеныя Т. тыпу (p, q), калі кожнаму базісу V адпавядае набор n^{p+q} лікаў $t_{j_1...j_q}^{i_1...i_p}$, прычым наборы, якія адпавядаюць розным базісам, звязаныя паміж сабою формулай (1).

ТЭНЗАР КРУЧЭННЯ — тэнзарнае поле спецыяльнага тыпу (1, 2). Калі M — гладкая мнагастайнасць з афіннай злучнасцю ∇, $D^1(M)$ — модуль гладкіх вектарных палёў на M, тады тэнзарнае поле тыпу (1, 2) $T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$, дзе $X, Y \in D'(M)$ — тэнзарнае поле кручэння (Т.к.) афіннай злучнасці ∇ на M. Кампаненты Т.к. у дачыненні да лакальнай карты (U, φ) з лакальнымі каардынатамі $(x_1, x_2, ..., x_n)$ — гэта функцыі T_{ij}^k на U, вызначаныя ўмовай

$$T\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_{k=1}^n T_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k},$$

$i, j = 1, 2, ..., n$. У лакальных каардынатах кампаненты Т.к. маюць выгляд $T_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k$, дзе Γ_{ij}^k — каэфіцыенты афіннай злучнасці ∇. Умова $T = 0$ азначае афінную злучнасць без кручэння, якая называецца таксама сіметрычнай афіннай злучнасцю.

ТЭНЗАР КРЫВІНІ — тэнзарнае поле спецыяльнага тыпу (1, 3). Няхай M — гладкая мнагастайнасць з афіннай злучнасцю ∇, $D^1(M)$-$C(M)$ — модуль гладкіх вектарных палёў на M, дзе $C(M)$ — алгебра гладкіх функцый на M. Тэнзарнае поле тыпу (1, 3) $R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$, дзе $X, Y, Z \in D^1(M)$ — тэнзарнае поле крывіні (Т.к.) афіннай злучнасці ∇ на M. Калі (U, φ) — лакальная карта на M з лакальнымі каардынатамі $(x_1, x_2, ..., x_n)$, тады функцыі $R_{ijl_k}^k$ на U, вызначаныя ўмовай

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_l} = \sum_{k=1}^n R_{ijl}^k \frac{\partial}{\partial x_k},$$

$i, j = 1, 2, ..., n$, называюцца кампанентамі Т.к. R у дачыненні да лакальнай карты (U, φ). Асабліва важнае значэнне маюць Т.к. у *рыманавай геаметрыі*.

ТЭНЗАРНАЕ ЗЛІЧЭННЕ — раздзел матэматыкі, у якім распрацоўваюцца метады даследавання матэматычных аб'ектаў на падставе паняцця *тэнзарнага здабытку*. Падзяляецца на алгебраічную частку (тэнзарная алгебра) і дыферэнцыяльную частку (тэнзарны аналіз). У тэнзарнай алгебры вывучаецца шэраг алгебраічных аперацый над *тэнзарамі*. Для вектарнай прасторы V бярэцца прамая сума вектарных прастораў контрварыянтных тэнзараў усіх валентнасцяў $T(V) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} T_0^p(V)$. Да аперацый складання і множання тэнзараў на скаляры дадаецца аперацыя множання тэнзараў. Для тэнзараў, якія раскладаюцца, множанне вызначаецца як

$$(a_1 \otimes ... \otimes a_p, b_1 \otimes ... \otimes b_r) \mapsto a_1 \otimes ... \otimes a_p \otimes b_1 \otimes ... \otimes b_r$$

і распаўсюджваецца на $T(V)$ па лінейнасці. Алгебра $T(V)$ з вызначанымі аперацыямі ёсць асацыятыўная алгебра (тэнзарная алгебра) вектарнай прасторы V. Вызначаецца таксама аперацыя згортвання тэнзараў. Няхай $p > 0$, $q > 0$, i_0, j_0 — фіксаваныя натуральныя лікі, $0 < i_0 \le p$; $0 < j_0 \le q$. Згортваннем па контрварыянтным індэксе i_0 і каварыянтным індэксе j_0 называецца лінейны аператар $C_{j_0}^{i_0}: T_p^q(V) \to T_{p-1}^{q-1}(V)$, які на тэнзары, што раскладаюцца, дзейнічае як

$$a_1 \otimes ... \otimes a_p \otimes f^1 \otimes ... \otimes f^q \mapsto f^{j_0}(a_{i_0}) a_1 \otimes ...$$

$$... \otimes a_{i_0 - 1} \otimes a_{i_0+1} \otimes ... \otimes a_p \otimes f^1 \otimes ... \otimes f^{j_0-1} \otimes f^{j_0+1} \otimes ... \otimes f^q.$$

Згортванне тэнзара, які атаясамляецца з лінейным аператарам, ёсць след гэтага аператара. У тэнзарным аналізе вывучаюцца дыферэнцыяльныя аператары, што дзейнічаюць на алгебры тэнзарных палёў дыферэнцавальнай мнагастайнасці. Найбольш важныя з іх аператары каварыянтнай вытворнай, вытворнай Лі і вонкавага дыферэнцыяла.

ТЭНЗАРНЫ ЗДАБЫТАК — аперацыя для вектарнай прасторы V і вектарнай прасторы W над адным полем P (вектарная прастора над P, якая абазначаецца $V \otimes W$). Вызначаецца як фактар-

прастора G/N вектарнай прасторы G фармальных лінейных камбінацый элементаў *дэкартава здабытку* мностваў $V \times W$ з каэфіцыентамі з P па падпрасторы N, якая спараджаецца наступнымі элементамі з G: $(a+b,c)-(a,c)-(b,c)$; $(a,c+d)-(a,c)-(a,d)$; $(\alpha a,c)-\alpha(a,c)$; $(a,\alpha c)-\alpha(a,c)$, пабудаванымі для кожных $a,b \in V$; $c,d \in W$, $\alpha \in P$. Вобраз элемента $(a,c) \in G$, дзе $a \in V, c \in W$, пры фактарызацыі абазначаецца $a \otimes c$ і называецца тэнзарным здабыткам a і c або раскладальным тэнзарам. Кожны элемент прасторы $V \otimes W$ ёсць канцая сума раскладальных тэнзараў. Сэнс Т.з. $V \otimes W$ высвятляецца з яго асноўнай уласцівасці: існуе ўзаемна адназначная адпаведнасць паміж мноствам білінейных адлюстраванняў $V \times W$ у адвольную вектарную прастору U (г.зн. такіх адлюстраванняў φ: $V \times W \to U$, $(a,c) \mapsto \varphi(a,c)$, якія лінейныя па кожным аргуменце пры фіксаванні іншага) і мноствам лінейных адлюстраванняў f: $V \otimes W \to U$; білінейнаму адлюстраванню адпавядае лінейнае адлюстраванне f, якое адназначна вызначаецца ўмовай $f(a \otimes c) = \varphi(a,c)$. Калі $(a_1,\ldots,a_n)$ — базіс V і $(c_1,\ldots,c_m)$ — базіс W, то элементы $a_i \otimes c_j$, $i = 1,\ldots,n$, $j = 1,\ldots,m$ ствараюць базіс $V \otimes W$, у прыватнасці $\dim(V \otimes W) = \dim V \cdot \dim W$. Аналагічна Т.з. дзвюх прастораў вызначаецца Т.з. канцага набору $V_1 \otimes \ldots \otimes V_k$. У больш агульным сэнсе паняцце Т.з. уводзіцца таксама для модуляў над кольцамі.

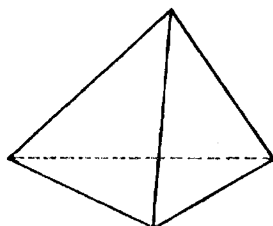
ТЭО́РЫЯ (ад. грэц. theoria — назіранне, даследаванне) — асноўная, найбольш развітая форма арганізацыі навуковых ведаў, якая дае цэласнае ўяўленне пра заканамернасці і істотныя сувязі пэўнага абсягу рэчаіснасці. Т. — нутрана несупярэчлівая сістэма ведаў, якую характарызуюць лагічная залежнасць адных элементаў ад іншых, выводнасць зместу Т. з нейкай сукупнасці сцверджанняў і паняццяў (зыходнага базісу Т.) па пэўных логіка-метадалагічных прынцыпах і правілах. Пры выкарыстанні Т. сфармуляваныя ў ёй веды апасродкуюцца рознымі прамежкавымі звёнамі, канкрэтызавальнымі фактарамі. Т. трэба адрозніваць ад іншых формаў ведаў — гіпотэз, законаў навукі, класіфікацый, тыпалогій, першасных тлумачальных і іншых, якія могуць папярэднічаць Т. і складаць базу яе фармавання.

У структуры Т. вылучаюць: зыходную (эмпірычную) аснову з мноствамі фактаў, зафіксаваных у гэтай галіне ведаў; зыходную тэарэтычную аснову — мноства першасных дапушчэнняў, аксіём, агульных законаў, якія ў сукупнасці апісваюць ідэалізаваны аб'ект Т.; логіку Т. — мноства дапушчальных у рамках Т. правіл лагічнага вывядзення і доказу; сукупнасць атрыманых у Т. сцверджанняў з іх доказамі. Элементамі Т. з'яўляюцца паняцці, іх азначэнні, выказванні і высновы, доказы і інш. Гэтыя элементы выяўляюцца ў моўных і іншых знакавых выразах, якія ў сваю чаргу складаюць у межах Т. сістэму мовы. Т. як сістэма знакаў, моўнага і іншага знакавага тэксту мае прыкметы значэння і сэнсу. Значэнне Т. — сувязь яе элементаў з прадметнай галіной, сэнс — змест паняццяў, меркаванняў і іншых формаў, якія ў яе ўваходзяць.

Зыходным у Т. з'яўляецца яе ідэалізаваны аб'ект — тэарэтычная мадэль істотных сувязяў рэальнасці, якія паказаны з дапамогай пэўных гіпатэтычных дапушчэнняў і ідэалізацыі (гл. *Мадэляў тэорыя*). Напрыклад, у геаметрыі Эўкліда гэта абстракцыя матэматычнага пункта, простай лініі, плоскасці і да т.п., якім нададзены пэўныя ўласцівасці з дапамогай сістэмы аксіём. Дачыненні ідэалізаваных аб'ектаў (як зыходныя, так і выведзеныя) і ёсць тэарэтычныя законы, што фармулююцца не непасрэдна на аснове доследных звестак, а шляхам пэўных дзеянняў з ідэалізаванымі аб'ектамі. Таму законы, сфармуляваныя ў рамках Т., маюць непасрэднае дачыненне да ідэалізаваных аб'ектаў (мадэляў рэчаіснасці) і толькі апасродкаванае, з пэўным набліжаннем — да самой эмпірычнай рэальнасці. Бываюць Т. апісальнага тыпу (гэтак званыя якасныя тэорыі) і матэматызаваныя (гл. *Фармальная сістэма*), якія будуюцца і развіваюцца з дапамогай аксіяматычнага метаду і з выкарыстаннем фармалізаваных моваў. У матэматыцы створаныя Т. пра яе асноватворныя структуры і паняцці (*алгарытмаў тэорыя*, *графаў тэорыя*, *імавернасцяў тэорыя*, *інфармацыі тэорыя*, *лікаў тэорыя*, *мностваў тэорыя*, *функцый тэорыя* і інш.), Т. дастасоўнага прызначэння (*аўтаматаў тэорыя*, *гульняў тэорыя*, *карыснасці тэорыя*, *масавага абслугоўвання тэорыя*, *надзейнасці тэорыя*, *паверхняў тэорыя*, *памернасці тэорыя*, *памылак тэорыя*, *раскладаў тэорыя*, *эргадычная тэорыя* і інш.). Часам назоў Т. утвараецца ад прозвішча яе стваральніка (напрыклад, *Галуа тэорыя*) ці адлюстроўвае характар або ўзровень выкарыстаных метадаў (*аналітычная тэорыя дыферэнцыяльных раўнанняў*, *дэскрыптыўная тэорыя мностваў*, *камбінаторная тэорыя групаў*, *канструктыўная тэорыя функцый*, *элементарная тэорыя* і інш.). Т., аб'ект даследавання якой — нейкая іншая Т., называецца *метатэорыяй*.

ТЭРНА́РНАЯ ФО́РМА — *форма* ад трох зменных.

ТЭТРА́ЭДР (ад грэц. tetra — чатыры + hedra — аснова, паверхня, старана) — адзін з пяці тыпаў правільных мнагаграннікаў. Мае (гл. рыс.) 4 грані



(трохвугольныя), 6 кантаў, 4 вяршыні (у кожнай вяршыні збягаюцца 3 канты). Калі a — даўжыня канта Т., то яго аб'ём $V = a^3\sqrt{2}/12 \approx 0{,}1179a^3$. Т. — правільная трохвугольная піраміда.

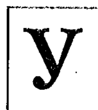
Т'Ю́РЫНГА МАШЫ́НА — адно з удакладненняў інтуіцыйнага ўяўлення пра алгарытм, уведзенае ангельскім матэматыкам А.Т'юрынгам у выглядзе прылады, якая аўтаматычна працуе і мае канцую колькасць нутраных станаў і бясконцую вонкавую памяць — стужку. Сярод гэтых станаў існуюць два вылучаныя — пачатковы і заключны. Стужка надзеленая на роўныя клеткі і бясконцая як направа, так і налева. У кожнай клетцы стужкі можа быць запісаная адвольная літара з пэўнага алфавіта. Лічаць, што ён змяшчае спецыяльны сімвал для вызначэння пустой клеткі.

Т.м. дзейнічае ў дыскрэтныя моманты часу, і ў кожным з іх яна знаходзіцца ў адным са сваіх станаў, разглядаючы толькі адну з клетак стужкі, і счытвае літару, запісаную ў гэтай клетцы, прычым заўсёды стужка змяшчае толькі канцую колькасць літар. Знаходзячыся ў незаключным стане (q_i), Т.м. выконвае крок, які поўнасцю вызначаецца яе гэтым нутраным станам q_i і счытанай літарай (a_j). Гэты крок змяшчае: замену чытанай літары a_j на іншую літару a_s (можа быць і тоесная замена); пераход машыны ў новы стан q_r, які можа супадаць са старым або заключным станам; зрух (α) стужкі на адну клетку направа ці налева або зрух не адбываецца. Выраз $q_ia_j \to a_sdq_r$ называецца к а м а н д а й Т. м., а q_jd_j — левай часткай каманды. Пералік усіх магчымых камандаў Т.м. у залежнасці ад пары "незаключны стан, чытаная літара" называецца п р а г р а м а й Т.м. Звычайна Т.м. атаясамляюць з яе праграмай.

Зменлівае поўнае апісанне Т.м. задаецца яе канфігурацыяй, якая змяшчае для дадзенага моманту наступныя звесткі: канкрэтнае запаўненне клетак стужкі літарамі; клетка машыны, якая знаходзіцца ў полі зроку; нутраны стан, у якім знаходзіцца машына ў гэты момант.

Выкананне крокаў аднаго за адным без пропускаў, пачынаючы з першага, называецца в ы л і ч э н н е м Т.м. Кожнае вылічэнне дадзенай Т.м. поўнасцю вызначаецца яе пачатковай канфігурацыяй, у якой звычайна лічыцца, што машына знаходзіцца ў пачатковым стане і счытвае крайнюю левую непустую літару на стужцы. Вылічэнне можа быць як бясконцым (калі заключны стан не ўзнікае), так і канцым. У апошнім выпадку вынік вылічэння — гэта заключная канфігурацыя. Лічыцца, што для кожнага алгарытму можа быць пабудавана адпаведная Т.м., вынікі вылічэнняў якіх супадаюць. Гэтае нагадненне ў тэорыі алгарытмаў вядомае пад назовам т э з і с а Т'ю р ы н г а. Прыняцце тэзіса Т'юрынга раўназначнае прыняццю *Чорча тэзіса*, які прапануе лічыць паняцце часткова рэкурсіўнай функцыі адэкватным матэматычным удакладненнем інтуіцыйнага паняцця алгарытмічна вылічальнай функцыі.

Існуе шмат мадыфікацый Т.м. Самая распаўсюджаная з іх — м н а г а с т у ж к а в а я Т.м. Гэтыя машыны яшчэ называюць д э т э р м і н а в а н ы м і. Таксама існуюць і н е д э т э р м і н а в а н ы я Т.м., праграма якіх можа змяшчаць некалькі розных камандаў з аднолькавай левай часткай. Вылічэнне такіх машын складаецца з мноства вылічэнняў, узгодненых з іх праграмай. У літаратуры даследуюцца яшчэ імавернасныя і альтэрнавальныя Т.м.



УА́ЙТХЕДА ГРУ́ПА — *абэлева група*, якая адпавядае паводле пэўнага правіла нейкаму асацыятыўнаму кольцу з адзінкай. Няхай A — асацыятыўнае кольца з адзінкай, $GL(n, A)$ — група зваротных $n{\times}n$-матрыц над A. Існуюць кананічныя ўкладанні $GL(1,A) \subset \ldots GL(n,A) \subset \ldots$; няхай

$$GL(A) = \bigcup_{i=1}^{\infty} GL(i, A).$$

Матрыца, адрозная ад адзінкавай дакладна адным недыяганальным элементам, называецца э л е-

м е н т а р н а й. Падгрупа $E(A) \subset GL(A)$, утвораная ўсімі элементарнымі матрыцамі, супадае з камутантам групы $GL(A)$. Таму фактар-група $K_1A = GL(A)/E(A)$ камутатыўная; яна называецца У.г. кольца A.

Фактар-група $SL(A)/E(A)$ называецца с п е ц ы я л ь н а й У.г. і абазначаецца SK_1A. У многіх прыватных выпадках $SK_1A = 0$, напрыклад, калі A — поле, лакальнае або эўклідава кольца, або кольца алгебраічных лікаў, тады $K_1A = A^*$ (мультыплікатыўная група кольца A).

УВАГНУ́ТАЯ ФУ́НКЦЫЯ — функцыя $f(x)$, якая задавальняе наступную ўмову: кожная дуга графіка гэтай функцыі знаходзіцца не вышэй за хорду, якая яе сцягвае. Функцыя $f(x)$, непарыўная на адрэзку $[a, b]$ і двойчы дыферэнцавальная на інтэрвале (a, b), увагнутая, калі і толькі калі $f''(x) \geq 0$ на гэтым адрэзку.

УВАХО́ДНЫ АЛФАВІ́Т — мноства сімвалаў, што ўжываюцца для абазначэння вонкавых уздзеянняў на *аўтамат*. У процілегласць яму *выходны алфавіт* адлюстроўвае рэакцыю аўтамата на вонкавыя ўздзеянні.

УЗАЕ́МНА АДНАЗНА́ЧНАЕ АДЛЮСТРАВА́ННЕ — гл. *Біектыўнае адлюстраванне*.

УЗАЕ́МНА АДНАЗНА́ЧНАЯ АДПАВЕ́ДНАСЦЬ — *адпаведнасць* паміж двума мноствамі A і B, пры якой кожнаму элементу з мноства A ставіцца ў адпаведнасць адзіны элемент з мноства B і кожнаму элементу з мноства B адпавядае дакладна адзін элемент з A. Такім чынам, У.а.а. вызначае пару ўзаемна адваротных адно аднаму біектыўных адлюстраванняў $f: A \to B$ і $g: B \to A$ ($fg = e_A$, $gf = e_B$, дзе e_A, e_B — тоесныя адлюстраванні мностваў A і B адпаведна).

УЗАЕ́МНА ПРО́СТЫЯ ЛІ́КІ — цэлыя лікі, якія не маюць агульных дзельнікаў, акрамя ліку 1. Калі кожны з гэтых лікаў узаемна просты з кожным іншым з іх, то лікі называюць п а р а м і п р о с т ы м і. Напрыклад, 6, 10, 15 ёсць У.п.л., але не парамі простыя.

УЗАЕ́МНАСЦІ ЗАКО́Н — тэарэма, паводле якой для няцотных простых лікаў p і q праўдзіцца роўнасць

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}},$$

дзе $\left(\frac{a}{b}\right)$ — *Лежандра сімвал*, які роўны 1 або −1 у залежнасці ад таго, з'яўляецца a квадратовай рэштай па модулі b ці не. У.з. адкрыў Л.Ойлер (1772), аднак дакладны доказ зрабіў толькі К.Гаўс (1801). У.з. атрымаў значныя абагульненні ў тэорыі алгебраічных лікаў.

УЗВА́ЖАНАЕ СЯРЭ́ДНЯЕ ЗНАЧЭ́ННЕ — азначаецца для n лікаў $a_1, a_2, \ldots, a_n$ з вагамі $p_1, p_2, \ldots, p_n$ (дзе $p_k > 0$, $k = 1, \ldots, n$) як лік

$$a = \frac{p_1a_1 + p_2a_2 + \ldots + p_na_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}.$$

У прыватнасці, калі $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 1$, то a — сярэдняе арыфметычнае лікаў $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Гл. таксама *Сярэдняе значэнне*.

УЗГО́ДНЕНАСЦІ КРЫТЭ́Р — статыстычны крытэр, што ўжываецца ў задачах праверкі ўзгодненасці, сутнасць якой палягае ў наступным. Няхай $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — незалежныя выпадковыя велічыні, якія падпарадкоўваюцца аднаму і таму ж імавернаснаму закону, функцыя размеркавання якога $F(x)$ невядомая. У такім выпадку задача статыстычнай праверкі гіпотэзы H_0, паводле якой $F(x) \equiv F_0(x)$, дзе $F_0(x)$ — пэўная зададзеная функцыя размеркавання, называецца задачай праверкі ўзгодненасці. Напрыклад, калі $F_0(x)$ — непарыўная функцыя размеркавання, то ў якасці У.к. для праверкі H_0 можна выкарыстаць крытэр Калмагорава—Смірнова або крытэр Крамэра—Мізеса.

УКЛАДА́ННЕ — тое, што *ін'ектыўнае адлюстраванне*.

УКЛА́ДЗЕНЫЯ АДРЭ́ЗКІ — паслядоўнасць адрэзкаў лікавай восі, для якой выконваецца $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$. Для сістэмы У.а. перасячэнне $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$ заўсёды непустое і з'яўляецца адрэзкам. У выпадку, калі $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, гэтае перасячэнне змяшчае толькі адзін пункт (п р ы н ц ы п К а н т а р а).

УЛА́СНАЕ ЗНАЧЭ́ННЕ а п е р а т а р а A — гл. *Уласны вектар*.

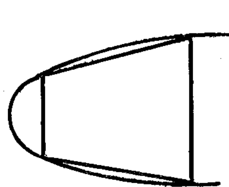
УЛА́СНАЯ ФУ́НКЦЫЯ — *уласны вектар* аператара A, які дзейнічае ў функцыйнай прасторы.

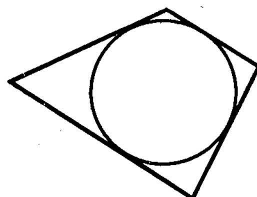
УЛА́СНЫ ВЕ́КТАР а п е р а т а р а A — ненулявы вектар $x \in L$, які аператарам A пераводзіцца ў прапарцыйны вектар, г.зн. $Ax = \lambda x$, $\lambda \in K$. Каэфіцыент λ называецца у л а с н ы м з н а ч э н н е м

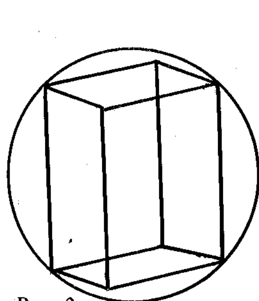
а п е р а т а р а A. У вектарнай прасторы L памернасці n лінейны аператар A мае У.в., калі і толькі калі характарыстычны мнагасклад $\|A-\lambda E\|$ мае карані λ у полі K. Кратнасць уласнага значэння як кораня гэтага мнагаскладу называецца а л г е б р а і ч н а й к р а т н а с ц ю. Мноства L_λ усіх уласных вектараў, якія адпавядаюць уласным значэнням λ, называецца ў л а с н ы м п а д м н о с т в а м аператара A. Разам з нулявым вектарам уласнае падмноства ўтварае ў л а с н у ю п а д п р а с т о р у аператара A. Уласная падпрастора супадае з ядром $\mathrm{Ker}(A-\lambda E)$ (г.зн. з мноствам вектараў, якія аператарам $A-\lambda E$ пераводзяцца ў нулявы вектар). Памернасць уласнай падпрасторы, роўная $n-\mathrm{rang}(A-\lambda E)$, называецца г е а м е т р ы ч н а й к р а т н а с ц ю. Калі алгебраічная кратнасць уласнага значэння λ і геаметрычная кратнасць адпаведнай яму падпрасторы L_λ супадаюць, то ў базісе з уласных вектараў матрыца лінейнага аператара A — дыяганальная, прычым на галоўнай дыяганалі размешчаны ўласныя значэнні λ аператара A. Калі L — тапалагічная прастора і A — непарыўны аператар, то L_λ замкнёная для кожнага λ. Наогул кажучы, уласная падпрастора не абавязкова павінна быць канцамернай, але калі A кампактны, L_λ мае концую памернасць.

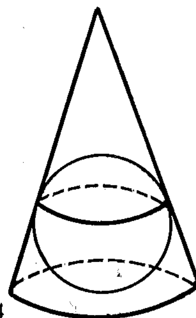
УЛА́СНЫ ЛІК к в а д р а т о в а й м а т р ы ц ы A — корань яе *характарыстычнага мнагаскладу* $\|A-\lambda E\|$.

УМЕ́ЖАНАЯ ФІГУ́РА — фігура, якая мае з нейкай іншай фігурай агульныя пункты і пэўным чынам размяшчаецца ў дачыненні да яе. На рыс. 1 трапецыя ўмежаная ў парабалу, на рыс. 2 акружына ўмежаная ў чатырохвугольнік. Фігура, у якую ўмежаная іншая, называецца а к р э с л е н а й ф і г у р а й. Напрыклад, на рыс. 2 чатырохвугольнік акрэслены вакол акружыны. Паняцці ўмежанасці і акрэсленасці абагульняюцца на прастору. На рыс. 3 паралелепіпед умежаны ў сферу, а на рыс. 4 сфера ўмежаная ў конус.


Рыс. 1


Рыс. 2


Рыс. 3


Рыс. 4

УМО́ЎНАЕ МАТЭМАТЫ́ЧНАЕ СПАДЗЯВА́ННЕ — выраз выгляду

$$\mu(X/A)=\int x dF_x(x/A),$$

дзе $F_x(x/A)$ — умоўная функцыя размеркавання велічыні X у дачыненні да выпадковай падзеі A. У.м.с. азначаецца пры ўмове абсалютнай збежнасці інтэграла.

УМО́ЎНАЕ РАЗМЕРКАВА́ННЕ — выраз

$$F(x/A)=\frac{P(\{X<x\}\cap A)}{P(A)},$$

дзе $F(x/A)$ — умоўная функцыя размеркавання выпадковай велічыні X у дачыненні да падзеі A. Яна вызначаная пры ўмове $P(A)>0$. Калі $F(x/A)$ — абсалютна непарыўнае размеркаванне і $F(x/A)=$ $=\int_{-\infty}^{x} f(t/A)dt$, то $f(x/A)$ называецца ў м о ў н а й ш ч ы л ь н а с ц ю размеркавання велічыні X у дачыненні да падзеі A. Для функцый $F(x/A)$ і $f(x/A)$ характэрныя ўсе ўласцівасці функцый размеркавання і шчыльнасці размеркавання адпаведна.

УМО́ЎНАЯ ДЫСПЕ́РСІЯ — выраз выгляду

$$D(X/A)=\int_{\infty}^{\infty} x^2 dF_x(x/A)-\left(\int_{\infty}^{\infty} x dF_x(x/A)\right)^2,$$

дзе $F_x(x/A)$ — умоўная функцыя размеркавання велічыні X у дачыненні да падзеі A. У.д. азначаецца пры ўмове абсалютнай збежнасці пададзеных інтэгралаў.

УМО́ЎНАЯ ЗБЕ́ЖНАСЦЬ — 1) спецыяльны выпадак *збежнасці* шэрагаў. Лікавы шэраг $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называюць у м о ў н а з б е ж н ы м, калі ён сам збягаецца, а шэраг з модуляў $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ разбягаецца. Прыкладам шэрагу з У.з. з'яўляецца шэраг з агульным складнікам $u_n=\frac{(-1)^n}{n}$.

Уласцівасці: калі шэраг збягаецца ўмоўна, то шэраг з яго дадатных і шэраг з яго адмоўных складнікаў разбягаюцца; у выніку змены чаргавання складнікаў умоўна збежнага шэрагу можна атрымаць шэраг, які збягаецца да адвольнага наперад зададзенага ліку, або разбежны шэраг (тэарэма Рымана); здабытак шэрагаў з У.з. можа стаць разбежным шэрагам. Паняцце У.з. абагульняецца на шэрагі вектараў і бясконцыя здабыткі; 2) У.з. неўласцівых інтэгралаў: інтэграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ называюць умоўна збежным, калі ён збягаецца, а інтэграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ разбягаецца.

УМО́ЎНАЯ ІМАВЕ́РНАСЦЬ — выраз выгляду

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)},$$

дзе $P(B>0)$.

УМО́ЎНЫ ЭКСТРЭ́МУМ — лакальны *экстрэмум* функцыі $u=f(x,y)$ двух вектарных аргументаў $x=(x_1,...,x_n)$, $y=(y_1,...,y_n)$, звязаных раўнаннем сувязі $\varphi(x,y)=0$, дзе $\varphi=(\varphi_1,...,\varphi_m)$ — вектар-функцыя. Інакш кажучы, гаворка ідзе пра лакальныя экстрэмумы функцыі $f:M\to\mathbf{R}$, абсяг вызначэння якой звужаны на мноства $\{(x,y)\in M|\varphi(x,y)=0\}$. Скасаваўшы з раўнанняў сувязі m скалярных аргументаў (напрыклад, зменную $y=(y_1,...,y_m)$), атрымаем $y=y(x)$ і тады задача на У.э. зводзіцца да задачы на звычайны (безумоўны) экстрэмум функцыі $y=f(x,y(x))$ зменнай x. Паколькі яўны выраз для функцыі $y=y(x)$ амаль заўсёды немагчыма знайсці, то для рэалізацыі нададзенай вышэй ідэі выкарыстоўваецца тэорыя *няяўных функцый*. У выніку атрымліваецца, напрыклад, наступная тэарэма. Няхай функцыі f і φ маюць непарыўныя вытворныя ў нейкім наваколлі пункта (x_0,y_0), у якім функцыя f мае лакальны У.э. Калі адрозніваецца ад 0 *якабіян* $\det\varphi'_y(x_0,y_0)$, то існуе вектар $\lambda=(\lambda_1,...,\lambda_n)$ такі, што вытворная функцыі

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\varphi_k(x,y) \qquad (1)$$

роўная нулю ў пункце (x_0,y_0,λ). Гэтая тэарэма дае неабходныя ўмовы У.э. Функцыя $L(x,y,\lambda)$ з (1) называецца функцыяй Лягранжа, лікі $\lambda_1,...,\lambda_n$ — множнікамі Лягранжа. Таму метад, заснаваны на выкарыстанні сфармуляванай тэарэмы, называецца *Лягранжа множнікаў метадам*.

Задачы на У.э. узнікаюць у геаметрыі (напрыклад, пошук прамавугольніка найменшага перыметра, які мае зададзеную плошчу), у механіцы і інш. Многія задачы *варыяцыйнага злічэння* прыводзяць да пошуку экстрэмумаў функцыяналаў пры ўмове, што іншыя функцыяналы маюць зададзеныя значэнні, або да задачы пра пошук экстрэмуму функцыянала ў класе функцый, якія задавальняюць пэўныя раўнанні сувязі, і інш. Развязанне такіх задач таксама праводзіцца метадам множнікаў Лягранжа.

УНАРМАВА́НАЯ А́ЛГЕБРА — *алгебра* над полем рэчаісных або камплексных лікаў. Адначасова з'яўляецца *ўнармаванай прасторай*, множанне ў якой падпарадкоўваецца пэўным умовам непарыўнасці, напрыклад паасобнай непарыўнасці.

УНАРМАВА́НАЯ ПРАСТО́РА — *вектарная прастора X*, надзеленая *нормай* $||x||$, $x\in X$. Норма выклікае на X метрыку і, значыць, тапалогію, што задаецца гэтай метрыкай. Поўная ў дачыненні да адзначанай метрыкі прастора называецца *банахавай прасторай*. У.п. тады і толькі тады ёсць *гільбэртава прастора*, калі $||x+y||+||x-y||=2||x||^2+$ $+2||y||^2$ для $x,y\in X$. Аддзяляльная тапалагічная вектарная прастора нармавальная, калі яе тапалогія супольная з пэўнай нормай. Нармавальнасць эквівалентная існаванню выпуклага абмежаванага наваколля нуля (тэарэма Калмагорава).

УНІВЕРСА́ЛЬНАЕ МНО́СТВА, універсум — мноства, фіксаванае ў рамках дадзенай матэматычнай тэорыі, якое змяшчае ў якасці элементаў усе аб'екты, што разглядаюцца ў гэтай тэорыі. Напрыклад, для элементарнай арыфметыкі гэта мноства ўсіх цэлых лікаў. Паняцце У.м. значнае ў тэорыі мностваў. Аб'ектамі даследавання ў ёй з'яўляюцца мноствы, таму У.м. — сукупнасць усіх мностваў, аднак яно ўжо не ёсць мноства. Пра гэта сведчаць парадоксы, звязаныя з паняццем мноства ўсіх мностваў. Каб пазбегнуць іх, у аксіяматычнай тэорыі мностваў разам з мноствамі разглядаюць класы — аб'екты, якія не могуць быць элементамі іншых мностваў або класаў.

УНІВЕРСА́ЛЬНАЯ А́ЛГЕБРА — *алгебраічная сістэма* з пустым мноствам дачыненняў. У.а. $\langle A,\Omega\rangle$ — гэта непустое мноства, на якім вызначаная нейкая сям'я алгебраічных аперацый Ω. Азначэнні надалгебры, дэкартава здабытку, гомамар-

фізму, эндамарфізму, ізамарфізму, аўтамарфізму для У.а. фактычна паўтараюць падобныя азначэнні для алгебраічных сістэм. З кожнай У.а. A звязаныя суправаджальныя структуры: маноід усіх эндамарфізмаў End A, група ўсіх аўтамарфізмаў Aut A, структура ўсіх падалгебраў Sub A і ўсіх кангруэнцый Con A.

Клас R У.а. называецца м н а г а с т а й н а с ц ю, калі існуе такая сістэма тоеснасцяў Σ, што У.а. належыць да гэтага класа, калі і толькі калі ў ёй правільныя ўсе тоеснасці з Σ. Сукупнасць Σ называюць в ы з н а ч а л ь н а й с у к у п н а с ц ю мнагастайнасці. Клас У.а. ёсць мнагастайнасць, калі і толькі калі ён разам з адвольнымі сваімі алгебрамі мае таксама ўсе іх падалгебры, фактар-алгебры і ўсе магчымыя дэкартавы здабыткі (т э а р э м а Б і р к г а ф а). У.а. F называецца с в а б о д н а й а л г е б р а й класа R, калі яна належыць да гэтага класа і мае свабодную ўтваральную сістэму (або базу) X, г.зн. такое мноства X утваральных, што кожнае адлюстраванне мноства X у адвольную алгебру A з R пашыраецца да гомамарфізму з F у A. Напрыклад, кольца паліномаў з цэлымі каэфіцыентамі ад адной зменнай x ёсць свабодная алгебра ў класе ўсіх кольцаў, прычым яго базай служыць аднаэлементавае мноства $\{x\}$. Свабодная алгебра існуе ў кожнай мнагастайнасці. Свабодная алгебра класа, які складаецца з усіх У.а. дадзенай сігнатуры, называецца а б с а л ю т н а с в а б о д н а й. Яна ізаморфная алгебры ўсіх словаў у разгляданай сігнатуры. Кожная свабодная У.а. класа R з'яўляецца гамаморфным вобразам абсалютна свабоднай.

УНІВЕ́РСУМ — тое, што *універсальнае мноства.*

УНІМАДУЛЯ́РНАЕ ПЕРАЎТВАРЭ́ННЕ — лінейнае пераўтварэнне канцамернай вектарнай прасторы, матрыца якога ёсць *унімадулярная матрыца.*

УНІМАДУЛЯ́РНАЯ ГРУ́ПА с т у п е н і n — група ўсіх *унімадулярных матрыц* парадку n над кольцам K або ізаморфная ёй група ўсіх *унімадулярных пераўтварэнняў* вектарнай прасторы памеру n над кольцам K. Калі K — цела, то У.г. — *спецыяльная лінейная група* над K.

УНІМАДУЛЯ́РНАЯ МА́ТРЫЦА — квадратная *матрыца, вызначнік* якой роўны адзінцы. У пэўных выпадках, калі разглядаюць матрыцы над камутатыўнымі кольцамі, У.м. называюцца а б а р а ч а л ь н ы м і м а т р ы ц а м і.

УНІТА́РНАЕ ПЕРАЎТВАРЭ́ННЕ — лінейнае пераўтварэнне унітарнай прасторы, якое захоўвае скалярны здабытак вектараў, у прыватнасці даўжыню вектара. Уласныя вектары У.п. па модулю роўныя 1. У.п. дадзенай унітарнай прасторы ўтвараюць у дачыненні да здабытку *пераўтварэнняў групу.*

УНІТА́РНАЯ ПРАСТО́РА — вектарная прастора V над полем камплексных лікаў **C**, на якой вызначанае скалярнае множанне, г.зн. кожным вектарам a, $b \in V$ адпавядае камплексны лік (a, b) (скалярны здабытак) і пры гэтым выконваюцца аксіёмы: 1) $(c_1x+c_2y, z) = c_1(x,z)+c_2(y,z)$, $\forall c_i \in \mathbf{C}$, $x, y, z \in V$; 2) $(x, y) = \overline{(y, x)}$; 3) $(x, x) > 0$. З аксіём 1—3 вынікае, што скалярнае множанне ёсць *паўтаралінейная форма.* У.п. не абавязкова канцамерная. Таксама, як і ў эўклідавай прасторы, у У.п. уводзіцца паняцце артаганальнасці і ортаўнармаванага базіса. У кожнай У.п. існуе такі базіс.

УНІФАРМІЗА́ЦЫЯ — выяўленне зададзенай мнагазначнай *адпаведнасці* праз адназначныя функцыі; пераход ад няяўнага задання пэўнай адпаведнасці да параметрычнага задання той жа адпаведнасці. Напрыклад, У. адпаведнасці $z^2+w^2=1$ ёсць

$$\begin{cases} z = \dfrac{2t}{1+t^2}, \\ w = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases} \text{або} \begin{cases} z = \cos t, \\ w = \sin t. \end{cases}$$

Мнагазначную адпаведнасць паміж лікавымі зменнымі z і w звычайна задаюць у выглядзе раўнання $F(z,w)=0$, дзе F — дастаткова "добрая" функцыя.

У праблеме У. адрозніваюць два падыходы: л а к а л ь н ы (знайсці У. у наваколлі дадзенага пункта (x_0, y_0), дзе $F(x_0, y_0)=0$ — развязанне праблемы для ўсякай тэарэмы пра няяўныя функцыі) і г л а б а л ь н ы (патрабуе знаходжання параметрычнага задання $z=\varphi(t)$, $w=\varphi(t)$, для якога выконваецца тоеснасць $F(\varphi(t), \psi(t)) \equiv 0$, прычым пары $(\varphi(t), \psi(t))$ прабягаюць усе магчымыя значэнні зменных z і w, звязаных раўнаннем $F(z,w)=0$). Калі $F(z,w)=0$ — непрыводная аналітычная адпаведнасць паміж камплекснымі зменнымі z і w, то існуе яго глабальная У. мераморфнымі (або нават аўтаморфнымі) функцыямі φ і ψ. Найлепш вывучаны выпадак, калі $F(z,w)=$ $=0$ — непрыводная над **C** алгебраічная адпавед-

насць. У гэтым выпадку развязанне праблемы глабальнай У. цесна звязанае з родам ρ рыманавай паверхні, якая задаецца раўнаннем $F(z,w)=0$. У выпадку $\rho=0$ існуе глабальная У. рацыянальнымі функцыямі, у выпадку $\rho=1$ — эліптычнымі функцыямі, а ў выпадку $\rho>1$ — аўтаморфнымі.

УО́ЛІСА ФО́РМУЛА — формула, якая падае лік $\pi/2$ у выглядзе бясконцага здабытку:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2k}{2k-1}\cdot\frac{2k}{2k+1}.$$

Упершыню сустракаецца ў Дж.Уоліса (1655). У.ф. можна запісаць і ў іншай форме:

$$\sqrt{\pi}=\lim\frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}}.$$

УПАРА́ДКАВАНАЕ МНО́СТВА — мноства, на якім зададзенае *парадку дачыненне* (лінейнае ці частковае, строгае ці нястрогае). Гл. *Лінейна ўпарадкаванае мноства, Часткова ўпарадкаванае мноства.*

УСТО́ЙЛІВАЕ РАЗМЕРКАВА́ННЕ — размеркаванне імавернасцяў з наступнай уласцівасцю: для адвольных сталых $a_1>0$, b_1, $a_2>0$, b_2 праўдзіцца роўнасць $F(a_1x+b_1)*F(a_2x+b_2)=F(ax+b)$ з нейкімі $a>0$ і b, дзе F — функцыя размеркавання У.р., * — знак згорткі. У.р. з'яўляюцца *нармальнае размеркаванне, Кашы размеркаванне.* У.р. — заўсёды бясконца падзельнае размеркаванне.

УСТО́ЙЛІВАСЦЬ — тэрмін, які не мае дакладна вызначанага зместу. Звычайна яму надаюць два значэнні: 1) У. у дачыненні да руху — паводзіны сістэмы на бясконцым адрэзку часу, якія характарызуюцца малым адхіленнем (у пэўным сэнсе) ад нейкага руху; 2) У. у дачыненні да аб'ектаў, залежных ад параметра, — непарыўная залежнасць аб'ектаў ад параметра. Гл. *Устойлівасць па лінейным набліжанні, Устойлівасць паводле Ляпунова, Устойлівасць паводле Пуасона* і інш.

УСТО́ЙЛІВАСЦЬ ВЫЛІЧА́ЛЬНАГА АЛГАРЫ́ТМУ — раўнамерная ў дачыненні да n і m абмежаванасць аператараў Λ_m^n і функцый φ_m^n у сістэме часткова развязальных раўнанняў

$$\Lambda_m^n Y_m^n=\varphi_m^n,\ m=0,1,\ldots,M, \qquad (1)$$

якія апісваюць паслядоўныя этапы вылічальнага алгарытму развязання раўнання $L_n u^n=f^n$. Тут $\varphi_m^n=(L_n)^{-1}$, $f^n=u^n$, г.зн. на M-м этапе алгарытму атрымліваецца канчатковы развязак раўнання.

У.в.а. азначае дастаткова слабы ўплыў памылак акруглення ў працэсе развязання задачы на вынік. Аднак велічыня $\max\limits_m\|\Lambda_m^n\|$ можа расці параўнальна марудна, і адпаведнае ўзмацненне ўплыву вылічальнай хібнасці пры $n\to 0$ бывае практычна дапушчальным (гэтак званая слабая няўстойлівасць). У выпадку ітэрацыйных алгарытмаў, калі Λ_m^n — тоесны аператар, раўнанне (1) набывае выгляд $Y_m^n=\varphi_m^n$, $m=1,2,\ldots$, прычым для збежнага працэсу $\varphi_m^n\to u^n$ пры $m\to\infty$. У гэтым выпадку ўстойлівасць алгарытму разумеецца як абмежаванасць велічыні $\sup\limits_m\|\varphi_m^n\|$ пры $n\to 0$.

УСТО́ЙЛІВАСЦЬ ПА ЛІНЕ́ЙНЫМ НАБЛІ́ЖАННІ $dx/dt=A(t)x$, $x\in\mathbf{R}^n$ — *устойлівасць паводле Ляпунова* (асімптатычная або экспанентавая ўстойлівасць) нулявога развязку $y=0$ узрушанай сістэмы $dy/dt=A(t)y+f(t,y)$, $y\in\mathbf{R}^n$, $t\geq 0$, з адвольнай вектар-функцыяй $f(t,y)$, прыналежнай усяму класу ўзрушэнняў вышэйшага парадку малечыні $m_f>1$ па y або больш вузкаму класу ўзрушэнняў фіксаванага парадку малечыні $m>1$. Атрыманне неабходных і дастатковых умоваў экспанентавай устойлівасці развязку $y=0$ узрушанай сістэмы ў першым выпадку складае частковую задачу Ляпунова, у другім — агульную. Развязанне частковай задачы грунтуецца на адмоўнасці экспанентавага паказніка сістэмы лінейнага набліжання.

УСТО́ЙЛІВАСЦЬ ПА ПЕ́РШЫМ НАБЛІ́ЖАННІ — адзін з асноўных метадаў доказу ўстойлівасці. Адпаведна разглядаюцца таксама няўстойлівасць або ўмоўная ўстойлівасць. Сутнасць у наступным: па першым набліжанні замест даследаванай сістэмы

$$\frac{dx}{df}=f(t,x),\quad t\geq t_0,\ f(t,0)\equiv 0 \qquad (1)$$

уводзіцца ў разгляд сістэма

$$\frac{dx}{dt}=F(t,x),\quad t\geq t_0,\ F(t,0)\equiv 0, \qquad (2)$$

якая называецца сістэмай першага набліжэння. Сістэма (1) разглядаецца тады як адхіленая дадаткам у правую частку сістэмы (2) вектар-функцыя

$$g(t,x)\equiv f(t,x)-F(t,x).$$

Пры пэўных уласцівасцях (2) і дастатковай малечыні вектар-функцыі ($g(\cdot)$) можна прыйсці да высновы наконт устойлівасці (адпаведна *няўстойлівасці* або ўмоўнай устойлівасці) нулявога развязку сістэмы (1). У якасці сістэм (1) разглядаюцца сістэмы выгляду

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x+g(t,x),\ t\ge t_0,\ x\in G,\ g(t,0)\equiv 0,\quad (3)$$

дзе $G\subset \mathbf{R}^n$ — абсяг, у якасці сістэмы (2) бярэцца лінейная сістэма

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x,\ \ t\ge t_0,\ x\in \mathbf{R}^n,\qquad (4)$$

дзе $A(\cdot)$ — $n\times n$-матрыца, $g(t,x)$ — кавалкава-непарыўная пры $t\ge t_0$ і тоесна не роўная нулю функцыя.

УСТО́ЙЛІВАСЦЬ ПАВО́ДЛЕ ЛЯПУНО́ВА — адно з асноўных паняццяў тэорыі дыферэнцыяльных раўнанняў. Няхай $x_0(\cdot)$ — вызначаны на $[t_0,+\infty)$ развязак сістэмы дыферэнцыяльных раўнанняў

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x),\ \ (t,x)\in D_f\subset \mathbf{R}^{1+n},\qquad (1)$$

дзе D_f — абсяг, праекцыя якога на вось Ot змяшчае інтэрвал $[t_0,+\infty)$, $f\in C(d_f;\mathbf{R}^n)$. Паводле азначэння развязак $x_0(\cdot)$ называецца у с т о й л і в ы м у с э н с е Л я п у н о в а, калі для кожнага $\varepsilon>0$ знойдзецца $\delta>0$ такі, што для адвольнага $\bar{x}\in\mathbf{R}^n$, які задавальняе няроўнасць $||x-x_0(t_0)||<\delta$, развязак $x_0(\cdot)$ з пачатковай умовай $x(t_0)=\bar{x}$ сістэмы (1) адзіны, вызначаны для ўсіх $t\ge t_0$ і для кожнага $t\ge t_0$ выконваецца няроўнасць

$$||x(t)-x_0(t)||<\varepsilon.\qquad (2)$$

Калі знойдзецца такі $\delta_0>0$, што для кожнага развязку $x_0(\cdot)$, $[t_0,+\infty)$ сістэмы (1), пачатковае значэнне якога задавальняе няроўнасць $||x(t_0)-x_0(t_0)||<\delta_0$, выконваецца няроўнасць

$$\lim_{t\to\infty}||x(t)-x_0(t)||=0\qquad (3)$$

(адпаведна няроўнасць

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln||x(t)-x_0(t)||<\delta<0,\qquad (4)$$

дзе δ — нейкая сталая, адна і тая ж для ўсіх развязкаў $x(0)$), то развязак $x_0(\cdot)$ называецца а с і м п т а т ы ч н а (адпаведна э к с п а н е н т а в а) устойлівым. У с т о й л і в а с ц ь н а ч а с т ц ы з м е н н ы х — У.п.Л. развязку $x_0(t)$, $[t_0,+\infty)$ сістэмы (1) у дачыненні толькі да часткі назначаных зменных (можна лічыць, што гэта першыя k зменных) $x_1, ..., x_k$. Каб азначыць гэтую ўстойлівасць, дастаткова ў няроўнасці (2), адпаведна ў (3) ці (4) замяніць вектары $x(t)$ і $x_0(t)$ вектарамі, утворанымі з першых k кампанентаў, накінуўшы астатнюю частку азначэння без зменаў. Азначэнні ўстойлівасцяў упершыню разглядаў А.Ляпуноў (1892—93). Існуе шмат абагульненняў У.п.Л.

УСТО́ЙЛІВАСЦЬ ПАВО́ДЛЕ ПУАСО́НА — уласцівасць пункта x дынамічнай сістэмы $f(t,0)$, $t\in k$, вызначанай на тапалагічнай прасторы, быць α і ω-лімітавым пунктам яе траекторыі $f(t,x)$, $t\in\mathbf{R}$. Паняцце У.п.П. упершыню ўжыў А.Пуанкарэ, які даказаў тэарэму пра вяртанне: калі дынамічная сістэма вызначаная ў абмежаваным абсягу $\mathbf{R}^n$ і мера Лебэга — інварыянтная мера гэтай сістэмы, то амаль усе пункты, акрамя пунктаў нейкага мноства першай катэгорыі, маюць У.п.П.

УСТО́ЙЛІВАСЦЬ РО́ЗНАСЦЕВЫХ СХЕ́МАЎ — адно з асноўных паняццяў *рознасцевых схемаў тэорыі*, якое характарызуе непарыўную залежнасць развязку рознасцевай схемы ў дачыненні да ўваходных звестак задачы. У тэорыі У.р.с. вылучаюць у м о ў н а ў с т о й л і в ы я рознасцевыя схемы тыпу яўных схемаў для раўнання цеплаправоднасці, у якіх устойлівасць існуе толькі пры пэўных абмежаваннях на кроКі прасторавай і часавай сетак, і схемы а б с а л ю т н а ў с т о й л і в ы я, у якіх крокі на часе і на прасторавых зменных могуць мяняцца незалежна адзін ад аднаго, не парушаючы ўстойлівасці. Пры даследаванні У.р.с. для нестацыянарных задач асаблівая роля адводзіцца атрыманню рэкурэнтных стасункаў, якія звязваюць нормы хібнасці на суседніх пластах.

УТВАРА́ЛЬНАЯ л і н і я л і н е і с т а й п а в е р х н і — простая, якая пры сваім руху перасякае дадзеную (кіроўную) і ўтварае *лінеістую паверхню.* Напрыклад, простая, што праходзіць праз фіксаваны пункт прасторы O і адзін з пунктаў плоскай крывой, якая не ляжыць у адной плоскасці з пунктам O, утварае конус (гл. *Конус*).

УТВАРА́ЛЬНАЯ ГРАМА́ТЫКА — сукупнасць асноўнага *алфавіта* V, дапаможнага алфавіта W (V і W не перасякаюцца), вылучанага дапаможнага сімвала I, які называецца пачатковым сімвалам, мноства R правілаў вывядзення, кожнае з якіх мае выгляд $\varphi\to\psi$, дзе φ і ψ — с л о в ы ў аб'яднаным алфавіце (мностве асноўных і дапаможных сімвалаў). Усе пералічаныя мноствы канцыя.

УТВАРА́ЛЬНАЯ ФУ́НКЦЫЯ паслядоўнасці $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ — функцыя $S(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^k$, калі шэраг $S(t)$ збягаецца ў якім-небудзь інтэрвале $|t| < t_0$. У.ф. вызначаецца як для лікавых, так і для функцыйных паслядоўнасцяў. Калі, напрыклад, $a_k = bq^k$ (геаметрычная прагрэсія), то У.ф. прымае выгляд

$$S(t) = b\sum_{k=1}^{\infty}(qt)^k = \frac{b}{1-qt}.$$

Пры даволі неістотных абмежаваннях паслядоўнасць адназначна ўяўляецца на сваёй У.ф., што дазваляе вывучаць уласцівасці паслядоўнасцяў. Метад У.ф. шырока выкарыстоўваецца ў тэорыі лікаў, алгебры, тэорыі функцый і асабліва ў тэорыі імавернасцяў.

УТВАРА́ЛЬНЫЯ ЭЛЕМЕ́НТЫ алгебры A — такое падмноства x элементаў алгебры A, што найменшая падалгебра, якая змяшчае x, супадае з A. Алгебра называецца конца ўтваральнай, калі існуе концае мноства x У.э. Калі існуе ўтваральнае мноства x з аднаго элемента, алгебра называецца цыклічнай. Значэнне У.э. у тым, што кожны элемент $a \in A$ можна запісаць у выглядзе пэўнага выразу ад У.э. з дапамогай аперацый, вызначаных у A.

УЯ́ЎНАЯ АДЗІ́НКА — камплексны лік i, які праўдзіць раўнанне $i^2 = -1$.

УЯ́ЎНАЯ ЧА́СТКА камплекснага ліку $z = x + iy$ — множнік y пры *уяўнай адзінцы* i; абазначаецца $\operatorname{Im} z$.

УЯ́ЎНЫ ЛІК — лік выгляду $x + iy$, дзе i — *уяўная адзінка*, x, y — рэчаісныя лікі ($y \neq 0$); *камплексны лік*, які не з'яўляецца рэчаісным. У.л. выгляду iy называецца чыста ўяўным лікам.

ФА́БЭРА МНАГАСКЛА́ДЫ — адна з распаўсюджаных сістэм для раскладання *аналітычных функцый*. З'явілася ў выніку развязання Г.Фабэрам (1903) задачы К.Рунге (1885) — Д.Гільбэрта (1897) — П.Пэнлеве (1898) па абагульненні тэарэмы Б.Тэйлара (1715): з абсягам G камплекснай плоскасці $\mathbf{C}$ звязаць такую сістэму алгебраічных мнагаскладаў, каб кожная функцыя f, аналітычная ў абсягу G, якая задавальняе, магчыма, нейкія дадатковыя ўмовы на мяжы ∂G абсягу G, раскладалася ў шэраг па гэтай сістэме мнагаскладаў, што кампактна (раўнамерна ўнутры) збягаецца ў абсягу G.

Няхай K — злучны кампакт, які не падзяляе камплексную плоскасць $\mathbf{C}$, і няхай функцыя $W = \varphi(z)$ канформава (і адналістава) адлюстроўвае вонкавую частку $\mathbf{C} \setminus K$ кампакта K на вонкавую $\mathbf{C} \setminus \overline{D}$ замкнёнага адзінкавага круга $\overline{D}$ так, што $0 < \lim_{z\to\infty}\frac{\varphi(z)}{z} < +\infty$. Ф.м. n-й ступені $F_n(z)$ называецца мнагаскладавая частка шэрагу Лёрана функцыі $\varphi^n(z)$ у акрузе бясконца аддаленага пункта $z = \infty$. Заўсёды $F_0(z) \equiv 1$. Калі $K = \overline{D}$, то $F_n(z) = z^n$. Калі ж K ёсць адрэзак $[-1; +1]$, то $F_n(z) = 2T_n(z)$, дзе $T_n(z)$ — *Чабышова мнагасклад* 1-га роду.

ФА́ЕРА МЕ́ТАД СУМАВА́ННЯ — *сярэдніх арыфметычных метад сумавання*, які скарыстоўваецца да шэрагаў Фур'е

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx. \qquad (1)$$

Шэраг (1) функцыі $f(x) \in L(-\pi, \pi)$ ёсць сумавальны Ф.м.с. да сумы $S(x)$, калі

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) = S(x),$$

дзе $\sigma_n(x)$ — Фаера сумы:

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1}(S_0(x) + S_1(x) + ... + S_n(x)), \quad (2)$$

$S_k(x)$, $k = \overline{0, n}$, — частковыя сумы шэрагу (1). Ф.м.с. упершыню ўжыты Л.Фаерам.

Калі x — пункт непарыўнасці фнкцыі $f(x)$, то ў гэтым пункце яе шэраг (1) ёсць сумавальны Ф.м.с. да $f(x)$; калі x — пункт разрыву 1-га роду — сумавальны да $\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$. Калі $f(x)$ непарыўная на (a,b), то шэраг (1) сумавальны Ф.м.с. раўнамерна на ўсякім $[a', b'] \subset (a,b)$. Калі $f(x)$ непарыўная ўсюды, то (1) сумавальны раўнамерна да $f(x)$ на $(-\pi, \pi)$ (тэарэма Фаера).

Фаера сумы (2) выражаюцца праз Фаера сінгулярны інтэграл:

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\Phi_n(t)\,dt,$$

дзе функцыя

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{2(n+1)} \frac{\sin^2(n+1)\frac{t}{2}}{\sin^2\frac{t}{2}}$$

называецца ядром Фаера.

ФА́ЗАВАЯ КРЫВА́Я — тое, што *фазавая траекторыя.*

ФА́ЗАВАЯ ПЛО́СКАСЦЬ — плоскасць $\mathbf{R}^2$, якая выкарыстоўваецца для геаметрычнай інтэрпрэтацыі *фазавых траекторый* аўтаномнай сістэмы двух звычайных дыферэнцыяльных раўнанняў 1-га парадку. Напрыклад, рух матэрыяльнага пункта ўздоўж восі x апісваецца сістэмай дыферэнцыяльных раўнанняў $\dot{x}=y$, $\dot{y}=g(x,y)$, $g\in C^1(D)$, $D\subset\mathbf{R}^2$. У кожны момант часу пункт мае пэўную каардынату x і хуткасць $y=\dot{x}$. Такім чынам, яго стан характарызуецца двума лікамі $(x, y=\dot{x})$, г.зн. пунктамі Ф.п. xOy. Пры руху пункта змяняецца x і y, што ўтварае крывую на плоскасці $\mathbf{R}^2$. Кожнаму тыпу руху пункта (становішча раўнавагі, гарманічнае ваганне і г.д.) адпавядае пэўны тып фазавай траекторыі. Становішчы раўнавагі сістэмы вызначаюцца з умовы $y=0$, $g(x,y)=0$. У гэтых пунктах хуткасць фазавага пункта роўная нулю. Мноства ўсіх магчымых фазавых траекторый для адпаведнай сістэмы дыферэнцыяльных раўнанняў стварае фазавы партрэт гэтай сістэмы, які дае магчымасць "убачыць" адразу ўсе тыпы руху, што маюць месца пры розных пачатковых умовах.

ФА́ЗАВАЯ ПРАСТО́РА — мноства з адпаведнай структурай, элементы якога адлюстроўваюць усе магчымыя імгненныя станы фізічнай (у шырокім сэнсе слова) сістэмы або яе матэматычнай мадэлі. Пры стварэнні матэматычнай мадэлі працэсу (з'явы) важна ўдакладніць паняцце "стан працэсу", што дапамагае правільна выбраць фазавыя зменныя і тым самым Ф.п. Працэс можа быць дэтэрмінаваным або мець імавернасны характар (гл. *Імавернасны працэс*).

Няхай які-небудзь працэс апісваецца гладкай аўтаномнай сістэмай — Ф.п. гэтай сістэмы. Пры $n=1$ атрымаем фазавую простую, пры $n=2$ — *фазавую плоскасць.* Напрыклад, рух N матэрыяльных пунктаў у класічнай механіцы апісваецца аўтаномнай сістэмай $3N$ звычайных дыферэнцыяльных раўнанняў 2-га парадку. Стан руху характарызуецца значэннямі каардынат і хуткасцяў усіх пунктаў. Ф.п. такой сістэмы мае памернасць $6N$.

Пры эвалюцыі фізічнай сістэмы *фазавы пункт* рухаецца па нейкай крывой у Ф.п. (*фазавай крывой*). Хуткасць руху фазавага пункта па гэтай крывой вызначаецца каардынатамі пункта; у кожным пункце Ф.п. зададзены вектар фазавай хуткасці. Кожнаму развязку разгляданай сістэмы ў прасторы $R^{n+1}_{t,x}$ адпавядае інтэгральная крывая $x=\varphi(t)$. Пераход да інтэрпрэтацыі ў прасторы R^n_x дае фазавую крывую $x_1=\varphi_1(t),\ldots,x_n=\varphi_n(t)$, дзе t — параметр, і фазавая крывая атрымліваецца з інтэгральнай крывой у выніку праектавання прасторы $R^{n+1}_{t,x}$ на R^n_x паралельна восі t.

Шматлікія задачы прыводзяць да аўтаномных сістэм (вектарных палёў) на n-мерных мнагастайнасцях (кампактных ці не, з асаблівасцямі або без іх).

Калі стан працэсу вызначаецца бясконцым мноствам параметраў (ваганні струн, распаўсюджванне цяпла, рух вадкасці і г.д.), то ў якасці Ф.п. выступае тая або іншая бясконцамерная (звычайна функцыйная) прастора. У *эргадычнай тэорыі* Ф.п. мае сэнс прасторы з мерай. У тэорыі *выпадковых працэсаў* Ф.п. ёсць тая вымерная прастора, у якой прымае значэнні працэс.

ФА́ЗАВАЯ ТРАЕКТО́РЫЯ, фазавая крывая — крывая, якую апісвае *фазавы пункт* у *фазавай прасторы.* Найбольш часта паняцце Ф.т. ужываецца пры даследаванні гладкіх аўтаномных сістэм $\dot{x}=f(x)$, $x\in D\subset\mathbf{R}^n$. У гэтым выпадку развязкам сістэмы адпавядаюць Ф.т., якія належаць да аднаго з трох тыпаў: 1) незамкнёныя гладкія крывыя без самаперасячэнняў; 2) замкнёныя гладкія крывыя (цыклы), 3) пункты (становішчы раўнавагі). Становішчы раўнавагі (асаблівыя пункты адпаведнага вектарнага поля) прыведзенай сістэмы вызначаюцца з роўнасці $f(x)=0$. Пункт x_0 належыць Ф.т., калі і толькі калі $f(x_0)=0$. Ф.т. можна лічыць арыентаванай крывой, кірунак на якой выбіраецца ў адпаведнасці з кірункам руху фазавага пункта пры нарастанні (спаданні) часу. Калі Ф.т., якая адпавядае развязку $x=\varphi(t)$ прыведзенай сістэмы, ёсць замкнёная гладкая крывая, то гэты развязак ω-перыядычны, $\omega>0$ (мае месца і адваротнае сцверджанне).

ФА́ЗАВЫ ПУНКТ — пункт *фазавай прасторы,* якому адпавядае імгненны стан эвалюцыйнай сістэмы. Няхай, напрыклад, эвалюцыя нейкай з'явы апісваецца сістэмай звычайных дыферэнцыяльных раўнанняў

$$\dot{x}=f(x),\ x\in D\subset\mathbf{R}^n,\ f\in C^1(D).$$

Змяненне стану сістэмы з часам інтэрпрэтуецца як рух Ф.п. па нейкай лініі (*фазавай траекторыі*). Хуткасць руху Ф.п. $x = (x_1, ..., x_n)$ увесь час роўная вектару фазавай хуткасці $f(x) = (f_1(x_1, ..., x_n), ...$ $..., f_n(x_1, ..., x_n))$, які адпавядае гэтаму пункту фазавай прасторы. Праз кожны Ф.п. фазавай прасторы праходзіць адзіная фазавая траекторыя. Для неасаблівага пункта x_0 вектарнага поля (x_0 не належыць мноству становішчаў раўнавагі сістэмы) мае месца сцверджанне: у дастаткова малым наваколлі пункта x_0 існуе гладкае пераўтварэнне зменных (дыфеамарфізм), што пераводзіць прыведзеную сістэму ў сістэму выгляду $\dot{y} = 0, ...$ $..., \dot{y}_{n-1} = 0, \dot{y}_n = 1$, для якой фазавыя траекторыі — простыя лініі.

ФА́КТАР-ГРУ́ПА — азначаецца для групы G па нармальнай падгрупе H як група, элементы якой ёсць л е в ы я сумежныя класы групы G па падгрупе H, а аперацыя задаецца формулай $aH \cdot bH = (ab)H$ ($a, b \in G$). З нармальнасці падгрупы H вынікае, што здабытак класаў не залежыць ад выбару прадстаўнікоў a, b у класах і што замест "левыя сумежныя класы" можна казаць проста "сумежныя класы", бо левыя і правыя сумежныя класы аднолькавыя. Адзінкай Ф.-г. будзе клас $eH = H$, адваротным да класа aH — клас $a^{-1}H$. Ф.-г. абазначаецца G / H. Адлюстраванне $\psi: G \to G/H$ такое, што $\psi(g) = gH$ для $g \in G$, з'яўляецца сюр'ектыўным гомамарфізмам груп і называецца к а н а н і ч н ы м або н а т у р а л ь н ы м г о м а м а р ф і з м а м G на Ф.-г. G/H. Калі $\varphi: G \to G_1$ — гомамарфізм групы G на групу G_1, то G_1 — ізаморфная Ф.-г. G/H, дзе H — *ядро гомамарфізму* φ, г.зн. мноства элементаў групы $G\underline{V}$ (тэарэма пра гомамарфізмы). Ф.-г. групы G можна вызначыць зыходзячы з наступнай кангруэнцыі n на G: $anb \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$. Усе кангруэнцыі на групе знаходзяцца ў біектыўнай адпаведнасці з нармальнымі падгрупамі групы, а Ф.-г. па кангруэнцыях супадаюць з Ф.-г. па нармальных падгрупах.

ФА́КТАР-КО́ЛЬЦА — азначаецца для кольца R па двухбаковым ідэале I як *фактар-група* R па падгрупе I, якая ёсць кольца ў дачыненні да аперацыі множання, што вызначаецца паводле формулы $(a+I)*(b+I) = ab+I$. Сюр'ектыўнае адлюстраванне $f: R \to R/I$, дзе $f(x) = x+I$, называецца н а т у р а л ь н ы м г о м а м а р ф і з м а м. Класічны прыклад Ф.-к.: кольца класаў рэштаў па модулі n. Яго элементамі можна лічыць лікі 0, 1, ..., $n-1$. Іх сума і здабытак вызначаюцца як астача ад дзялення звычайных сумаў і здабыткаў на n.

ФА́КТАРНЫ АНА́ЛІЗ — раздзел мнагамернага *статыстычнага аналізу*, які аб'ядноўвае матэматычна-статыстычныя метады паніжэння памернасці даследаванай мнагамернай прыкметы $x = (x_1, x_2, ..., x_p)^T$, г.зн. будавання (на аснове даследавання структуры сувязяў паміж кампанентамі x_i і x_j, дзе $i, j = \overline{1, p}$) такіх мадэляў, якія дазвалялі б аднаўляць (з нейкай выпадковай памылкай прагнозу ε) значэнні p аналізаваных кампанентаў прыкметы x па значна меншай колькасці m, $m << p_1$, гэтак званых агульных, якія непасрэдна не назіраюцца, фактараў $\dot{x} = (f_1, f_2, ..., f_m)^T$. Найбольш просты варыянт мадэлі ў матрычным запісе мае выгляд

$$x = Q\,f + \varepsilon, \qquad (1)$$

дзе $(p \times m)$ — матрыца Q каэфіцыентаў лінейнага пераўтварэння, яна называецца матрыцай агульных нагрузак на даследаваныя зменныя. Пры правядзенні Ф.а. даследніку даводзіцца развязваць наступныя асноўныя задачы: існавання або правамернасці выкарыстання мадэлі тыпу (1); адзінасці (ідэнтыфікацыі) мадэлі тыпу (1); статыстычнага ацэньвання невядомых структурных параметраў мадэлі; матрыцы Q і дыяганальнай каварыяцыйнай матрыцы астачы V_ε; статыстычнай праверкі гіпотэз, звязаных з прыродай мадэлі і са значэннямі яе структурных параметраў; будавання статыстычных ацэнак для назіраных значэнняў агульных фактараў f.

ФАКТАРЫЯ́Л (анг. factorial, ад лац. factor — сумножнік) — здабытак натуральных лікаў ад адзінкі да якога-небудзь зададзенага натуральнага ліку n, г.зн. $1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$. Абазначаецца $n!$. Напрыклад, $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$. Паводле азначэння прымаецца $0! = 1$. Пры вялікіх n Ф. прыблізна вылічаецца на падставе *Стэрлінга формулы*. Ф. роўны колькасці перастаўленняў з n элементаў. Карыстаюцца Ф. у розных формулах, напрыклад у *Тэйлара шэрагу*. Тэрмін Ф. увёў Л.Арбагаст (1800), абазначэнне $n!$ — К.Крамп (1808).

ФАКТАРЫЯ́ЛЬНАЕ КО́ЛЬЦА — абсяг цэласнасці з адназначным раскладам на далей нераскладальныя множнікі. У Ф.к. існуюць найбольшы агульны дзельнік і найменшы агульны кратны кожных двух элементаў. Адвольнае кольца галоўных ідэалаў — фактарыяльнае.

ФАЛЕ́СА ТЭАРЭ́МА, Т а л е с а т э а р э м а — тэарэма, паводле якой паралельныя простыя, якія адсякаюць на адной старане вугла роўныя адрэзкі, адсякаюць роўныя адрэзкі і на другой яго старане. Тэарэму даказаў Фалес Мілецкі ў 6 ст. да н.э.

ФАРМАЛІЗАВА́НАЯ МО́ВА — штучная (у адрозненне ад натуральнай, напрыклад беларускай) мова, якая будуецца па дакладных правілах. Будаванне кожнай Ф.м. пачынаецца з *алфавіта* мовы — сімвалаў (літар), з якіх потым будуць ствараңца ўсе выразы мовы. Затым апісваецца с і н т а к с і с Ф.м. — правілы будавання асэнсаваных выразаў. Ф.м. маюць істотнае значэнне ў матэматычнай логіцы і ў даследаваннях па асновах матэматыкі. Шырокае дастасаванне атрымалі *алгарытмічныя мовы* — Ф.м. для запісу алгарытмаў, якія выконваюцца потым на калькулятарах.

ФАРМАЛІ́ЗМ — адзін з кірункаў у асновах матэматыкі, праграму якога прапанаваў Д.Гільбэрт (1899). Мэта праграмы: доказ несупярэчнасці матэматыкі з дапамогай матэматычных сродкаў. Праграма Гільбэрта прадугледжвала ўдакладненне паняцця доказаў, каб яны самі маглі быць аб'ектамі дакладнай матэматычнай тэорыі — т э о р ы і   д о к а з а ў, ці *метаматэматыкі.* Пры матэматычных даследаваннях Гільбэрт дапускаў толькі гэтак званыя ф і н і т н ы я   м е т а д ы, г.зн. інтуіцыйна пераканаўчыя, якія не змяшчаюць няпэўных элементаў кантаравай тэорыі мностваў, у прыватнасці абстракцыі актуальнай бясконцасці. Спроба ажыццяўлення гэтай праграмы наогул выявіла яе няслушнасць. Як сцвярджае *Гёдэля тэарэма пра няпоўнасць*, у кожнай фармальнай сістэме, што змяшчае арыфметыку, існуе сцверджанне, якое нельга ні даказаць, ні абвергнуць у гэтай тэорыі. Аднак даследаванні ў рамках гэтай праграмы мелі вялікае значэнне для развіцця многіх раздзелаў матэматычнай логікі. Тэрмін Ф. ужываецца таксама як сінонім фармальнай сістэмы і наогул для вызначэння злічэння, якое дазваляе замяніць аперацыі з аб'ектамі на аперацыі з адпаведнымі ім знакамі. У філасофіі матэматыкі Ф. — погляд на прыроду матэматыкі.

ФАРМА́ЛЬНАЯ АРЫФМЕ́ТЫКА — *фармальная сістэма*, прызначаная для фармалізацыі арыфметыкі. Першая аксіяматычная (нефармальная) пабудова Ф.а. была прапанаваная Р.Дэдэкіндам (1901) як "сістэма аксіём Пэана". Фармулюецца наступным чынам. P1) 0 ёсць натуральны лік. P2) Для кожнага натуральнага ліку X існуе іншы натуральны лік X', які называецца (непасрэдна) наступным за X. P3) $0 \neq X'$ для кожнага натуральнага ліку. P4) Калі $x' = y'$, то $x = y$. P5) Калі Q ёсць уласцівасць натуральных лікаў такая, што натуральны лік 0 мае ўласцівасць Q, для кожнага натуральнага ліку X з таго, што для X характэрная ўласцівасць Q, вынікае, што і натуральны лік X' мае ўласцівасць Q. Тады ўласцівасць Q маюць усе натуральныя лікі (прынцып індукцыі). У гэтых аксіёмах знаходзяць адлюстраванне інтуіцыйныя паняцці, напрыклад "уласцівасць", што не дазваляе сістэме быць дакладнай фармалізацыяй. Адзін з найбольш ужывальных варыянтаў Ф.а.: S_1 заснаваны на сістэме аксіём Пэана. Мова Ф.а. мае алфавіт, які змяшчае: логікавыя сімвалы $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\Rightarrow$, $\forall$, $\exists$; сімвалы прадметных зменных X_1, X_2, ...; адзіную прадметную канстанту 0; адзіны прэдыкатны сімвал раўнання =; тры функцыйныя сімвалы + (складанне), $\cdot$ (множанне), $'$ (дадатак адзінак); дапаможныя сімвалы (,) (левая дужка, коска, правая дужка). Функцыйныя літары (пры скарыстанні да прадметных зменных і канстантаў) утвараюць т э р м ы, г.зн. кожная прадметная зменная і прадметная канстанта ёсць тэрм; калі t_1, t_2 — тэрмы, то $t_1 + t_2$, $t_1 \cdot t_2$, t_1' — тэрмы. Натуральныя лікі 1, 2, 3, ... запісваюцца тэрмамі $0'$, $0''$, $0'''$, ... Формула Ф.а. вызначаецца наступным чынам. Элементарная формула Ф.а. будуецца з тэрмаў з дапамогай знака роўнасці = (калі t_1 і t_2 — тэрмы, то $t_1 = t_2$ — формула); калі A і B — формулы, y — прадметная зменная, то $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \Rightarrow B)$, $\neg A$, $\forall A$, $\exists A$ — формулы. Аксіёмы Ф.а.: логікавыя аксіёмы прэдыкатаў злічэння з раўнаннем; уласныя аксіёмы Ф.а.:

S_1) $X_1 = X_2 \Rightarrow (X_1 = X_3 \Rightarrow X_2 = X_3)$;

S_2) $X_1 = X_2 \Rightarrow X_1' = X_2'$;

S_3) $0 \neq (X_1)'$;

S_4) $X_1' = X_2' \Rightarrow X_1 = X_2$;

S_5) $X_1 + 0 = X_1$;

S_6) $X_1 = X_2' = (X_1 = X_2)'$;

S_7) $X_1 \cdot 0 = 0$;

S_8) $X_1 \cdot X_2' = X_1 X_2 + X_1 \cdot 0$;

S_9) $(A(0) \wedge \forall x(A(x) \Rightarrow A(x'))) \Rightarrow \forall x A(x)$,

дзе $A(x)$ — адвольная формула тэорыі S. Аксіёмы S_1—S_8 — канкрэтныя аксіёмы, S_9 — схема аксіём, якая ўтварае бясконцае мноства аксіём. Пры гэтым схема аксіём S_9, якая называецца п р ы н ц ы п а м   м а т э м а т ы ч н а й   і н д у к ц ы і, не адпавядае поўнасцю аксіёме P5 сістэмы аксіём Пэана, паколькі ў ёй мяркуецца $2^{\aleph_0}$ уласцівасцяў натуральных лікаў, схема аксіём S_9 можа мець справу толькі са злічальным мноствам уласцівасцяў, што азначаюцца формуламі тэорыі S. Правіламі вывядзення Ф.а. з'яўляюцца правілы вывядзення прэдыкатаў злічэння. У Ф.а. могуць быць даказаны

практычна ўсе тэарэмы *элементарнай тэорыі лікаў*. Вывучэнне Ф.а. паказала неажыццявімасць прапанаванай Д.Гільбэртам праграмы абгрунтавання матэматыкі. К.Гёдэль даказаў тэарэму пра няпоўнасць арыфметыкі, якая мела вялікі ўплыў на развіццё матэматычнай логікі.

ФАРМА́ЛЬНАЯ МО́ВА — тое, што *алгарытмічная мова*.

ФАРМА́ЛЬНАЯ СІСТЭ́МА — удакладненне паняцця аксіяматычнай тэорыі шляхам выяўлення апошняй у выглядзе з л і ч э н н я. Будаванне Ф.с. у якасці дакладнага аналага дадзенай аксіяматычнай тэорыі звычайна называецца фармалізацыяй гэтай тэорыі. Пачынаецца будаванне Ф.с. L з апісання пэўнай фармалізаванай мовы, г.зн.: 1) задаецца мноства сімвалаў тэорыі L, якое называецца а л ф а в і т а м; канцыя мноствы сімвалаў тэорыі называюцца в ы р а з а м і т э о р ы і L; 2) задаецца мноства правілаў будавання формул (асэнсаваных выразаў) тэорыі L; пры гэтым алфавіт і правіла будавання формул бяруцца з такім разлікам, каб фармалізаваная мова магла служыць для запісу ўсіх сцверджанняў дадзенай аксіяматычнай тэорыі.

Ствараючы фармалізаваную мову, трэба далей вылучыць нейкае мноства формул, якія называюцца а к с і ё м а м і. Звычайна мноства аксіём задаецца спіскам (калі яно канцае) або з дапамогай алгарытму, які для кожнай формулы дазваляе высветліць, ці з'яўляецца яна аксіёмай. У якасці аксіём, як правіла, выбіраюць формулы, якія служаць для запісу аксіём фармалізаванай тэорыі (уласныя, ці нялогікавыя, аксіёмы), да якіх дадаюцца гэтак званыя логікавыя аксіёмы — формулы, што на падставе свайго будавання з'яўляюцца запісамі праўдзівых сцверджанняў, напрыклад формулы выгляду $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$. Задаецца мноства (звычайна канцае) R_1, ..., R_n дачыненняў паміж формуламі, якія называюцца п р а в і л а м і в ы в я д з е н н я і якія павінны як мага паўней адлюстроўваць спосабы логікавых доказаў, што ўжываюцца ў матэматычных разважаннях. Звычайна эфектыўна развязваецца пытанне пра тое, ці знаходзіцца адвольная формула A у дачыненнях R_i з формуламі A_1, ..., A_n (n_i — месцавасць дачынення R_i). A называецца н е п а с р э д н ы м в ы н і к а м ф о р м у л $A_1, ..., A_n$ п а в о д л е п р а в і л а R_i. У матэматычнай логіцы выпрацаваны стандартызаваныя сістэмы логікавых аксіём і правілаў вывядзення, з дапамогай якіх магчыма атрымаць усе лагічныя высновы з дадзеных нялогікавых аксіём (гл. *Прэдыкатаў злічэнне*).

В ы в я д з е н н е м (д о к а з а м) у L называецца канцая паслядоўнасць формул такіх, што кожная формула гэтай паслядоўнасці ёсць або аксіёма, або непасрэдны вынік папярэдніх формул паводле аднаго з правілаў вывядзення. Формула A называецца в ы в о д н а й, д о к а з н а й ці т э а р э м а й тэорыі L, калі існуе вывядзенне, у якім апошняй формулай з'яўляецца A.

Нават у выпадку эфектыўна аксіяматызаванай тэорыі, г.зн. калі існуе эфектыўны спосаб (алгарытм) для высвятлення, ці з'яўляецца формула аксіёмай, паняцце тэарэмы не абавязкова эфектыўнае, паколькі можа і не існаваць эфектыўнага спосабу (алгарытму), які дазваляе распазнаць па дадзенай формуле, ці існуе яе доказ у L. Тэорыя, для якой такі алгарытм існуе, называецца р а з в я з а л ь н а й, у адваротным выпадку — н е р а з в я з а л ь н а й.

Асноўныя праблемы пры будаванні фармальнай тэорыі L — праблемы несупярэчнасці, развязальнасці, незалежнасці аксіём і праблема поўнасці, якая дазваляе распазнаць, ці з'яўляецца тэорыя L адэкватным адлюстраваннем разгляданай матэматычнай тэорыі, г.зн. ці супадае мноства тэарэм тэорыі L з сукупнасцю праўдзівых выказванняў разгляданай матэматычнай тэорыі.

Прыклады Ф.с.: *выказванняў злічэнне*, *прэдыкатаў злічэнне*, *фармальная арыфметыка*. Злічэнне выказванняў ёсць несупярэчлівая, развязальная і поўная тэорыя. Злічэнне прэдыкатаў — несупярэчлівая, неразвязальная, але поўная тэорыя (гл. *Гёдэля тэарэма пра поўнасць*, *Прэдыкатаў злічэнне*). Фармальная арыфметыка — неразвязальная і няпоўная тэорыя (гл. *Гёдэля тэарэма пра няпоўнасць*). Ф.с. — гэта дакладныя матэматычныя аб'екты, даследаванне якіх магчыма весці матэматычнымі метадамі. Фармалізацыя асноўных раздзелаў матэматыкі і доказ іх несупярэчлівасці шляхам аналізу доказаў у Ф.с. былі часткай прапанаванай Д.Гільбэртам праграмы абгрунтавання матэматыкі (гл. *Метаматэматыка*).

ФАРТРА́Н (fortran; ад анг. for(mula) tran(slator) — формульны транслятар) — мова праграмавання, прызначаная для апісання алгарытмаў развязання на камп'ютары навукова-тэхнічных задач. Ф. — адна з найбольш распаўсюджаных моваў праграмавання, яго першая версія распрацавана амерыканскай фірмай IBM яшчэ ў 1956 г. Пазней з'явіліся іншыя варыянты Ф. Запіс праграм на Ф. нагадвае алгебраічны тэкст для разлікаў па формулах (адсюль назоў гэтай мовы). На Ф. складзе-

ны значэнні бібліятэкі праграм, ён выкарыстоўваецца на ўсіх класах вылічальных машын.

ФАРЭ́Я ПАСЛЯДО́ЎНАСЦЬ парадку n ($n \in \mathbf{N}$) — мноства рацыянальных лікаў p/q, у якіх $1 \le q \le n$, $0 \le p < n$ пры ўзаемна простых p і q ($(p, q) = 1$). Выкарыстоўваецца ў *дыяфантавых набліжэннях.*

ФІБАНА́ЧЫ ЛІ́КІ — элементы лікавай паслядоўнасці $u_1, u_2, \ldots$, якія задаюцца пачатковымі значэннямі $u_1 = u_2 = 1$ і рэкурэнтным стасункам $u_{n+1} = u_{n-1} + u_n$. Першыя 14 Ф.л. пададзеныя ў рукапісе Л.Пізанскага (Фібаначы, 1228): 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 36, ...

ФІГУ́РА (ад лац. figura — вонкавы выгляд, вобраз) — тэрмін, які ўжываецца як агульны назоў разнастайных мностваў пунктаў. Звычайна Ф. называюць такія мноствы, якія можна надаць як утвораныя з концага ліку пунктаў, ліній і паверхняў (у прыватнасці, самі пункты, лініі і паверхні).

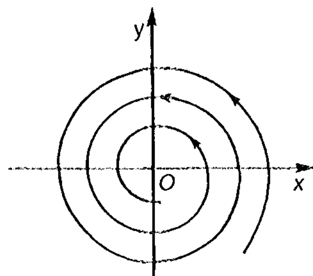
ФІКСАВА́НАЯ КО́СКА — тэрмін, што азначае выяўленне рэчаісных лікаў, паводле якога месца коскі з'яўляецца нязменным і вызначае абсалютную дакладнасць выяўлення. Калі коска знаходзіцца за апошняй справа лічбай ліку, то гэтыя лікі з Ф.к. будуць цэлымі. З прычыны таго, што арыфметыка з Ф.к. мае шэраг недахопаў, у сучасных камп'ютарах пры выкананні вылічэнняў практычна не ўжываецца.

У літаратуры па інфарматыцы і праграмаванні замест тэрміна "коска" выкарыстоўваюць тэрмін "кропка" (выяўленне рэчаісных лікаў з фіксаванай кропкай). Паняццю Ф.к. процілеглае паняцце нефіксаваная коска.

ФІНІ́ТНАЯ ФУ́НКЦЫЯ — функцыя f, вызначаная ў нейкім абсягу G прасторы $\mathbf{R}^n$ і такая, што замыканне мноства пунктаў $x \in G$, для якіх $f(x)$ адрозніваецца ад нуля, абмежаванае і знаходзіцца ад мяжы абсягу G на дадатнай адлегласці.

ФІНІТЫ́ЗМ (ад лац. finitus — вызначаны, закончаны) — метадалагічны погляд, які ідзе ад Д.Гільбэрта, на тое, якія аб'екты і спосабы разважання ў матэматыцы варта лічыць абсалютна надзейнымі.

ФО́КУС (ад лац. focus — ачаг) — 1) Ф. канічнага сечыва — пункт F, які знаходзіцца ў плоскасці *канічнага сечыва* (эліпса, гіпербалы, парабалы) і мае такую ўласцівасць, што для кожнага пункта канічнага сечыва тасунак яго адлегласці r да пункта F і адлегласці d да пэўнай простай (дырэктрысы) нязменны і роўны эксцэнтрысітэту $\varepsilon = r / d$. Гіпербала і эліпс маюць па два Ф., парабала — адзін, у акружыны два Ф. суменчаныя ў адзін. Ф. эліпса і гіпербалы разглядаліся Апалоніем Пергскім (каля 200 г. да н.э.), Ф. парабалы — Папам (3 ст.), сучасны тэрмін увёў Ё.Кеплер (1604), назоў Ф. прапанаваў А.Пуанка-



рэ; 2) Ф. — тып размяшчэння траекторый аўтаномнай сістэмы звычайных дыферэнцыяльных раўнанняў 1-га парадку (гл. рыс.)

$$\dot{x} = P(x, y), \dot{y} = Q(x, y) \qquad (1)$$

у наваколлі асаблівага пункта $A(x_0, y_0)$, дзе P, Q — непарыўныя і маюць месца ўмовы адзінасці развязкаў сістэмы (1) у абсягу G, які змяшчае A. Гэты тып характарызуецца такім чынам. Існуе наваколле $U \subset G$ пункта Aтакое, што ўсе траекторыі, якія пачынаюцца па-за A у U з нарастаннем (спаданнем) часу, не выходзячы з U, імкнуцца пры $t \to +\infty$ ($t \to -\infty$) да асаблівага пункта A і намотваюцца на яго накшталт лагарыфмічных спіраляў. Ф. называецца таксама і сам пункт A.

ФО́КУСНАЯ АДЛЕ́ГЛАСЦЬ — адлегласць паміж *фокусамі* гіпербалы або эліпса.

ФО́РМА (ад лац. forma) — мнагасклад $f(x_1, \ldots, x_n)$ ад n зменных $x_1, \ldots, x_n$, усе складнікі якога маюць адну і тую ж ступень s (пад ступенню складніка $ax_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ разумеюць лік $s = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$). У залежнасці ад s адрозніваюць лінейную Ф. ($s = 1$), квадратовую ($s = 2$), кубічную ($s = 3$) і інш. Напрыклад, кубічная Ф.: $x^3 + 2x^2y + xy^2$. Ф. ужываюцца ў алгебраічнай геаметрыі, дыферэнцыяльных раўнаннях, у іншых галінах матэматыкі і яе дастасаваннях.

ФО́РМУЛА (ад лац. formula — форма, правіла) — камбінацыя *матэматычных знакаў*, якія выяўляюць якую-небудзь прапанову. З дапамогай Ф. складаныя прапановы могуць запісвацца ў кампактнай і зручнай форме. Прыклады Ф. у матэматыцы: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (Ф. квадрата

сумы двух лікаў a і b), $a^2+b^2=c^2$ (матэматычны запіс тэарэмы Піфагора); прыклады Ф. у матэматычнай логіцы: $A\wedge B$, $A\Rightarrow B$, $((A\vee B)\Rightarrow(B\vee C))\Rightarrow(A\Rightarrow C)$.

ФРАБЕ́НІЎСА ТЭАРЭ́МА — тэарэма, згодна з якой усе канцамерныя рэчаісныя *асацыятыўныя алгебры* без дзельнікаў нуля вычэрпваюцца палямі рэчаісных лікаў **R**, камплексных лікаў **C** і целам *кватэрніёнаў*. Даказаная ў 1877 г. Ф.Фрабеніўсам.

ФРЭ́ДГАЛЬМА АПЕРА́ТАР — лінейны інтэгральны аператар выгляду

$$F\varphi(s)=\int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt,$$

дзе $K(s,t)$ — зададзеная функцыя. Інтэгральныя раўнанні з такім аператарам (*Фрэдгальма раўнанні*) і метады іх развязання прапанаваў І.Фрэдгальм (1900—03).

ФРЭ́ДГАЛЬМА РАЎНА́ННЕ — інтэгральнае раўнанне выгляду

$$\int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt=f(s),\ \ a\le x,\ \ s\le b$$

(Ф.р. 1-га роду) ці

$$\varphi(s)-\lambda\int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt=f(s),\ \ s\in[a,b]$$

(Ф.р. 2-га роду), дзе $K(t,s)$ — зададзеная непарыўная функцыя ад s і t (*ядро* раўнання), $f(x)$ — зададзеная функцыя, $\varphi(s)$ — шуканая функцыя, λ — параметр. Названыя ў гонар І.Фрэдгальма, які сістэматычна даследаваў абодва раўнанні (1900—03).

ФРЭНЭ́ ФО́РМУЛЫ — асноўныя формулы тэорыі *крывых* у дыферэнцыяльнай геаметрыі. Ф.ф. задаюць расклад вытворных па натуральным параметры адзінкавых вектараў датычнай $\vec{t}$, галоўнай нармалі $\vec{v}$ і бінармалі $\vec{\beta}$ рухомага рэпера рэгулярнай крывой праз гэтыя ж вектары:

$$\vec{\tau}'=k\vec{v},\ \ \vec{v}'=-k\vec{\tau}-\kappa\vec{\beta},\ \ \vec{\beta}'=\kappa\vec{v},$$

дзе k — крывіня, κ — кручэнне крывой. Атрыманы Ф.Фрэнэ (1847).

ФРЭШЭ́ ВЫТВО́РНАЯ, моцная вытворная — вытворная *функцыянала* ці *адлюстравання*. Ф.в. адлюстравання $f:X\to Y$ (унармаванай прасторы X ва ўнармаваную прастору Y) у пункце x_0 называюць лінейны непарыўны аператар $\Lambda:X\to Y$, які задавальняе ўмову

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\Lambda h+\varepsilon(h),$$

дзе $\lim\limits_{\|h\|\to 0}\|\varepsilon(h)\|/\|h\|=0$. Аператар Λ, вызначаны гэтай умовай, ёсць адзіны. Калі адлюстраванне f мае ў пункце x_0 Ф.в., то яно называецца дыферэнцавальным паводле Фрэшэ. Для Ф.в. праўдзяцца асноўныя тэарэмы дыферэнцыяльнага злічэння, у прыватнасці пра дыферэнцаванне складанай функцыі. Ф.в. найбольш ужывальная разам з *Гато вытворнай*. Дадзенае азначэнне Ф.в. належыць М.Фрэшэ (1911).

ФУНДАМЕНТА́ЛЬНАЯ ПАСЛЯДО́ЎНАСЦЬ, паслядоўнасць Кашы — паслядоўнасць $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ рэчаісных ці камплексных лікаў або пунктаў метрычнай прасторы, якая адпавядае ўмове Кашы: для ўсякага $\varepsilon>0$ існуе такі натуральны лік n_0, што для ўсіх $n>n_0$, $m>n_0$ выконваецца няроўнасць $d(x_n,x_m)<\varepsilon$, дзе $d(x_n,x_m)$ — адлегласць паміж x_n і x_m. Усякая збежная паслядоўнасць з'яўляецца Ф.п., але не наадварот. Прастора, у якой усякая Ф.п. збежная, называецца поўнай. Напрыклад, мноства рэчаісных лікаў мае ўласцівасць поўнасці, а мноства рацыянальных лікаў яе не мае. Паслядоўнасць дзесятковых набліжанняў да $\sqrt{2}$ з'яўляецца Ф.п., аднак яна не мае рацыянальнага ліміту. У Ф.п. x_n могуць быць і элементамі адвольнай унармаванай прасторы, тады замест $d(x_n,x_m)$ бярэцца норма $\|x_n-x_m\|$. Поўная ўнармаваная прастора называецца банахавай.

ФУНДАМЕНТА́ЛЬНАЯ СІСТЭ́МА РАЗВЯ́ЗКАЎ — 1) Ф.с.р. аднароднага лінейнага дыферэнцыяльнага раўнання

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_n(x)y=0 \qquad (1)$$

— сукупнасць $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ лінейна незалежных частковых развязкаў раўнання (1). Крытэрам лінейнай незалежнасці функцый $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ з'яўляецца адрозненне ад нуля (хоць бы ў адным пункце) вызначніка Вроньскага

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix};$$

2) Ф.с.р. сістэмы аднародных лінейных алгебраічных раўнанняў — тое, што *базіс* вектарнай прасторы развязкаў гэтай сістэмы.

ФУНДАМЕНТА́ЛЬНЫ АБСЯ́Г — падмноства U тапалагічнай прасторы X, на якой дзейнічае група Г непарыўных пераўтварэнняў X, такое, што

$$\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\gamma(U)=X,\gamma(U)\cap\delta(U)=\varnothing$$

пры $\gamma\neq\delta$ $(\gamma,\delta\in\Gamma)$. Часам гэтыя патрабаванні наслабляюцца да $\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\gamma(\bar{U})=X$, $\gamma(U^0)\cap\delta(U^0)=\varnothing$ пры $\gamma\neq\delta$ $(\gamma,\delta\in\Gamma)$. Наяўнасць у групе Г пераўтварэнняў прасторы X Ф.а. дазваляе атрымаць інфармацыю пра групу Г і прастору X. Напрыклад, такім чынам даказана конца адназначнасць многіх групаў (у пэўных выпадках знойдзена іх заданне ўтваральнымі і стасункамі). Распрацаваны метады будавання Ф.а. для канкрэтных класаў групаў: арыфметычных групаў, дыскрэтных падгрупаў групаў Лі, якія дзейнічаюць на аднароднай прасторы G/K, дзе K — максімальная кампактная падгрупа групаў руху сіметрычных прастораў (гл. *Дырыхле абсяг*) і г.д.

ФУ́НКЦЫЙ КАМПЛЕ́КСНАЙ ЗМЕ́ННАЙ ТЭО́РЫЯ — у шырокім сэнсе гэта тэорыя функцый, абсяг вызначэння якіх ёсць нейкае падмноства прасторы $\mathbf{C}^n$. У выпадку $n=1$ узнікаюць функцыі адной камплекснай зменнай, у выпадку $n>1$ — функцыі многіх камплексных зменных. Асноўны змест яе складае сістэматычнае вывучэнне ўласцівасці аналітычнасці функцый камплексных зменных.

ФУ́НКЦЫЙ РЭЧАІ́СНАЙ ЗМЕ́ННАЙ ТЭО́РЫЯ — раздзел матэматычнага аналізу, у якім вывучаюцца пытанні выяўлення і набліжання, а таксама лакальныя і глабальныя ўласцівасці функцый, г.зн. адлюстраванняў выгляду $f:A\to\mathbf{R}^m$, $A\subset\mathbf{P}^n$. Для сучаснай Ф.р.з.т. характэрнае шырокае выкарыстанне метадаў тэорыі мностваў разам з класічнымі метадамі. Аб'ект вывучэння Ф.р.з.т. — *функцыя.* У класічным аналізе вывучаліся ў асноўным функцыі, якія маюць пэўную ступень гладкасці. Аднак у 2-й палове 19 ст. выявіўся шэраг праблем, для развязання якіх спатрэбіліся новыя метады. У сувязі з гэтым у канцы 19 ст. узнікла неабходнасць крытычнага перагляду асноваў матэматычнага аналізу, што і было зроблена на базе *мностваў тэорыі.* Гэтым і завяршылася стварэнне сучаснай Ф.р.з.т. Звычайна сучасную Ф.р.з.т. умоўна падзяляюць на тры часткі: дэскрыптыўная тэорыя, метрычная тэорыя, тэорыя набліжанняў.

У дэскрыптыўнай тэорыі вывучаюцца ўласцівасці тых або іншых класаў функцый, якія атрымліваюцца ў выніку лімітавых пераходаў. У працэсе вывучэння выявілася, што паняцце функцыі вельмі складанае. У гэтым кірунку адкрытыя Бэра класы функцый, якія аказаліся цесна звязанымі з класіфікацыяй барэлевых мностваў. У метрычнай тэорыі функцый вывучаюцца ўласцівасці функцый на аснове паняцця *меры* мноства. Сучаснае паняцце меры (*Лебэга мера*) даў А.Лебэг у 1902 г. Тады ж на базе гэтага паняцця ён увёў паняцце інтэграла (*Лебэга інтэграл*). Мера і інтэграл Лебэга — фундамент метрычнай тэорыі функцый, якая займаецца вывучэннем уласцівасцяў функцый, вытворных, інтэгралаў, функцыйных шэрагаў і да т.п. Тэорыя набліжанняў займаецца праблемамі выяўлення адных класаў функцый з дапамогай функцый іншых, больш простых класаў (звычайна мнагаскладаў). У Беларусі ўклад у гэтую тэорыю зрабілі А.Турэцкі, В.Русак і іх вучні.

ФУ́НКЦЫЙ ТЭО́РЫЯ — раздзел матэматыкі, у якім вывучаюцца ўласцівасці *функцый.* Ф.т. звычайна падзяляецца на дзве часткі: *функцый камплекснай зменнай тэорыя* і *функцый рэчаіснай зменнай тэорыя.*

ФУНКЦЫ́ЙНАЕ РАЎНА́ННЕ — раўнанне, у якім невядомым з'яўляецца элемент пэўнай банахавай прасторы, г.зн. раўнанне выгляду $P(x)=y$, дзе $P(x)$ — нейкі нелінейны аператар, які пераводзіць элементы банахавай прасторы X у элементы банахавай прасторы Y. Пад Ф.р. разумеюць таксама раўнанні, у якіх шуканыя функцыі звязаны з вядомымі функцыямі адной або некалькіх зменных з дапамогай аперацыі ўтварэння складанай функцыі.

Адны з найпрасцейшых Ф.р. — раўнанні Кашы $f(x+y)=f(x)+f(y)$; $f(x+y)=f(x)f(y)$; $f(xy)=f(x)f(y)$, непарыўныя развязкі якіх маюць выгляд $f(x)=cx$; e^{cx}; x^c адпаведна. Дакладныя развязкі ў выглядзе аналітычных выразаў атрымліваюцца толькі для пэўных тыпаў Ф.р., таму вялікае значэнне маюць набліжаныя метады развязання: метады бясконцых ступеневых шэрагаў, паслядоўных набліжанняў, найхутчэйшага спуску і г.д. Часта Ф.р. зводзяцца да дыферэнцыяльных раўнанняў і раўнанняў у канцых рознасцях.

ФУНКЦЫ́ЙНАЯ ПАСЛЯДО́ЎНАСЦЬ — азначаецца для пэўнай прасторы F функцый $f:X\to Y$ як адлюстраванне мноства натуральных

лікаў у F. Элементамі Ф.п. называецца пара (n, $f(x)$), дзе $n \in N$, $f \in F$, $x \in X$, якая коратка абазначаецца праз $f_n(x)$. Усю Ф.п. прынята абазначаць ($f_n(x)$) або $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$.

Ужываюцца розныя паняцці збежнасці Ф.п. Асноўнымі з'яўляюцца пунктавая і раўнамерная збежнасці. Ф.п. ($f_n(x)$), дзе $f_n : X \to Y$ і Y — тапалагічная прастора, называецца пунктава збежнай на мностве X, калі існуе концы $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0)$ для кожнага $x_0 \in X$. У выпадку, калі Y — раўнамерная тапалагічная прастора (у прыватнасці, метрычная прастора), Ф.п. называецца раўнамерна збежнай на X да функцыі $f : X \to Y$, калі $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} p(f_n(x) f(x)) = 0$.

ФУНКЦЫЙНЫ ВЫЗНА́ЧНІК — *вызначнік*, элементамі якога з'яўляюцца функцыі. Прыклады: *враньскіян* і *якабіян*. Враньскіян шырока ўжываецца ў тэорыі звычайных лінейных дыферэнцыяльных раўнанняў. Якабіян адыгрывае важную ролю пры вывучэнні дыферэнцыяльных адлюстраванняў эўклідавых прастораў $\mathbf{R}^n$, $n \geq 2$, пры пераўтварэнні кратных інтэгралаў, пры выяўленні незалежнасці сістэмы функцый многіх зменных.

ФУ́НКЦЫЯ (ад лац. functio — выкананне, ажыццяўленне) — адно з асноўных паняццяў матэматыкі, якое апісвае залежнасць адных зменных велічыняў ад іншых. Пры гэтым пад велічынямі разумеюць не толькі рэчаісныя і камплексныя лікі, але і пункты прасторы ці нават элементы адвольнага мноства. Няхай зададзеныя мноствы X і Y элементаў адвольнай прыроды і няхай кожнаму элементу $x \in X$ пастаўлены ў адпаведнасць элемент $y \in Y$, які абазначаюць $y = f(x)$. Тады кажуць, што зададзена функцыя $y = f(x)$ ці адлюстраванне $f : X \to Y$.

Існуе агульнапрынятая тэрміналогія: x — незалежная зменная або аргумент, X — абсяг вызначэння Ф., y — залежная зменная ці Ф. ад аргумента x; Y — абсяг значэнняў Ф. Для функцый $f(x)$ і $g(x)$ натуральным чынам азначаюцца арыфметычныя аперацыі (калі яны маюць сэнс): $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $f(x)/g(x)$.

Тэрмін Ф. ужываюць найчасцей для абазначэння лікавых Ф. ад адной або некалькіх зменных. У іншых выпадках ужываюць тэрміны "адлюстраванне", "пераўтварэнне", "аператар", "функцыянал". Гл.таксама *Непарыўная функцыя, Перыядычная функцыя, Адваротная функцыя, Элементарныя функцыі.*

ФУНКЦЫЯНА́Л — адлюстраванне f адвольнага мноства X у мноства $\mathbf{R}$ рэчаісных ці $\mathbf{C}$ камплексных лікаў. Калі X мае структуру вектарнай прасторы, тапалагічнай вектарнай прасторы або ўпарадкаванага мноства, то ўзнікаюць класы лінейных, непарыўных або манатонных Ф. адпаведна. Спачатку паняцце Ф. азначала зменную велічыню, залежную ад адной ці некалькіх функцый (*варыяцыйнае злічэнне*). З развіццём *функцыянальнага аналізу* тэрмін Ф. стаў ужывацца ў больш шырокім сэнсе.

ФУНКЦЫЯНА́ЛЬНЫ АНА́ЛІЗ — частка сучаснага матэматычнага аналізу, галоўная задача якога —вывучэнне функцый $y = f(x)$, дзе ва ўсякім разе адна са зменных x, y змяняецца ў бясконцамернай прасторы. У самых агульных рысах такое вывучэнне распадаецца на тры часткі: увядзенне і вывучэнне бясконцамерных прастораў; вывучэнне найпрасцейшых функцый, функцыяналаў; вывучэнне адлюстраванняў вызначанага тыпу — аператараў. Найбольш поўна вывучаны лінейныя аператары. Для метадаў Ф.а. характэрнае аб'яднанне падыходаў класічнага аналізу і алгебры, што прыводзіць да вызначэння сувязяў паміж аддаленымі на першы погляд раздзеламі матэматыкі.

Ф.а. як самастойная матэматычная дысцыпліна пачаў складвацца на мяжы 19 і 20 стст. і канчаткова сфармаваўся ў 1932 г. з выхадам у свет кнігі С.Банаха "Тэорыя аперацый". На ўзнікненне Ф.а. значна паўплывала вывучэнне інтэгральных аператараў і звязаных з імі інтэгральных раўнанняў і чыста нутранае развіццё сучаснай матэматыкі з яе жаданнем абагульніць і тым самым усвядоміць сапраўдную прыроду тых ці іншых фактаў. Практычнай асновай для развіцця Ф.а. з'явілася квантавая механіка, бо яе галоўныя паняцці (напрыклад, энергія) апісваюцца лінейнымі аператарамі ў бясконцамерных прасторах.

Найбольш агульнымі прасторамі ў Ф.а. з'яўляюцца *тапалагічныя вектарныя прасторы*. Больш прыватны (але вельмі важны) выпадак тапалагічнай вектарнай прасторы ёсць *унармаваная прастора*. З геаметрычнага гледзішча найпрасцейшымі з'яўляюцца *гільбэртавы прасторы*, уласцівасці якіх больш за ўсё нагадваюць уласцівасці канцамерных прастораў (дзякуючы магчымасці ўвесці праз скалярны здабытак паняцце, аналагічнае вуглу паміж двума вектарамі). Аднак геаметрычныя пытанні рэзка ўскладняюцца пры пераходзе ад гільбэртавых да банахавых і тым больш да агульных тапалагічных вектарных прастораў. У Ф.а. істотнае значэнне мае вывучэнне непарыў-

ных *функцыяналаў* на першапачатковай прасторы *X*. Сукупнасць усіх лінейных непарыўных функцыяналаў на *X* называецца дуальнай прасторай і абазначаецца X'. Паводле *Хана—Банаха тэарэмы*, яно не трывіяльнае і адыгрывае такую ж ролю, як дэкартавы каардынаты ў звычайнай прасторы.

Галоўныя аб'екты вывучэння ў Ф.а. — *аператары* $A:X \to Y$, дзе X, Y — тапалагічныя вектарныя прасторы (часцей за ўсё банахавы або гільбэртавы). Найбольш вывучаны важны (у прыватнасці, для квантавай механікі) клас *самаспалучаных аператараў* у гільбэртавай прасторы. Практычна ўсе ўласцівасці гэтых аператараў можна атрымаць са спектральнай тэарэмы, якая лічыцца цэнтральнай тэарэмай Ф.а. Адначасова з развіццём і паглыбленнем паняцця прасторы ішло развіццё і пашырэнне паняцця функцыі. У выніку прыйшлі да неабходнасці разглядаць адлюстраванні (не абавязкова лінейныя) прастораў. Адна з цэнтральных задач нелінейнага Ф.а. — вывучэнне такіх адлюстраванняў. Для нелінейных адлюстраванняў (у прыватнасці, нелінейных функцыяналаў) можна рознымі спосабамі вызначыць паняцці дыферэнцыяла, вытворнай і г.д., аналагічныя адпаведным паняццям матэматычнага аналізу. Важная задача нелінейнага Ф.а. ёсць задача знаходжання нерухомых пунктаў адлюстравання. Пры вывучэнні нерухомых пунктаў і пунктаў галінавання шырока выкарыстоўваюцца тапалагічныя метады: тэарэмы тыпу Брауэра, індэксы адлюстраванняў, аварот вектарных палёў і г.д.

Ф.а. у цяперашні час — гэта хутчэй аснова, ідэалогія сучаснай непарыўнай матэматыкі, чым яе нейкая частка. Ён знаходзіць дастасаванні ў многіх раздзелах матэматычнай фізікі; у тэорыях квантавай фізікі — спектральная тэорыя аператараў, акрамя таго, пры вывучэнні раўнанняў гідрадынамікі, гібсавых палёў; у квантавай фізіцы — тэорыя рассейвання; у аксіяматычнай тэорыі поля — банахавы алгебры; у квантавай тэорыі поля і статыстычнай фізіцы — тэорыя адхіленняў лінейных аператараў; у канструктыўнай квантавай тэорыі поля і ў квантавай статыстычнай фізіцы — функцыянальнае інтэграванне; у аксіяматычнай тэорыі поля і статыстычнай фізіцы — інтэгральныя пераўтварэнні; у квантавай тэорыі — вектарныя прасторы; усюды ў матэматычнай фізіцы (як важнейшы аналітычны апарат) — абагульненыя функцыі.

Пачаткам сучаснага этапу развіцця Ф.а. у Беларусі можна ўмоўна лічыць заснаванне ў БДУ ў 1959 г. навукова-даследчага семінара па Ф.а. (кіраўнікі М.Брыш, В.Ждановіч, А.Родаў, якія былі вучнямі І.Пятроўскага, І.Гельфанда, А.Мышкіса). З атрыманых потым у Беларусі вынікаў у галіне Ф.а. і яго дастасаванняў значная частка належыць удзельнікам гэтага семінара ці іх паслядоўнікам. Асноўныя з даследаваных кірункаў наступныя: 1) тэорыя выяўленняў групаў. Дадзена яўнае апісанне непрыводных выяўленняў канкрэтных групаў Лі, выражэнне іх матрычных элементаў праз розныя класы спецыяльных функцый (А.Родаў, Е.Ламбіна, В.Рыўкін, Н.Трацякова, А. і Л.Розенблюмы, Л.Яновіч); 2) дыферэнцыяльна-аператарныя раўнанні. Кірунак найбольш шырока распрацаваны. На падставе ўведзенага Я.Радынам аператарнага злічэння, якое дае магчымасць зрабіць "спектральны расклад" шырокага класа несамаспалучаных аператараў, была распрацавана агульная тэорыя існавання і адзінасці дыферэнцыяльна-аператарных раўнанняў у лакальна-выпуклых і банахавых прасторах, а таксама іх якаснай тэорыі. Распрацаваная тэорыя гэтых раўнанняў у шкалах банахавых прастораў. Яна значна абагульняе і паглыбляе тэорыю Аўсяннікава—Нісіды і дае вялікія магчымасці для дастасаванняў (П.Забрэйка, Я.Радына, В.Назараў). Для шырокага класа дыферэнцыяльна-аператарных раўнанняў у гільбертавай прасторы метадам энергетычных няроўнасцяў даказаная тэарэма пра іх карэктнасць (М.Юрчук, Я.Радына, У.Часалін, Ф.Ломаўцаў); 3) аператарныя алгебры. Распрацаваны новы кірунак у тэорыі аператарных алгебраў, арыентаваны на дастасаванне да новых класаў функцыянальна-псеўдадыферэнцыяльных раўнанняў. На падставе гэтага падыходу атрыманыя канкрэтныя вынікі, у тым ліку ўмовы нётэравасці нелакальных межавых задач і формулы індэкса для іх (А.Антаневіч, А.Лебедзеў, М.Белавусаў), пабудаваныя інварыянтныя меры на тапалагічных падгрупах (У.Мухін). У сферы нелінейнага аналізу (тэорыя нерухомых пунктаў, прастораў, вектар-функцый і інтэгральных раўнанняў, а таксама іх дастасаванняў) вылучаюцца работы П.Забрэйкі і яго вучняў. Распрацоўваецца тэорыя інтэградыферэнцыяльных аператараў і адпаведнасцяў (Ю.Ландо, Ю.Быкадораў, Г.Кабак). Вывучаліся спектральныя ўласцівасці агульных аператараў у банахавых прасторах, спектральныя характарыстыкі канкрэтных аператараў (В.Еравенка); 4) абагульненыя функцыі. Распрацаваны новы кірунак у тэорыі алгебраў мнемафункцый (новых абагульненых функцый), прапанаваны агульны

метад будавання такіх алгебраў і дадзены розныя іх дастасаванні да дыферэнцыяльных раўнанняў і статыстычнага аналізу (А.Антаневіч, Я.Радына і іх вучні). Сярод шматлікіх скарыстанняў Ф.а. у дыферэнцыяльных раўнаннях з частковымі вытворнымі і раўнаннях матэматычнай фізікі вылучаюцца працы М.Брыша, В.Ждановіча і Я.Іванова.

ФУР'Е ІНТЭГРАЛ — выяўленне функцыі $f(x)$, вызначанай на ўсёй рэчаіснай восі, у выглядзе

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x)\,d\lambda, \qquad (1)$$

дзе

$$A(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda t dt,\ B(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda t dt.$$

Формула (1) праўдзіцца, напрыклад, для гладкай фінітнай функцыі $f(x)$. У многіх выпадках Ф.і. больш зручна запісваецца ў экспанентавай форме

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} c(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda, \qquad (2)$$

дзе

$$c(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt.$$

Калі $f(x)\in L_1(-\infty, +\infty)$, то функцыя $c(\lambda)$ абмежаваная, раўнамерна непарыўная на восі і $\lim_{|\lambda|\to\infty} c(\lambda) = 0.$ Але $c(\lambda)$ можа быць не інтэгравальнай, і тады Ф.і. не існуе. Каб абгрунтаваць формулу (2) ці (1), на функцыю $f(x)$ трэба накласці дадатковыя абмежаванні. Напрыклад, калі $f(x)$ мае абмежаваную варыяцыю ў наваколлі пункта x, то

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N} F(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda, \quad (3)$$

дзе

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx.$$

Функцыя $F(\lambda)$ называецца **п е р а ў т в а р э н н е м Ф у р'е** функцыі $f(x)$ (гл. *Інтэгральнае пераўтварэнне*). Формула (3) азначае **а д в а р о т н а е п е р а ў т в а р э н н е Ф у р'е**. Калі ў дадатак да прыведзеных абмежаванняў функцыя $f(x)$ цотная і непарыўная ў нулі, то ў формуле (1) $B(\lambda) = 0$; Ф.і. утварае адпаведна прамое і адваротнае *косінус-пераўтварэнне* Фур'е

$$F_c(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(x)\cos\lambda x dx,$$

$$f(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} F_c(\lambda)\cos\lambda x d\lambda.$$

Калі $f(x)$ няцотная і $f(0) = 0$, то ў (2) $A(\lambda) = 0$ і з формулы (1) вынікае пара *сінус-пераўтварэнняў* Фур'е

$$F_s(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(x)\sin\lambda x dx,$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} F_s(\lambda)\sin\lambda x d\lambda.$$

Аналагічна будуецца тэорыя кратных Ф.і., калі разглядаецца расклад функцыі, вызначанай у n-мернай прасторы. Паняцце Ф.і. пашыраецца таксама і на абагульненыя функцыі.

ФУР'Е КАЭФІЦЫЕНТЫ — каэфіцыенты раскладу функцыі $f(x)$, якая мае перыяд $2T$, у шэраг Фур'е:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_0\cos\frac{\pi nx}{T} + b_n\sin\frac{\pi nx}{T}\right).$$

Формулы для Ф.к.

$$a_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\cos\frac{\pi nx}{T}dx,\ n = 1, 2, ...$$

$$b_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\sin\frac{\pi nx}{T}dx,\ n = 1, 2, ...$$

называюцца **ф о р м у л а м і О й л е р а — Ф у р'е**. Непарыўная функцыя $f(x)$ адназначна вызначаецца сваімі Ф.к. Для інтэгравальнай функцыі $f(x)$ яе Ф.к. імкнуцца да нуля пры $n\to\infty$, прычым хуткасць іх спадання залежыць ад дыферэнцыяльных уласцівасцяў функцыі $f(x)$; напрыклад, калі $f(x)$ мае k непарыўных вытворных, то існуе такі лік c, што $|a_n|\le c/n^k$, $|b_n|\le c/n^k$. Ф.к. звязаны з $f(x)$ таксама наступнай роўнасцю:

$$\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}|f(x)|^2dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2)$$

(гл. *Парсэваля роўнасць*). Ф.к. функцыі $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ па адвольнай унармаванай артаганальнай на адрэзку $[a, b]$ сістэме функцый $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_k(x)$, ... роўныя

$$a_k = \int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx.$$

ФУР'Е́ МЕ́ТАД, падзелу зменных метад — метад, у якім развязак дыферэнцыяльнага раўнання з зададзенымі пачатковай аднароднай і краявой умовамі шукаецца як суперпазіцыя развязкаў, што задавальняюць краявыя ўмовы і падаюцца ў выглядзе здабытку функцыі ад прасторавых зменных на функцыю ад часу. Пошук такіх развязкаў звязаны з пошукам уласных функцый і ўласных значэнняў некаторых дыферэнцыяльных аператараў і далейшым раскладаннем функцый пачатковых умоваў па знойдзеных уласных функцыях. У прыватнасці, раскладанне функцыі ў шэрагі і інтэгралы Фур'е звязанае з выкарыстаннем Ф.м. для вывучэння задач пра ваганне струны і пра цеплаправоднасць стрыжня.

Напрыклад, вывучэнне малых ваганняў струны даўжыні l, якая мае замацаваныя канцы, прыводзіць да развязання раўнання

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

пры краявых умовах $u(0,t) = u(l,t) = 0$ і пачатковых умовах $u(x,0) = f(x)$, $u_t'(x,0) = F(x)$; $0 \le x \le l$. Развязкі гэтага раўнання, якія маюць выгляд $X(x)T(t)$ і адпавядаюць краявым умовам, выражаюцца формулай

$$\sin\frac{\pi n x}{l}\left(A_n\cos\frac{a\pi n t}{l} + B_n\sin\frac{a\pi n t}{l}\right).$$

Выбіраючы адпаведным чынам каэфіцыенты A_n і B_n, можна дабіцца таго, што функцыя

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sin\frac{\pi n x}{l}\left(A_n\cos\frac{a\pi n t}{l} + B_n\sin\frac{a\pi n t}{l}\right)$$

будзе развязкам сфармуляванай задачы. Метад, прапанаваны для развязання хвалевага раўнання Ж.Д'Алямбэрам (1749), дастаткова поўна развіў на пачатку 19 ст. Ж.Фур'е і канчаткова сфармуляваў М.Астраградскі (1828).

ФУР'Е́ ПЕРАЎТВАРЭ́ННЕ — аналаг паслядоўнасці каэфіцыентаў Фур'е. Ф.п. функцыі f называецца функцыя

$$g(u) = F[f](u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iut}dt.$$

У некаторых выпадках праўдзіцца формула

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)e^{-iux}du$$

— аналаг шэрагу Фур'е. Апошні інтэграл называецца адваротным Ф.п. функцыі g і абазначаецца $F^{-1}[g]$. Некаторыя аперацыі з функцыямі пераходзяць пры Ф.п. у адпаведныя аперацыі над іх вобразамі. Напрыклад, калі функцыя f ёсць згортка функцый f_1 і f_2, г.зн.

$$f(x) = (f_1 * f_2)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-s)f_2(s)ds,$$

то $F[f] = F[f_1 * f_2] = F[f_1]\cdot F[f_2]$. Ф.п. шырока ўжываецца ў пэўных раздзелах матэматыкі і тэарэтычнай фізікі.

ФУР'Е́ ШЭ́РАГ — азначаецца для функцыі $f(x)$ па ортаўнармаванай на (a,b) з вагой $p(x)$, $p(x) > 0$, сістэме функцый $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ як шэраг $\sum_{k=0}^{\infty} c_k\varphi_k(x)$, каэфіцыенты (гэтак званыя *Фур'е каэфіцыенты*) якога вызначаюцца паводле формулы

$$c_k = \int_a^b f(x)\varphi_k(x)p(x)dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots .$$

Можна разглядаць Ф.ш. па сістэмах артаганальных мнагаскладаў. Ф.ш. па *ортаўнармаваных сістэмах* узніклі як абагульненне трыганаметрычных Ф.ш. (гл. *Трыганаметрычны шэраг*). Далейшае абагульненне вядзе да Ф.ш. у гільбэртавай прасторы.

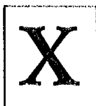
ФЭРМА́ ВЯЛІ́КАЯ ТЭАРЭ́МА — сцверджанне, што для кожнага натуральнага ліку $n > 2$ раўнанне $x^n + y^n = z^n$ не мае развязкаў у натуральных ліках x, y, z. Пры фармулёўцы тэарэмы П.Фэрма дадаў, што ён ведае доказ сваёй гіпотэзы.

Для асобных n доказ атрымалі: пры $n = 4$ — П.Фэрма (1830), $n = 3$ — Л.Ойлер (1770), $n = 5$ — П.Дырыхле і А.Лежандр (1825), $n = 7$ — Г.Лямэ (1839) і г.д. Пры спробе даказаць Ф.в.т. створаныя агульныя метады сучаснай алгебраічнай тэорыі лікаў. Развязаная ў 1995 г. (Э.Уайлс).

ФЭРМА́ МАЛА́Я ТЭАРЭ́МА — тэарэма тэорыі *параўнанняў*. Няхай p — просты лік, a — цэлы лік, які не дзеліцца на p. Тады $a^{p-1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$, г.зн. $a^{p-1} - 1$ дзеліцца на p. Ідэя доказу Ф.м.т. (П.Фэрма, 1640) знайшла шматлікія дастасаванні ў тэорыі лікаў, алгебры.

ФЭРМА́ ТЭАРЭ́МА — неабходная ўмова лакальнага *экстрэмуму* дыферэнцыяльнай функцыі. Няхай рэчаісная функцыя $f(x)$, вызначаная ў наваколлі пункта x_0, дыферэнцавальная ў гэтым пункце, і x_0 з'яўляецца пунктам лакальнага экстрэмуму функцыі $f(x)$. Тады $f'(x_0) = 0$. Геаметрычны сэнс Ф.т.: датычная да графіка функцыі

$y=f(x)$ у пункце $(x_0, f(x_0))$ паралельная восі Ox. У прыватным выпадку, калі $f(x)$ — мнагасклад, тэарэму ўпершыню даказаў П.Ферма (1629).



ХА́НА—БА́НАХА ТЭАРЭ́МА — адна з асноўных тэарэм *функцыянальнага аналізу*. Сцвярджае магчымасць працягу лінейнага функцыянала $f(x)$ (зададзенага на падпрасторы L рэчаіснай ці камплекснай вектарнай прасторы X), які задавальняе для $x \in L$ умову $|f(x)| \le p(x)$, дзе p — паўнорма на X, да лінейнага функцыянала F, вызначанага на X. Пры працягу функцыянала захоўваецца няроўнасць $|F(x)| \le p(x)$ для $x \in X$.

ХАРА́КТАР — функцыя спецыяльнага выгляду ў тэорыі лікаў, алгебры і інш. У тэорыі лікаў Х. называюць камплексназначную ненулявую функцыю $X(n)$, вызначаную для ўсіх цэлых n з уласцівасцямі: 1) $X(nm)=X(n)X(m)$ для адвольных n і m; 2) існуе такі лік k (перыяд), што $X(n+k)=X(n)$ для ўсіх n. Прыклад: $X(n,k)=\left(\frac{n}{k}\right)$, калі n і k узаемна простыя, і $X(n,k)=0$ у процілеглым выпадку ($k>0$ — няцотны натуральны лік, $\left(\frac{n}{k}\right)$ — *Якобі сімвал*). У алгебры Х. азначаецца для адвольнай групы G. Х. — усякая функцыя $X{:}G \to \mathbf{C}$, якая задавальняе ўмовы $X(ab)=X(a)X(b)$, $|X(a)|=1$. Паняцце ўпершыню ўвёў П.Дырыхле (1837) і з яго дапамогай даказаў, што кожная прагрэсія $a+bd$, $(a,d)=1$ змяшчае бясконцае мноства простых лікаў. Тэорыя Х. цесна звязана з праблемамі тэорыі выяўленняў.

ХАРАКТАРЫ́СТЫКА (ад грэч. character — прыкмета, асаблівасць) — 1) цэлая частка *дзесятковага лагарыфма*; 2) Х. дыферэнцыяльнага раўнання — мноства M пунктаў (крывая, паверхня і г.д.) такое, што задача Кашы з пачатковымі ўмовамі на M становіцца нявызначанай; 3) Х. поля. Няхай у полі P выконваецца роўнасць $ne=0$, дзе e — адзінка поля P, 0 — нулявы элемент поля P, n — нейкі цэлы неадмоўны лік, а ne азначае, што элемент e узяты ў якасці складніка n разоў. Калі роўнасць $ne=0$ выконваецца толькі пры $n=0$, то P называецца полем Х. нуль. Прыкладамі палёў Х. нуль з'яўляюцца ўсе лікавыя палі (г.зн. поле $\mathbf{C}$ усіх камплексных лікаў і яго падпалі, напрыклад, $\mathbf{Q}$ і $\mathbf{R}$). Няхай роўнасць $ne=0$ выконваецца для якога-небудзь $n>0$. Тады існуе найменшы дадатны лік p такі, што $pe=0$, і ў гэтым выпадку P называецца полем Х. p. Лік p заўсёды просты. Палі Х. $p \ne 0$ іншым разам называюць палямі канцай характарыстыкі. Прыклады такіх палёў — палі класаў рэштаў цэлых лікаў па модулі p.

ХАРАКТАРЫСТЫ́ЧНАЯ ФУ́НКЦЫЯ — 1) Х. ф. мноства A — функцыя $f_A(x)$, вызначаная на нейкім мностве B, $A \subset B$, якая прымае значэнні $f_a(x)=1$, $x \in A$ і $f_A(x)=0$, $x \notin A$; 2) Х. ф. у тэорыі імавернасцяў — функцыя $\varphi_\xi(t)$ выпадковай велічыні ξ азначаецца як матэматычнае спадзяванне $e^{it\xi}$. Для выпадковых велічыняў, якія маюць шчыльнасць імавернасцяў $p(x)$, Х.ф. мае выгляд

$$\varphi_\xi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}p(x)\,dx.$$

Для нармальнага размеркавання выпадковай велічыні з параметрамі (a,σ^2) мае месца роўнасць $\varphi_\xi(t)=e^{ita-\sigma^2t^2/2}$.

Пры складанні незалежных выпадковых велічыняў іх Х.ф. перамнажаюцца. Калі выпадковыя велічыні "блізкія" ў пэўным сэнсе, то блізкія іх Х.ф. і наадварот. Гэтыя дзве ўласцівасці вызначаюць вялікае значэнне апарату Х.ф. у тэорыі імавернасцяў, асабліва пры доказе лімітавых тэарэм. Блізкі да Х.ф. матэматычны апарат упершыню выкарыстаў П.Лаплас (1812), але ўсю моц Х.ф. паказаў А.Ляпуноў (1901) пры доказе *Ляпунова тэарэмы*. Існуюць і абагульненні Х.ф.

ХАРАКТАРЫСТЫ́ЧНЫ КО́РАНЬ — тое, што *ўласнае значэнне*. Гл. таксама *Характарыстычны мнагасклад*.

ХАРАКТАРЫСТЫ́ЧНЫ МНАГАСКЛА́Д — азначаецца для квадратнай матрыцы $A=\|a_{ij}\|$ парадку n над полем K як мнагасклад

$$P(\lambda)=\det|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=$$

$$=(-\lambda)^n+b_1(-\lambda)^{n-1}+\dots+b_{n-1}(-\lambda)+b_n.$$

Тут каэфіцыенты b_m роўныя суме ўсіх г а л о ў н ы х м і н о р а ў m-га парадку, у прыватнасці, b_1 роўныя с л е д у м а т р ы ц ы A, г.зн. $b_1 = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$, а $b_n = \det A$.

Раўнанне $P(\lambda) = 0$ называюць х а р а к т а р ы с т ы ч н ы м р а ў н а н н е м матрыцы A. Карані Х.м., якія належаць K, называюцца х а р а к т а р ы с т ы ч н ы м і або ў л а с н ы м і з н а ч э н н я м і матрыцы A. Калі K — лікавае поле, то ўжываюцца таксама тэрміны х а р а к т а р ы с т ы ч н ы я л і к і або ў л а с н ы я л і к і. Матрыца A, разгляданая над алгебраічна замкнёным полем (напрыклад, полем камплексных лікаў), мае n уласных значэнняў $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, калі кожны корань лічыць столькі разоў, якая яго кратнасць.

ХА́СЭ ПРЫ́НЦЫП — лакальна-глабальны прынцып у дыяфантавай геаметрыі: кожная мнагастайнасць X нейкага класа M алгебраічных мнагастайнасцяў над глабальным полем K мае рацыянальныя пункты, калі і толькі калі для ўсіх нетрывіяльных абсалютных значэнняў v на K мноства K-рацыянальных пунктаў $X(K_v)$ мнагастайнасці X не пустое. Упершыню сфармуляваў і даказаў Х.Хасэ (1923) для квадрык над лікавым полем. З таго часу даследавана мноства аналагаў Х.п. у геаметрыі, тэорыі алгебраічных групаў, тэорыі функцыянальных палёў і алгебраў над імі.

ХА́ЎСДАРФАВА ПРАСТОРА, а д д з я л я л ь н а я п р а с т о р а — тапалагічная прастора, адвольныя два пункты якой маюць непрасякальныя наваколлі (гл. *Аддзяляльнасці аксіёмы*). Х.п. з'яўляецца кожная метрычная прастора. Х.п. могуць не быць рэгулярнымі і тым болей зусім рэгулярнымі, нават калі яны складаюцца са злічальнага мноства пунктаў або маюць злічальную базу. Упершыню разгледзеў Ф.Хаўсдарф (1914).

ХВА́ЛЕВАЕ РАЎНА́ННЕ — дыферэнцыяльнае раўнанне з частковымі вытворнымі, якое апісвае працэсы ўзбурэнняў у якім-небудзь асяроддзі. У выпадку малых узбурэнняў і аднароднага ізатропнага асяроддзя Х.р. мае выгляд

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

дзе x, y, z — прасторавыя зменныя, t — час, $u = u(x, y, z, t)$ — шуканая функцыя, якая характарызуе ўзбурэнне ў пункце (x, y, z) у момант t, a — хуткасць распаўсюджвання ўзбурэнняў. Х.р. — адно з асноўных у матэматычнай фізіцы і шырока выкарыстоўваецца ў дастасаваннях. Так, малыя ваганні струны апісваюцца аднамерным Х.р.:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

ХІ́БНАСЦЬ — рознасць $(a - a')$, дзе a' — набліжанае значэнне велічыні, дакладнае значэнне якой роўнае a. Велічыня $|a - a'|$ называецца а б с а л ю т н а й Х. Тасунак $\left|\frac{a - a'}{a'}\right|$ называюць н а р а ў н а л ь н а й Х. набліжання a'. Велічыню нараўнальнай Х. часта выражаюць у працэнтах. Велічыні $\varphi(a')$ і $\psi(a')$ такія, што $|a - a'| \le \varphi(a')$, $\left|\frac{a - a'}{a}\right| \le \psi(a')$, таксама называюцца абсалютнай і нараўнальнай Х. аднаведна. Пры лікавым развязанні задач адрозніваюць Х. матэматычнай мадэлі, Х. уваходных звестак, Х. метаду і вылічальную Х., якія абумоўліваюцца набліжаным апісаннем працэсу, недакладным заданнем зыходных звестак, недакладнасцю метаду развязання і памылкамі акруглення. Х. матэматычнай мадэлі і Х. зыходных звестак называюць часам н е с к а с а в а л ь н а й Х.

ХІ-КВАДРА́Т КРЫТЭ́Р — крытэр для праверкі гіпотэзы, паводле якой выпадковы вектар частасцяў $v = (v_1, \ldots, v_k)$ мае зададзенае паліномнае размеркаванне з параметрамі $p_1, \ldots, p_k$, $p_1 + \ldots + p_k = 1$. Х.-к.к. заснаваны на статыстыцы Пірсана

$$\chi_n^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(v_i - np_i)^2}{np_i}, \quad n = v_1 + \ldots + v_k,$$

якая пры $n \to \infty$ мае *хі-квадрат размеркаванне* з $(k-1)$ ступенямі свабоды. Паводле Х.-к.к. з узроўнем значнасці α гіпотэзу H_0 трэба адхіліць, калі $\chi_n^2 \ge \chi_{k-1}^2(\alpha)$, дзе $\chi_{k-1}^2(\alpha)$ — верхняя α-квантыль хі-квадрат размеркавання з $(k-1)$ ступенямі свабоды, г.зн. $P\{\chi_n^2 \ge \chi_{k-1}^2(\alpha)\} = \alpha$.

ХІ-КВАДРА́Т РАЗМЕРКАВА́ННЕ — размеркаванне імавернасцяў, зададзенае шчыльнасцю імавернасцяў

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} e^{-x^2/2} x^{n/2-1}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0, \end{cases}$$

дзе $\Gamma(n/2)$ — гама-функцыя; натуральны параметр n — лік ступеняў свабоды. Х а р а к т а р ы с-

тычная функцыя выражаецца формулай $\varphi(t)=(1-2it)^{-n/2}$, матэматычнае спадзяванне і дысперсія — адпаведна n і $2n$. Няхай $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — незалежныя выпадковыя велічыні, якія маюць стандартнае нармальнае размеркаванне, тады выпадковая велічыня $X=\sum_{k=1}^{n} X_k^2$ мае Х.-к.р. з n ступенямі свабоды, а выпадковая велічыня $\frac{\chi_n^2-n}{\sqrt{2n}}$ — набліжана стандартнае нармальнае размеркаванне.

ХО́РДА (ад грэц. chorde — струна) — прасталінейны адрэзак, які злучае два адвольныя пункты крывой лініі або паверхні.

ЦА́ЛКАМ АБМЕЖАВА́НАЕ МНО́СТВА — мноства A у метрычнай прасторы X, якое мае ўласцівасць: для кожнага $\varepsilon > 0$ існуе концая колькасць пунктаў $x_i \in X$ такіх, што кожны пункт з A знаходзіцца ад аднаго з іх на адлегласці, меншай за ε.

ЦА́ЛКАМ НЕПАРЫ́ЎНЫ АПЕРА́ТАР — лінейны аператар $A: X \to Y$, які кожнае абмежаванае мноства ў X пераводзіць у мноства, што з'яўляецца перадкампактным (X і Y — банахавы прасторы).

ЦА́ЛКАМ ПРЫВО́ДНЫ МОДУЛЬ, паўпросты модуль — модуль M над кольцам R з адзінкай, які раскладаецца ў суму непрыводных падмодуляў. Эквівалентныя азначэнні: модуль M раскладаецца ў прамую суму непрыводных падмодуляў; кожны падмодуль N у M ёсць прамы складнік, г.зн. існуе падмодуль N' такі, што $M = N \oplus N'$. Кожны падмодуль і кожны фактар-модуль цалкам прыводнага модуля — Ц.п.м.

ЦА́ЛКАМ УПАРА́ДКАВАНАЕ МНО́СТВА — *лінейна ўпарадкаванае мноства P*, якое задавальняе ўмову мінімальнасці, г.зн. кожнае непустое падмноства $X \subset P$ мае найменшы элемент (такі элемент $a \in X$, што $a \le x$ для ўсіх $x \in X$). Прыкладам Ц.у.м. служыць натуральным чынам упарадкаванае мноства натуральных лікаў. Але адрэзак рэчаісных лікаў [0, 1] не ёсць Ц.у.м. Кожнае падмноства Ц.у.м. само цалкам упарадкаванае. Дэкартаў здабытак концай колькасці Ц.у.м. цалкам упарадкаваны *лексікаграфічным парадкам*. Беручы ў ліку аксіём тэорыі мностваў *выбару аксіёму*, кожнае непустое мноства можна цалкам упарадкаваць (*Цэрмела тэарэма*).

Два Ц.у.м. A і B называюцца падобнымі або мноствамі, што маюць адзін і той жа парадкавы тып, калі паміж іх элементамі існуе ўзаемна адназначная адпаведнасць, якая захоўвае парадак элементаў (г.зн. для кожных элементў x_1, x_2 мноства A і адпаведных ім элементаў y_1, y_2 мноства B з няроўнасці $x_1 \le x_2$ вынікае $y_1 \le y_2$ і наадварот). Відавочна, што ўсе концыя Ц.у.м., якія маюць аднолькавую колькасць элементаў, падобныя паміж сабою. Таму парадкавыя тыпы такіх мностваў можна атаясамляць з натуральнымі лікамі, якія выступаюць як парадкавыя лікі (аднак, характарызуючы колькасць элементаў мноства, тыя ж натуральныя лікі выступаюць як колькасныя лікі). Парадкавыя тыпы бясконцых Ц.у.м. называюцца *трансфінітнымі лікамі*.

ЦЕ́ЛА — 1) кольца, у якім кожнае з раўнанняў $ax = b$ і $ay = b$ мае адзіны развязак. Камутатыўнае Ц. называецца *полем*. Усякая канцамерная алгебра без дзельнікаў нуля ёсць Ц. Усякае концае асацыятыўнае Ц. з'яўляецца полем. Прыклад некамутатыўнага, але асацыятыўнага Ц. — сукупнасць *кватэрніёнаў*, некамутатыўнага і асацыятыўнага — алгебра Кэлі лікаў. Часам целамі называюць толькі асацыятыўныя Ц., а ў неасацыятыўным выпадку кажуць пра алгебры з дзяленнем; 2) Ц. геаметрычнае — частка прасторы, абмежаваная замкнёнай паверхняй, або, больш агульна, злучная адкрытая падпрастора, замыканне якой кампактнае. Часам Ц. называюць толькі кампактнае мноства, якое мае нутраныя пункты. Прыкладамі з'яўляюцца выпуклыя целы, мнагаграннікі; 3) Ц. комплекса — аб'яднанне клетак, з якіх ён складаецца, г.зн. *паліэдр*, які з'яўляецца геаметрычнай рэалізацыяй гэтага комплекса; 4) Ц. працэдуры — скарочанае параметрызаванае функцыянальнае абазначэнне некаторай часткі *праграмы*; Ц. цыкла — абазначэнне некаторай часткі праграмы, якая выконвацца пэўную колькасць разоў.

ЦЕПЛАПРАВО́ДНАСЦІ РАЎНА́ННЕ — аднароднае дыферэнцыяльнае раўнанне парабалічнага тыпу з частковымі вытворнымі

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 0.$$

Працэс распаўсюджвання цяпла ў цвёрдым целе апісваецца Ц.р., калі $n = 3$.

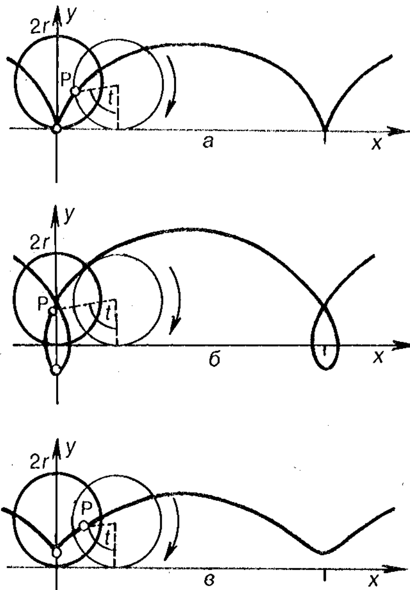
ЦО́ТНАЯ ПАДСТАНО́ВА — падстанова, якая раскладаецца ў здабытак цотнага ліку *транспазіцый*.

ЦО́ТНАЯ ФУ́НКЦЫЯ — функцыя $f(x)$, якая задавальняе ўмовы $f(-x) = f(x)$ для ўсіх x з абсягу вызначэння гэтай функцыі, г.зн. не мяняе свайго значэння пры змене знака аргумента. Абсяг вызначэння Ц.ф. сіметрычны ў дачыненні да пункта $x = 0$. Прыклады Ц.ф. — x^2, $\cos x$, $\ln|x|$. Графік Ц.ф. мае воссю сіметрыі вось ардынат. Сума, рознасць, здабытак і дзель цотных функцый ёсць Ц.ф.

ЦО́ТНЫ ЛІК — цэлы лік, які дзеліцца на 2 без астачы. Кожны Ц.л. можна падаць у выглядзе $2m$, дзе m — цэлы лік.

ЦЫКЛІ́ЧНАЯ ГРУ́ПА — група, кожны элемент якой ёсць ступень аднаго і таго ж з яе элементаў. Гэты элемент называецца п е р ш а і с н ы м, і яго парадак аднолькавы з парадкам групы. Прыклад канцай Ц.г. з n элементаў — сукупнасць усіх камплексных каранёў ступені n з адзінкі. Група цэлых лікаў на складанні дае прыклад бясконцай Ц.г. Кожная падгрупа і кожная фактар-група Ц.г. таксама ёсць Ц.г.

ЦЫКЛО́ІДА (ад грэц. kykloeides — акружынападобны) — траекторыя пэўнага пункта P акружыны, якая коціцца без слізгання па простай. Параметрычнае раўнанне Ц.:

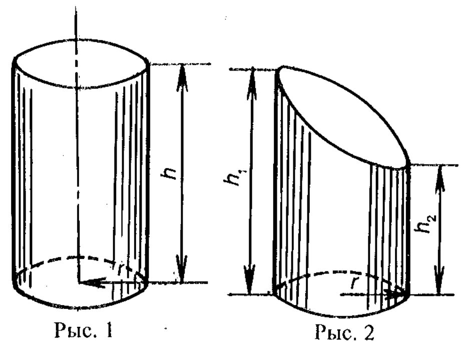


$$x = r\left(t - \frac{m}{r}\sin t\right), \quad y = r\left(1 - \frac{m}{r}\cos t\right),$$

дзе r — радыус акружыны, m — адлегласць ад пункта P да цэнтра акружыны, t — вугал павароту акружыны. Звычайную Ц. ($m = r$) гл. на рыс., *а*. Калі $m > r$ ці $m < r$, Ц. адпаведна называецца п а д о ў ж а н а й (рыс., *б*) або п а к а р о ч а н а й (рыс., *в*). Ц. шырока дастасоўваецца ў механіцы, тэорыі машын і механізмаў і інш.

ЦЫЛІ́НДР (ад грэц. kýlindros — валік, каток), ц ы л і н д р ы ч н а я п а в е р х н я — 1) мноства ўсіх простых (у т в а р а л ь н ы х) прасторы, паралельных зададзенаму кірунку, якія перасякаюць некаторую лінію (к і р о ў н у ю); 2) Ц. у э л е м е н т а р н а й г е а м е т р ы і — цела, абмежаванае замкнёнай цыліндрычнай паверхняй і дзвюма сечнымі яе паралельнымі плоскасцямі — асновамі Ц.

Калі асновы перпендыкулярныя да ўтваральнай, то Ц. называецца п р а м ы м; у прыватнасці,



Рыс. 1 Рыс. 2

калі асновы ўяўляюць сабою кругі, то Ц. называецца п р а м ы м к р у г а в ы м або проста ц ы л і н д р а м (рыс. 1). Аб'ём такога Ц. роўны $V = \pi r^2 h$, бакавая паверхня $S = 2\pi rh$ (дзе r — радыус асновы, h — вышыня). Частка цыліндра, ссечанага плоскасцю, непаралельнай аснове, называецца с с е ч а н ы м ц ы л і н д р а м (рыс. 2). Аб'ём кругавога ссечанага Ц. роўны

$$V = \pi r^2 \cdot \frac{h_1 + h_2}{2},$$

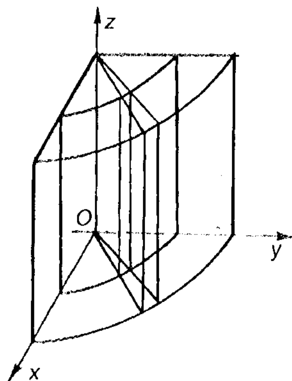
h_1 і h_2 — найбольшы і найменшы адрэзкі кіроўнай Ц.

ЦЫЛІНДРЫ́ЧНАЯ ПАВЕ́РХНЯ — тое, што *цыліндр*.

ЦЫЛІНДРЫ́ЧНЫЯ КААРДЫНА́ТЫ — лікі ρ, φ, z, звязаныя з прамавугольнымі каардынатамі формуламі:

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ z = z,$$

дзе $0 \le \rho < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $-\infty < z < +\infty$. Каардынатныя паверхні (гл. рыс.): кругавыя цыліндры



($\rho = \text{const}$), паўплоскасці ($\varphi = \text{const}$), плоскасці ($z = \text{const}$). Каэфіцыенты Ламэ: $L_\rho = L_z = 1$, $L_\varphi = \rho$. Элемент плошчы:

$$ds = \sqrt{\rho^2 (d\rho d\varphi)^2 + (d\rho dz)^2 + \rho^2 (d\varphi dz)^2};$$

элемент аб'ёму: $dV = \rho d\rho d\varphi dz$; аператар Лапласа:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

А б а г у л ь н е н ы я Ц.к. — лікі u, v, w, звязаныя з прамавугольнымі каардынатамі x, y, z формуламі:

$$x = au\cos v,\ y = bu\sin v,\ z = cw;$$

$$0 \le u < \infty,\ 0 \le v < 2\pi,\ -\infty < w < +\infty,$$

$$a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ a \ne b.$$

Каардынатныя паверхні: эліптычныя цыліндры ($u = \text{const}$), паўплоскасці ($v = \text{const}$), плоскасці ($w = \text{const}$). Назоў Ц.к. прапанаваў Р.Бальтцэр (1882).

ЦЫЛІНДРЫ́ЧНЫЯ ФУ́НКЦЫІ, Б э с э л я ф у н к ц ы і — спецыяльныя функцыі, да якіх прыводзяць шматлікія краявыя задачы матэматычнай фізікі, звязаныя з пытаннямі раўнавагі (пругкай, цеплавой, электрычнай) і ваганняў целаў цыліндрычнай формы. Ц.ф. з'яўляюцца развязкамі дыферэнцыяльнага раўнання Бэсэля

$$z^2 y'' + zy' + (z^2 - v^2)\,y = 0, \tag{1}$$

дзе v — адвольны (у тым ліку камплексны) параметр, z — незалежная зменная. Развязкі ў выглядзе

$$J_v(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(z/2)^{v+2k}}{k!\Gamma(1+v+k)},$$

дзе $\Gamma(x)$ — гама-функцыя, вызначаюць Ц.ф. п е р ш а г а р о д у з індэксам v. У выпадку $v = n$ (цэлы індэкс) $J_v(z)$ вызначана ўсюды на камплекснай плоскасці, калі $v \ne n$ — на плоскасці з разрэзам $(-\infty, 0)$; у прыватнасці, $J_v(x)$ вызначана для ўсіх $x \in (0, +\infty)$. Ц.ф. з нулявым індэксам мае выгляд

$$J_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(z/2)^{2k}}{(k!)^2}.$$

Для $v = -n$ (цэлы адмоўны індэкс)

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z). \tag{2}$$

У выпадку $v = n + 1/2$ Ц.ф. $J_v(z)$ зводзяцца да элементарных функцый, напрыклад,

$$J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z,\ J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z.$$

Функцыі $J_v(z)$ называюцца таксама ф у н к ц ы я м і Б э с э л я. Ф.Бэсэль першы пачаў сістэматычнае даследаванне Ц.ф. першага роду, але яшчэ раней некаторыя з іх вывучалі Д.Бэрнулі, Л.Ойлер, Ж.Лягранж. Для $v \ne -n$ агульны развязак раўнання (1) мае выгляд

$$y = c_1 J_v(z) + c_2 J_{-v}(z), \tag{3}$$

дзе c_1, c_2 — адвольныя канстанты. Калі ж $v = n$, то, паводле (2), J_v і J_{-v} лінейна залежныя і (3) не ёсць агульны развязак раўнання (1). Таму ўводзяцца таксама Ц.ф. д р у г о г а р о д у

$$Y_v(z) \doteq \lim_{\mu \to v} \frac{J_\mu \cos\mu\pi - J_{-\mu}}{\sin\mu\pi},$$

якія называюцца ф у н к ц ы я м і В э б е р а або ф у н к ц ы я м і Н о й м а н а. Пры дапамозе гэтых функцый агульны развязак раўнання (1) для кожнага v запісваецца ў форме

$$y = c_1 J_v(z) + c_2 Y_\mu(z).$$

ЦЫРКУЛЯ́ЦЫЯ — азначаецца для вектарнага поля $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ уздоўж крывой γ як інтэграл выгляду $\int_{(\gamma)} \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r}$. Крывая γ звычайна мяркуецца замкнёнай. Калі $\boldsymbol{r}$ — датычны вектар да крывой γ (у кірунку яе арыентацыі), a_τ — праекцыя вектара $\boldsymbol{a}$ на датычную, то Ц. магчыма падаць у выглядзе

$$\int_{(\gamma)}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{r})\,ds \text{ ці } \int_{(\gamma)}a_{\tau}ds.$$

У каардынатнай форме Ц. роўная

$$\int_{(\gamma)}Pdx+Qdy+Rdz,$$

дзе $\boldsymbol{a}=(P,Q,R)$. Ц. можна выявіць і наверхневым інтэгралам ад ротара вектарнага поля (гл. *Стокса формула*).

ЦЭЛАЛІ́КАВАЕ ПРАГРАМАВА́ННЕ — раздзел *дыскрэтнага праграмавання*, у якім дапушчальнымі развязкамі з'яўляюцца цэлыя лікі або вектары з цэлымі каардынатамі.

ЦЭЛАЛІ́КАВАЯ ЗАДА́ЧА лінейнага праграмавання — задача, якую можна запісаць у выглядзе: максімізаваць суму $\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$ пры ўмове $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le b_i$, $i=1,\ldots,m$; $x_j\ge 0$, $j=1,\ldots,n$, x_j — цэлыя лікі. Найбольш пашыраныя метады развязання Ц.з. — метад адсячэння, метад галінаў і межаў, эўрыстычныя і набліжаныя метады.

ЦЭЛАЛІ́КАВЫ МНАГАГРА́ННІК — выпуклае мнагагранневае мноства канцамернай лінейнай прасторы, крайнія пункты (вяршыні) якога маюць толькі цэлалікавыя каардынаты. Калі сістэма лінейных няроўнасцяў вызначае Ц.м., то антымальны развязак адпаведнай задачы цэлалікавага лінейнага праграмавання можна атрымаць *сімплекс-метадам*.

ЦЭ́ЛАЯ І ДРО́БАВАЯ ЧА́СТКІ ЛІ́КУ — складнікі $[x]$ і $\{x\}$ у спецыяльным выяўленні рэчаіснага ліку $x=[x]+\{x\}$. Цэлая частка $[x]$ ліку x — найбольшы цэлы лік, які не пераўвышае x, напрыклад, $[5,6]=5$, $[-3,2]=-4$. Функцыя $[x]$ называецца таксама *анцье* x. Абазначэнне $[x]$ увёў К.Гаўс (1808), іншае абазначэнне $E(x)$ — А.Лежандр (1798). Дробавая частка $\{x\}$ ліку x — рознасць $x-[x]$; заўсёды $0\le\{x\}<1$; функцыя $\{x\}$ — перыядычная функцыя з перыядам, роўным адзінцы.

ЦЭ́ЛАЯ РАЦЫЯНА́ЛЬНАЯ ФУ́НКЦЫЯ — тое, што *мнагасклад;* функцыя выгляду

$$f(z)=P_n(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n,$$

дзе n — неадмоўны цэлы лік, каэфіцыенты $a_0,\ldots$ $\ldots,a_n$ — рэчаісныя або камплексныя лікі, z — рэчаісная або камплексная зменная.

ЦЭ́ЛАЯ ФУ́НКЦЫЯ — функцыя камплекснай зменнай, аналітычная ва ўсёй камплекснай плоскасці **C**; вызначаецца як сума збежнага ва ўсёй камплекснай плоскасці ступеневага шэрагу. Адзіную ізаляваную асаблівасць Ц.ф. $f(z)$ мае толькі ў бясконца аддаленым пункце. Калі гэта скасавальны асаблівы пункт, то $f(z)=\text{const}$. У выпадку полюса парадку n Ц.ф. $f(z)=c_0+c_1z+\ldots$ $\ldots+c_nz^n$ — мнагасклад ступені n. Нарэшце, калі $z=\infty$ — істотна асаблівы пункт, то Ц.ф. $f(z)$ называецца цэлай трансцэндэнтнай функцыяй. У гэтым выпадку шэраг $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ мае бясконцае мноства складнікаў. Прыклады Ц.ф.: e^z, $\sin z$, $\cos z$. Асноўнае пытанне ў тэорыі Ц.ф. — выяўленне сувязі паміж наводзінамі модуля Ц.ф. на асобных кірунках пры $z\to\infty$ і размеркаваннем у плоскасці яе нулёў.

ЦЭ́ЛЫ АЛГЕБРАІ́ЧНЫ ЛІК — алгебраічны лік, які з'яўляецца коранем мнагаскладу з цэлымі каэфіцыентамі і старэйшым каэфіцыентам, роўным адзінцы.

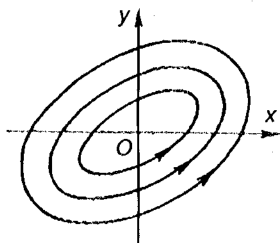
ЦЭ́ЛЫ ЛІК — лік, які можна падаць у выглядзе рознасці натуральных лікаў. Мноства цэлых лікаў абазначаецца **Z**:$\mathbf{Z}=\{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$. Гл. *Лік*.

ЦЭНТР (лац. centrum, ад грэц. kentron — сярэдзінны пункт) — 1) Ц. сіметрыі геаметрычнай фігуры — такі пункт S, што дадзеная фігура разам з пунктам A змяшчае і пункт A', які ляжыць на простай SA з другога боку ад пункта S на адлегласці $SA'=SA$. Крывыя і паверхні, якія маюць Ц. сіметрыі, называюцца цэнтральнымі. Найпрасцейшыя прыклады цэнтральных крывых — акружына, эліпс, гіпербала; цэнтральных паверхняў — сфера, эліпсоід, гіпербалоід. Ёсць фігуры, што маюць бясконцае мноства Ц. (напрыклад, у фігуры, якая складаецца з пары паралельных простых, Ц. размешчаны на простай, роўнаадлеленай ад гэтых простых). Гл. таксама *Сіметрыя*; 2) Ц. цяжару трохвугольніка — пункт перасячэння медыян трохвугольніка; 3) Ц. групы — сукупнасць элементаў групы, пераставіяльных з усімі яе элементамі (г.зн. такіх элементаў z, што $zg=gz$ для ўсіх элементаў g з дадзенай групы G). Ц. групы ёсць падгрупа ў G, якая пераходзіць у сябе пры ўсіх аўтамарфізмах. У групе незвыродных матрыц парадку n Ц. групы супадае з падгрупай скалярных матрыц (выгляду

λE, дзе λ — лік, E — адзінкавая матрыца); 4) Ц. асацыятыўнага кольца — сукупнасць усіх элементаў кольца, перастаўляльных (у дачыненні да множання) з кожным элементам. Ц. з'яўляецца падкольцам; 5) тып размяшчэння траекторый аўтаномнай сістэмы звычайных дыферэнцыяльных раўнанняў 2-га парадку

$$\dot{x} = P(x, y), \ \dot{y} = Q(x, y) \qquad (1)$$

у наваколлі асаблівага пункта $A(x_0, y_0)$, дзе P, Q — непарыўныя і маюць месца ўмовы адзінасці развязкаў сістэмы (1) у абсягу G, які змяшчае A. Гэты тып характарызуецца наступным чынам. Існуе наваколле $U \subset G$ пункта A такое, што ўсе траекторыі, якія пачынаюцца на-за A у U, — замкнёныя крывыя, што акружаюць A. Ц. называецца таксама і сам пункт A.



На рыс. пункт O (0, 0) — Ц. Для сістэмы

$$\dot{x} = ax + by, \ \dot{y} = cx + dy, \qquad (2)$$

дзе раўнанне

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0$$

мае цалкам уяўныя развязкі, пункт O (0, 0) з'яўляецца Ц. Аднак для сістэмы

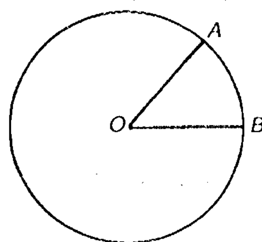
$$\dot{x} = ax + by + X(x, y), \ \dot{y} = cx + dy + Y(x, y),$$

дзе a, b, c, d з (2); X, Y — галаморфныя ў наваколлі пункта $x = y = 0$ функцыі без вольных і лінейных складнікаў, пункт O (0, 0) можа быць фокусам або Ц. Для дадзенай сістэмы ўзнікае праблема адрознівання гэтых двух выпадкаў, якая называецца праблемай Ц. і фокуса.

ЦЭНТРА́ЛЬНАЯ ЛІМІ́ТАВАЯ ТЭАРЭ́МА — адна з асноўных тэарэм тэорыі імавернасцяў. Няхай $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ — паслядоўнасць незалежных выпадковых велічынь, $s_n = x_1 + x_2 + ... + x_n$ — сума, $a_n = Ms_n = Mx_1 + Mx_2 + ... + Mx_n$ — матэматычнае спадзяванне, $B_n^2 = Ds_n = Dx_1 + Dx_2 + ... + Dx_n$ — дысперсія сумы s_n. Кажуць, што для паслядоўнасці $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ дастасавана Ц.л.т., калі для адвольных рэчаісных лікаў α і β, $\alpha < \beta$, імавернасць няроўнасці $\alpha < \frac{s_n - a_n}{B_n} < \beta$ мае сваім лімітам пры $n \to \infty$ велічыню $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\alpha^\beta e^{-\frac{x^2}{2}} dx$. Для выканання Ц.л.т. існуюць дастатковыя ўмовы, якія даказалі А.Ляпуноў (1901), С.Бернштэйн (1926), У.Фелер (1935). Гл. *Ляпунова тэарэма*.

ЦЭНТРА́ЛЬНАЯ СІМЕ́ТРЫЯ — гл. *Сіметрыя*.

ЦЭНТРА́ЛЬНЫ ВУ́ГАЛ — вугал, створаны двума радыусамі нейкай акружыны (гл. рыс.).

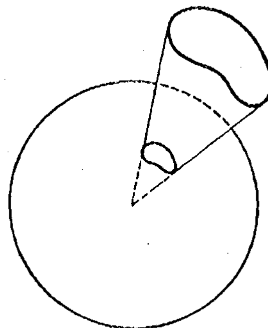


Колькасць вуглавых градусаў Ц.в. роўная колькасці градусаў дугі акружыны ўнутры Ц.в.

ЦЭРМЕ́ЛА АКСІЁМА — тое, што *выбару аксіёма*. Сфармуляваная Э.Цэрмела (1904).

ЦЭРМЕ́ЛА ТЭАРЭМА — тэарэма, якая сцвярджае, што кожнае непустое мноства можна цалкам упарадкаваць. Даказаная Э.Цэрмела ў 1904 г. з дапамогай *выбару аксіёмы*. Пазней высветлілася, што Ц.т. эквівалентная гэтай аксіёме.

ЦЯЛЕ́СНЫ ВУ́ГАЛ — частка прасторы, абмежаваная поўнай канічнай паверхняй (гл. рыс.).



Прыватныя выпадкі Ц.в. — трохграневыя і шматграневыя вуглы. Велічыня Ц.в. вызначаецца як тасунак плошчы s той часткі сферы з цэнтрам у

вяршыні канічнай паверхні, якая выразана гэтым Ц.в., да квадрата радыуса сферы. Адзінкай вымярэння Ц.в. з'яўляецца стэрадыян — Ц.в., які выразае на сферы паверхню, плошча якой роўная квадрату радыуса сферы. Поўная сфера ўтварае Ц.в., які роўны 4π стэрадыянаў.

ЧАБЫШО́ВА МНАГАСКЛА́ДЫ — сістэма артаганальных мнагаскладаў на адрэзку [–1, 1], выяўленая П.Чабышовым (1854). Ч.м. першага роду вызначаюцца формулай

$$T_n(x) = \cos(n\arccos x),\ n = 0, 1, 2, \ldots .$$

У прыватнасці, $T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x,\ T_2(x) = 2x^2 - 1.$ Яны артаганальныя на [–1, 1] з вагой $1/\sqrt{1-x^2}$:

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \pi/2, & m = n \geq 1, \\ \pi, & m = n = 0. \end{cases}$$

Ч.м. другога роду вызначаюцца формулай

$$U_n(x) = \frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}.$$

У прыватнасці, $U_0(x)=1,\ U_1(x)=2x,\ U_2(x) = 4x^2 - 1.$ Яны артаганальныя на [–1, 1] з вагой $\sqrt{1-x^2}$:

$$\int_{-1}^{1} U_m(x)U_n(x)\sqrt{1-x^2}\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \pi/2, & m = n. \end{cases}$$

Ч.м. першага і другога родаў звязаныя паміж сабою формулай

$$U_n(x) = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{dT_{n+1}(x)}{dx}.$$

ЧАБЫШО́ВА НЯРО́ЎНАСЦЬ — няроўнасць, якая вызначае верхнюю мяжу для імавернасці адхілення выпадковай велічыні ад яе матэматычнага спадзявання. Няхай X — выпадковая велічыня з матэматычным спадзяваннем a і дысперсіяй σ^2. Тады для кожнага $\varepsilon < 0$ імавернасць падзеі $|X - a| \geq \varepsilon$ не перавышае велічыні $\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$, г.зн.

$$p\{|X - a| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

Гэтую няроўнасць незалежна знайшлі Ж.Б'енема (1853) і П.Чабышоў (1877), які разгледзеў шматлікія дастасаванні няроўнасці ў *вялікіх лікаў законе*.

ЧАБЫШО́ВА ТЭАРЭ́МА ў тэорыі імавернасцяў — адна з тэарэм *вялікіх лікаў закону*, паводле якога сукупнае дзеянне выпадковых фактараў прыводзіць (пры агульных умовах) да выніку, амаль незалежнага ад выпадку. Калі $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ — незалежныя выпадковыя велічыні з матэматычнымі спадзяваннямі $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ і дысперсіямі $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2, \ldots$ і ўсе дысперсіі абмежаваныя адным і тым жа лікам L, то пры нарастанні n сярэдняе арыфметычнае назіраных значэнняў велічыняў $X_1, X_2, \ldots, X_n$ збягаецца ў сэнсе імавернасці да сярэдняга арыфметычнага іх матэматычных спадзяванняў:

$$p\left\{\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right| > \varepsilon\right\} \to 0$$

$$(\forall \varepsilon > 0 \text{ і } n \to \infty).$$

ЧА́САВАЯ ПАСЛЯДО́ЎНАСЦЬ — паслядоўнасць назіранняў, звычайна ўпарадкаваная па часе (магчымае ўпарадкаванне і па якім-небудзь іншым параметры). Асноўная рыса, якая вызначае аналіз Ч.п. сярод іншых відаў статыстычнага аналізу, — істотнасць парадку, у якім праводзяцца назіранні. Назіранні ў Ч.п., як правіла, залежныя, і характар гэтай залежнасці можа абумоўлівацца месцазнаходжаннем назіранняў у паслядоўнасці.

ЧА́САВЫ ШЭ́РАГ — тое, што *выпадковая паслядоўнасць*.

ЧА́СТАСЦЬ ВЫПАДКО́ВАЙ ПАДЗЕ́І — тасунак $\frac{m}{n}$ колькасці m надыходаў гэтай падзеі да агульнай колькасці n іспытаў. Лік $\frac{m}{n}$ пры дастаткова вялікім n амаль заўсёды блізкі да імавернасці p. Пры пэўных умовах можна вылічваць або ацэньваць імавернасць няроўнасці $\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon$ для кожнага ε. Гл. таксама *Бэрнулі тэарэма, Вялікіх лікаў закон, Цэнтральная лімітавая тэарэма*.

ЧА́СТАСЦЬ ПЕРЫЯДЫ́ЧНАЙ ФУ́НКЦЫІ — велічыня $\nu = \frac{2\pi}{T}$, дзе T — *перыяд* гэтай функцыі.

ЧАСТКО́ВА РЭКУРСІ́ЎНАЯ ФУ́НКЦЫЯ — функцыя, атрыманая з найпрасцейшых функцый $O(x) = 0$, $S(x) = x + 1$, $Y_m^n(x_1,...,x_n) = x_m$ $(1 \le m \le n)$ з дапамогай концай колькасці аперацый падстановы, прымітыўнай рэкурсіі і мінімізацыі. Адзначым, што разглядаюцца толькі функцыі, аргументы і значэнне якіх — натуральныя лікі, і, акрамя таго, разглядаюцца частковыя функцыі, не ўсюды вызначаныя (г.зн. абсяг іх вызначэння ёсць падмноства натуральных лікаў; гл. *Рэкурсіўная функцыя*). Паняцце Ч.р.ф. — адно з галоўных у *алгарытмаў тэорыі*. Яно азначае, што, з аднаго боку, кожная Ч.р.ф. з'яўляецца (з інтуіцыйнага пункту гледжання) вылічальнай функцыяй, з іншага — кожнае ўдакладненне інтуіцыйнага ўяўлення пра паняцце вылічальнай функцыі прыводзіць да класа Ч.р.ф. Гэта складае змест наступнай прыродазнаўчай навуковай гіпотэзы, якая называецца Чорча гіпотэзай: клас частковых вылічальных (з інтуіцыйнага пункту гледжання) функцый супадае з класам усіх Ч.р.ф. Гэты тэзіс даказаць нельга. Але ўсе вядомыя ўдакладненні паняцця вылічальнай функцыі прыводзяць да аднаго і таго ж класа функцый (частковa рэкурсіўных). Гэта сур'ёзны довад на карысць гіпотэзы Чорча.

ЧАСТКО́ВА ЎПАРА́ДКАВАНАЕ МНО́СТВА — непустое мноства, на якім вызначаны нейкі парадак, які абазначаецца сімвалам ≤ (гл. *Парадку дачыненне*). Прыклады Ч.ў.м.: мноства натуральных лікаў са звычайным парадкам; мноства натуральных лікаў, дзе $a \le b$ азначае, што a дзеліць b; мноства ўсіх рэчаісных функцый на адрэзку, дзе $f \le g$ азначае, што $f(x) \le g(x)$ для ўсіх пунктаў гэтага адрэзка; мноства ўсіх падмностваў дадзенага мноства, дзе $A \le B$ азначае, што A змяшчаецца ў B; адвольнае непустое мноства, дзе $a \le b$ калі і толькі калі $a = b$ (парадак трывіяльны або дыскрэтны). Калі на Ч.ў.м. P задаць дачыненне ≤, абазначаючы $a \le b$, калі $b \le a$, то гэтае дачыненне будзе парадкам. Ч.ў.м., якое пры гэтым узнікае, называецца дуальным да P.

ЧАСТКО́ВАГА ПЕРАБО́РУ МЕ́ТАД — адзін з метадаў *дыскрэтнага праграмавання*.

ЧАСТКО́ВАЯ ВЫТВО́РНАЯ — паняцце *дыферэнцыяльнага злічэння*, якое характарызуе хуткасць змянення функцыі некалькіх аргументаў пры змяненні толькі аднаго яе аргумента. Для функцыі $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ Ч.в. першага парадку (першая Ч.в.) па зменнай x_k можа быць вызначаная, як звычайная вытворная па x_k пры фіксаваных значэннях астатніх зменных. Для абазначэння Ч.в. выкарыстоўваюцца сімвалы $\frac{\partial u}{\partial x_k}, \frac{\partial f}{\partial x}, u'_{x_k}, f'_{x_k}, u_{x_k}, f_{x_k}$, дзе $k = 1, 2, \ldots$. Гэтыя Ч.в. ёсць функцыі аргументаў $x_1, x_2, ..., x_n$ і могуць мець свае Ч.в., якія ў дачыненні да зыходнай функцыі называюцца Ч.в. другога парадку (абазначаюцца $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}$ і г.д.). Аналагічна азначаюцца Ч.в. вышэйшых парадкаў. Ч.в. другога і вышэйшых парадкаў, узятыя па розных зменных, называюцца змяшанымі Ч.в. Калі змяшаныя Ч.в., якія маюць аднолькавую колькасць дыферэнцаванняў на аднолькавых зменных, непарыўныя, то яны супадаюць пры пэўных дадатковых умовах.

ЧАСТКО́ВАЯ СУ́МА шэрагу — концая сума $S_n = u_1 + \ldots + u_n$, $n = 1, 2, \ldots$ (частковая сума n-га парадку, $n \in \mathbf{N}$) складнікаў шэрагу $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$.

ЧАСТКО́ВЫ ІНТЭГРА́Л — роўнасць $\Phi(x, y) = 0$, якая вызначае развязак звычайнага дыферэнцыяльнага раўнання $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$ як няяўную функцыю аргумента x (іншы раз Ч.і. называюць саму функцыю Φ). Тэрмін Ч.і. выкарыстоўваецца і для сістэм звычайных дыферэнцыяльных раўнанняў, а таксама для раўнанняў з частковымі вытворнымі. Напрыклад, пад Ч.і. раўнання $F\left(x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$ разумеюць яго развязак.

ЧАСТКО́ВЫ ПАРА́ДАК — гл. *Парадак*.

ЧАТЫРО́Х КО́ЛЕРАЎ ГІПО́ТЭЗА — гіпотэза, паводле якой усякую геаграфічную карту можна размаляваць у чатыры колеры так, што кожныя дзве суседнія краіны будуць размаляваныя ў розныя колеры (мяжа кожнай краіны ёсць замкнёная лінія, а суседнімі лічацца краіны, якія маюць агульную мяжу ненулявой даўжыні). Ч.к.г. упершыню ўпамінаецца ў друку ў 1879 г., але сама задача была вядомая і раней.

Часта карыстаюцца і другой фармулёўкай гіпотэзы: кожны планарны граф можна правільна размаляваць у чатыры колеры. Вялікая цікавасць да тэорыі графаў, якая ўзнікла ў сувязі з гэтай праблемай, спрыяла адкрыццю многіх важных вынікаў. У 1969 г. Х.Хэш звёў праблему чатырох колераў да правільнай размалёўкі вялікага, але концага мноства графаў. Пазней колькасць гра-

фаў у гэтым мностве была зменшаная да 1482. У 1972 г. калектыў матэматыкаў і праграмістаў, які ўзначалілі К.Апель і В.Хэйкен, здолеў размаляваць усе такія графы і тым самым даказаць Ч.к.г.

ЧАТЫРОХВУГО́ЛЬНІК — чатыры пункты A, B, C, D на плоскасці, ніякія тры з іх не належаць адной простай, і чатыры адрэзкі AB, BC, CD, DA з канцамі ў гэтых пунктах. Звычайна ў планіметрыі разглядаюцца прыватныя выпадкі Ч.: *паралелаграм, ромб, квадрат*, ці Ч. з пэўнымі ўмовамі на размеркаванне пунктаў A, B, C, D.

ЧО́РЧА ТЭ́ЗІС — прынцып, паводле якога клас функцый, што можна вылічыць з дапамогай алгарытмаў у шырокім інтуіцыйным сэнсе гэтага слова, супадае з класам *часткова рэкурсіўных функцый*. Ч.т. пацвярджаецца вопытам матэматыкі за ўсю яе гісторыю: усе вядомыя да гэтага часу алгарытмы яго задавальняюць. Ч.т. не можа быць даказаны, бо ў яго фармулёўцы ўдзельнічае інтуіцыйнае паняцце "алгарытм". Спрабаваць абвергнуць яго можна, аднак такія спробы былі беспаспяховымі. Яшчэ адным пацвярджэннем Ч.т. з'яўляецца той факт, што розныя ўкладанні інтуіцыйнага паняцця алгарытму (часткова рэкурсіўныя функцыі, машыны Т'юрынга—Поста, нармальныя алгарытмы Маркава і інш.) эквівалентныя. Ч.т. упершыню выказаў А.Чорч (1936). З'яўляецца падставай для высновы пра неразвязальнасць дадзенай алгарытмічнай праблемы пасля таго, як дакладна даказана, што праблему нельга развязаць у межах таго ці іншага ўдакладнення паняцця алгарытму.

ЧЫ́СТА ЎЯ́ЎНЫ ЛІК — камплексны лік z выгляду $z = iy$, дзе y — рэчаісны лік. Гл. *Уяўны лік*.

ЧЭЗА́РА МЕ́ТАДЫ СУМАВА́ННЯ — сукупнасць пэўных *сумавання метадаў* лікавых і функцыйных шэрагаў; абазначаецца (C, k). Шэраг $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ з частковымі сумамі S_n называецца сумавальным метадам Чэзара парадку k (або (C, k)-сумавальны, адкуль вынікае, што $a_n = o(n^k)$) да сумы S, калі $\lim_{n\to\infty} S_n^k / A_n^k = S$, дзе S_n^k і A_n^k вызначаюцца як каэфіцыенты раскладаў

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n^k x^n = (1-x)^{-k-1}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} S_n^k x^n = (1-x)^{-k-1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

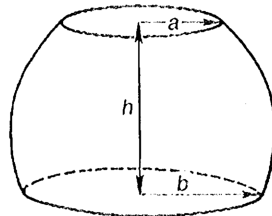
Метад $(C, 0)$ супадае са звычайнай сумавальнасцю; $(C, 1)$ — *сярэдніх арыфметычных метад сумавання*. Сіла Ч.м.с. нарастае з павелічэннем k: калі шэраг ёсць сумавальны метадам (C, k), то ён сумавальны да той жа сумы метадам (C, k') пры $k' > k > -1$ (пры $k < -1$ гэтая ўласцівасць не захоўваецца).

Метады (C, k) увёў Э.Чэзара (1890) для натуральных k. Пазней яны былі абагульненыя для $k \in \mathbf{C}$.

ШАР — геаметрычнае цела, абмежаванае звонку *сферай*. Адлегласць R ад цэнтра Ш. да кожнага пункта на яго паверхні — велічыня аднолькавая (радыус Ш.). Ш. атрымліваецца, напрыклад, пры авароце круга вакол восі, што праходзіць праз яго дыяметр. Плошча паверхні Ш. $S = 4\pi R^2$; аб'ём $V = 4/3\pi R^3$.

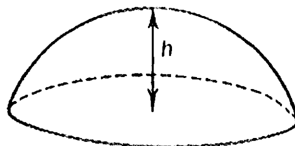
ШАРАВА́Я ФУ́НКЦЫЯ — тое, што *сферычная функцыя*.

ШАРАВЫ́ ПЛАСТ — частка *шара* паміж дзвюма паралельнымі плоскасцямі, якія перасякаюць шар (гл. рыс.). Аб'ём Ш.п. $V = 1/6\pi h(3a^2 + 3b^2 + h^2)$, плошча бакавой паверхні (*шаравога пояса*) $S = 2\pi Rh$, дзе R — радыус шара, h — адлегласць паміж плоскасцямі асноваў Ш.п., a і b — радыусы асноваў Ш.п.

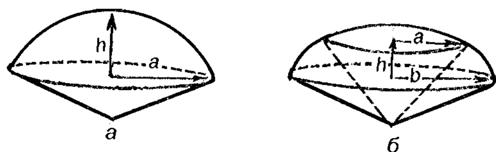


ШАРАВЫ́ ПО́ЯС — гл. *Шаравы пласт*.

ШАРАВЫ́ СЕГМЕ́НТ — частка *шара*, адсечаная якой-небудзь плоскасцю (гл. рыс.). Аб'ём Ш.с. $V = 1/3\pi h^2(3R - h)$; плошча бакавой паверхні $S = 2\pi Rh$, дзе R — радыус шара, h — вышыня Ш.с.



ШАРАВЫ́ СЕ́КТАР — геаметрычнае цела, што ўзнікае пры авароце сектара вакол аднаго з яго радыусаў (Ш.с. 1-га роду; рыс., *а*) або вакол



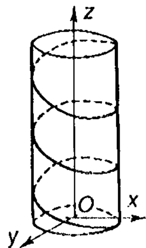
дыяметра, які не перасякае яго дугі (Ш.с. 2-га роду; рыс., *б*). Аб'ём Ш.с. (1-га і 2-га роду) $V = 2/3\pi R^2 h$, плошча паверхні Ш.с. 1-га роду $S_1 = \pi R(2h + a)$, 2-га роду $S_2 = \pi R(2h + a + b)$, дзе R — радыус сектара, h — праекцыя хорды, якая сцягвае дугу сектара на вось авароту, a і b — адлегласці ад канцоў хорды да гэтай восі.

ШВА́РЦА НЯРО́ЎНАСЦЬ — памылковы назоў *Кашы—Бунякоўскага няроўнасці.* У працах Г.Шварца гэтая няроўнасць з'явілася не раней чым у 1884 г., а В.Бунякоўскі яшчэ ў 1859 г. надрукаваў свае даследаванні пра няроўнасці.

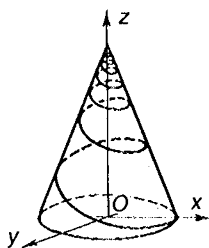
ШРУБ — гл. *Шрубавае злічэнне.*

ШРУ́БАВАЕ ЗЛІЧЭ́ННЕ — раздзел *вектарнага злічэння*, у якім вывучаюць аперацыі з ш р у б а м і — парамі вектараў $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$, што прыкладзеныя пачаткамі да аднаго пункта O і задавальняюць умову: пры пераходзе да новага пункта O' вектар $\boldsymbol{a}$ не змяніцца, а вектар $\boldsymbol{b}$ заменіцца вектарам $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} - [\boldsymbol{p}, \boldsymbol{a}]$, дзе $p = OO'$. Ш.з. выкарыстоўваецца ў геаметрыі (у тэорыі *лінеістых паверхняў*), у механіцы, дзе адвольныя перамяшчэнні цвёрдага цела або адвольную сістэму сілаў, якія дзейнічаюць на цела, можна выразіць шрубамі.

ШРУ́БАВАЯ ЛІ́НІЯ — прасторавая крывая, якую апісвае пункт, што аварочваецца з нязменнай хуткасцю вакол нерухомай восі і адначасова наступальна з нязменнай хуткасцю рухаецца ўздоўж гэтай восі. Ш.л. на паверхні цыліндра (рыс. 1) можа быць зададзеная параметрычнымі раўнаннямі: $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = ht$, дзе t — даўжыня дугі крывой, a — радыус цыліндра, h — канстанта. Існуюць Ш.л. на паверхні круглага конуса (рыс. 2).

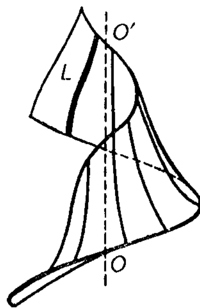


Рыс. 1



Рыс. 2

ШРУ́БАВАЯ ПАВЕ́РХНЯ — паверхня, якая атрымліваецца пры раўнамерным авароце вакол восі OO' плоскай крывой L, што адначасова раўнамерна наступальна рухаецца вакол гэтай жа восі (гл. рыс.).



ШТА́ЙНЭРА ЗАДА́ЧА — задача пабудовы *дрэва*, якое звязвае дадзенае канцае мноства пунктаў эўклідавай прасторы або падмноства S вяршыняў графа ўзважанага $G = (V, E)$, $S \subset V$ і мае найменшую суму даўжынь кантаў. Ш.з. — NP-ц я ж к а я з а д а ч а. Прыватныя выпадкі Ш.з. у графавай пастанове — задача пра найкарацейшы шлях у графе (пры $|S| = 2$) і *задача пра мінімальны каркас* (пры $S = V$). Мае важныя дастасаванні да праектавання камунікацыйных сетак, інтэгральных схемаў і інш.

ШТА́ЙНЭРА ТРО́ЕК СІСТЭ́МА — такі набор трохэлементавых падмностваў (троек) канцага мноства, што змяшчае n элементаў, у якім кожная пара элементаў належыць толькі аднаму падмноству. Ш.т.с. пералічаныя толькі для $n < 16$; пры $n = 3, 7, 9$ існуе па адной сістэме, пры $n = 13$ — дзве, пры $n = 15$ — 80. Даследаванне Ш.т.с. складае адзін з кірункаў *камбінаторыкі.*

ШТУ́РМА ПРА́ВІЛА — тэарэма пра колькасць рэчаісных каранёў мнагаскладаў з рэчаіснымі каэфіцыентамі. Не самая агульная фармулёўка Ш.п. наступная. Няхай $P(x)$ — мнагасклад з рэчаіснымі каэфіцыентамі без кратных каранёў, $P_0(x) = P(x)$, $P_1(x) = P'(x)$, і калі ўжо пабудаваны $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_k(x)$, то за $P_{k+1}(x)$ мы возьмем з адваротным знакам астачу ад дзялення $P_{k-1}(x)$ на $P_k(x)$. Апошні мнагасклад $P_s(x)$ — канстанта, адрозная ад нуля. Ш.п. сцвярджае, што калі рэча-

існыя лікі a і b не з'яўляюцца каранямі $P(x)$, то колькасць рэчаісных каранёў мнагаскладу $P(x)$ паміж a і b роўная $t(a) - t(b)$, дзе $t(c)$ — колькасць зменаў знакаў у паслядоўнасці $P_0(c), P_1(c), \ldots, P_s(c)$ (пры гэтым нулі не ўлічваюцца). Ш.п. дазваляе падзяляць лікавую вось на часткі, у кожнай з якіх змяшчаецца толькі адзін корань.

ШЧЫ́ЛЬНАЕ МНО́СТВА — мноства A у адкрытым мностве G прасторы X, калі G змяшчаецца ў замыканні A.

ШЧЫ́ЛЬНАЕ Ў САБЕ́ МНО́СТВА — мноства A без *ізаляваных пунктаў* або мноства, якое змяшчаецца ў мностве лімітавых пунктаў A.

ШЧЫ́ЛЬНАСЦІ ПУНКТ — пункт мноства, для якога тасунак меры часткі мноства з акругі гэтага пункта да меры акругі імкнецца да адзінкі, калі акруга сцягваецца да гэтага пункта. Пункты, якія не з'яўляюцца Ш.п., ва ўсякім вымерным мностве ствараюць мноства меры нуль.

ШЧЫ́ЛЬНАСЦЬ — уласцівасць мноства A у дачыненні да іншага мноства B, якая характарызуе, наколькі часта элементы $a \in A$ трапляюць у наваколле элементаў $b \in B$. Гл. *Шчыльнае мноства, Шчыльнае ў сабе мноства, Шчыльнасці пункт, Шчыльнасць імавернасці.*

ШЧЫ́ЛЬНАСЦЬ ІМАВЕ́РНАСЦІ — вытворная абсалютна непарыўнай функцыі размеркавання выпадковай велічыні ξ:

$$P(\xi) = \frac{dF_\xi(x)}{dx}.$$

Яе ўласцівасці:

1) $P(\xi) \geq 0$;

2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} P_\xi(x)dx = 1$ (у м о в а   н а р м а в а н н я);

3) $P\{x_1 < \xi \leq x_2\} = \int\limits_{x_1}^{x_2} P_\xi(x)dx$.

У мнагамерным выпадку

$$P_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(x_1,\ldots,x_n) = \frac{\partial^n F_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}.$$

Умовы:

1) $P_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(x_1,\ldots,x_n) \geq 0$,

2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \ldots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} P_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(x_1,\ldots,x_n)dx_n = 1$,

3) $P\{(\xi_1,\ldots,\xi_n) \in G\} = \int \cdots \int\limits_G P_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(x_1,\ldots,x_n)dx_1 \ldots dx_n$.

ШЭ́НАНА ТЭАРЭ́МА — адна з асноўных тэарэм *інфармацыі тэорыі*. Няхай па каналах сувязі перадаецца паслядоўнасць сімвалаў паводле нейкага імавернаснага закону, прычым існуе імавернасць, што сігнал будзе скажоны. Ш.т. сцвярджае, што можна знайсці такі лік N, які залежыць толькі ад разгляданых імавернасцяў з наступнымі ўласцівасцямі: пры адвольным $\varepsilon > 0$ існуюць спосабы перадачы з хуткасцю v_1 ($v_1 < v$) як мага блізкай да v, па якой можна аднавіць зыходную паслядоўнасць з імавернасцю памылкі, меншай за ε. Калі ж $v_1 > v$, то гэта зрабіць немагчыма. Лік v знаходзіцца з раўнання $Hv = c$, дзе H — *энтрапія* крыніцы на сімвал, c — ёмістасць канала ў двайковых адзінках за секунду. Тэарэму даказаў К.Шэнан (1957—61).

ШЭ́РАГ — фармальная бясконцая сума выгляду $u_1 + u_2 + \ldots u_k + \ldots$ ці

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k, \tag{1}$$

дзе $u_1, u_2, \ldots, u_k, \ldots$ называюцца с к л а д н і к а м і Ш., сума канцай колькасці складнікаў

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_k, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

называецца ч а с т к о в а й   с у м а й Ш. парадку n. Лікавы Ш. (1) можна азначыць як пару лікавых (рэчаісных або камплексных) паслядоўнасцяў (u_k) і (S_n), якія звязаныя роўнасцямі (2).

Ш. (1) называецца з б е ж н ы м, калі збягаецца паслядоўнасць яго частковых сумаў (S_n). У гэтым выпадку $S := \lim\limits_{n \to \infty} S_n$ называецца с у м а й Ш., запісваецца $S = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$. Калі паслядоўнасць частковых сумаў не мае канцага ліміту, Ш. называецца р а з б е ж н ы м. Напрыклад, для геаметрычнага Ш.

$$\sum_{k=1}^{n} q^{k-1} \tag{3}$$

маем $S_n = (1 - q^n)/(q - 1)$ пры $q \neq 1$ і $S_n = n$ пры $q = 1$. Гэты Ш. збягаецца да $1/(1-q)$ пры $|q| < 1$, у выпадку $|q| \geq 1$ ён разбягаецца. Неабходная і дастатковая ўмова збежнасці Ш., якая не выкарыстоўвае паняцце яго сумы, — к р ы т э р   К а ш ы: для таго каб Ш. (1) збягаўся, неабходна і дастаткова, каб для кожнага $\varepsilon > 0$ існаваў такі нумар n_ε, што пры ўсіх $n > n_\varepsilon$ і $p \geq 0$ праўдзілася няроўнасць $\left| \sum\limits_{k=n}^{n+p} u_k \right| < \varepsilon$. Для даследавання збежнасці Ш. існу-

юць дастатковыя ўмовы збежнасці (гл. *Д'Алямбэра прыкмета*, *Кашы прыкмета*, *Ляйбніца прыкмета* і г.д.). Неабходнай умовай збежнасці Ш. (1) з'яўляецца $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = 0$. Гэтая ўмова не ёсць дастатковая (гл., напрыклад, *Гарманічны шэраг*). Ш. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{n+k} = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k$ называецца *n*-й астачай шэрагу (1). Калі Ш. збягаецца, то і кожная яго астача збягаецца і наадварот. Калі астача парадку *n* Ш. (1) збягаецца і яе сума роўная r_n, то $S = S_n + r_n$. Калі шэрагі (1) і

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k \qquad (4)$$

збягаюцца, тады збягаецца і сума Ш. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(u_k + v_k)$ да сумы зыходных. Калі Ш. (1) збягаецца і t — адвольны лік, тады Ш. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} tu_k$, які называецца здабыткам шэрагу (1) і ліку t, таксама збягаецца, і $\sum\limits_{k=1}^{\infty} tu_k = t\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$. Ш. (1) называецца абсалютна збежным, калі збягаецца шэраг

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|. \qquad (5)$$

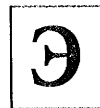
Абсалютна збежны Ш. збягаецца. Калі Ш. (1) збягаецца, а Ш. (5) разбягаецца, то Ш. (1) называецца ўмоўна збежным. Напрыклад, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}$ абсалютна збягаецца, а Ш. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}$ збягаецца ўмоўна. На Ш., якія збягаюцца абсалютна, пераносяцца ўласцівасці канцых сумаў. Сума Ш., што збягаюцца абсалютна, здабытак абсалютна збежнага Ш. і ліку таксама ёсць Ш., якія збягаюцца абсалютна. Няхай

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m^* \qquad (6)$$

— Ш., які мае тыя ж складнікі, што і Ш. (1), але ўзятыя ў іншым парадку. Калі Ш. (1) збягаецца абсалютна, тады Ш. (6) таксама збягаецца і мае тую ж суму, што і Ш. (1). Калі шэрагі (1) і (4) збягаюцца абсалютна, тады надвойны Ш., атрыманы з усялякіх парных здабыткаў $u_k v_m$ складнікаў гэтых Ш., пастаўленых у адвольным парадку, таксама збягаецца абсалютна. Прычым калі сума гэтага шэрагу роўная S, сумы шэрагаў (1) і (4) роўныя адпаведна u і v, то $S = uv$ (Ш., якія збягаюцца абсалютна, можна перамнажаць, не звяртаючы ўвагі на парадак складнікаў). Для Ш., якія збягаюцца ўмоўна, сцверджанне пра незалежнасць іх сумы ад парадку складнікаў не мае месца.

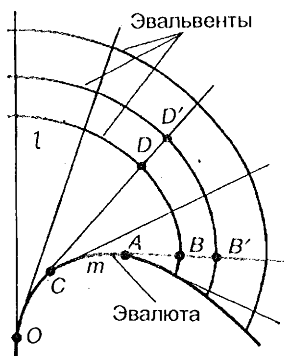
Функцыйны Ш. — шэраг (1), складнікамі якога u_k з'яўляюцца функцыі на нейкім мностве E, г.зн. $u_k = u_k(x)$ пры $x \in E$. Калі Ш. (1) збягаецца ў кожным пункце $x \in E$, то ён называецца збежным на мностве E, мноства E называецца абсягам збежнасці (гл. *Інтэрвал збежнасці*, *Круг збежнасці*). Умовы, пры якіх на функцыйныя Ш. распаўсюджваюцца ўласцівасці непарыўнасці, дыферэнцавальнасці і інтэгравальнасці сумаў, фармулююцца ў тэрмінах раўнамернай збежнасці Ш. Шэраг (1) раўнамерна збягаецца на мностве E, калі ва ўсіх пунктах x адхіленне частковых сумаў Ш. $S_n(x)$ пры дастаткова вялікіх n ад сумы Ш. $S(x)$ не пераўзыходзіць адной і той жа адвольна малой велічыні, г.зн. для кожнага $\varepsilon > 0$ існуе такое $n_\varepsilon \in N$, што для ўсіх $n > n_\varepsilon$ і ўсіх $x \in E$ выконваецца $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$. Напрыклад, Ш. (3) збягаецца раўнамерна па q на адрэзку $[-1+\delta, 1-\delta]$, дзе $0 < \delta < 1$, збягаецца нераўнамерна на інтэрвале $(-1, 1)$. Неабходная і дастатковая ўмова раўнамернай збежнасці Ш. (1), якая не выкарыстоўвае наяўнасць яго сумы, — крытэр Кашы: Ш. (1) раўнамерна збягаецца на мностве E, калі і толькі калі для кожнага $\varepsilon > 0$ існуе такое $n_e \in N$, што для ўсіх $n > n_e$, $p \geq 0$ і $x \in E$ праўдзіцца ацэнка $\left|\sum\limits_{k=n}^{n+p} u_k(x)\right| < \varepsilon$. Метад раскладання ў Ш. — гэта метад даследавання функцый, вылічэння і ацэнак інтэгралаў, развязання розных раўнанняў. Гл. *Ступеневы шэраг*, *Трыганаметрычны шэраг*, *Фур'е шэраг*, *Тэйлара шэраг*, *Лёрана шэраг*, *Дырыхле шэраг*.

ШЭРАГАВАННЕ — тое, што *раскладанне ў шэраг*.



ЭВАЛЬВЕНТА І ЭВАЛЮТА (ад лац. evolvens (evolventis) — той, што разгортвае; evoluta — разгорнутая) — плоскія крывыя, спалучаныя аперацыяй *разгорткі*. Калі крывая l — эвальвента пэўнай крывой m, то m — эвалюта крывой l (гл. рыс.). Эвалюта крывой — геаметрычнае месца яе цэнтраў крывіні. Калі гнуткая нерасцяжная нітка,

замацаваная ў пункце O крывой m, быццам бы змотваецца з яе, то канец ніткі стварае эвальвенту крывой m. Э. і э. маюць уласцівасці: датычная CD у адвольным пункце C эвалюты — нармаль да адпаведнага пункта D эвальвенты; рознасць радыусаў крывіні CD і AB эвальвенты роўная даўжыні дугі AC эвалюты; кожная эвалюта мае бясконцае мноства эвальвентаў, прычым адлегласць паміж усякімі дзвюма — велічыня сталая ($BB' = DD'$).



ЭКВІВАЛЕ́НТНАСЦІ ДАЧЫНЕ́ННЕ — *бінарнае дачыненне* R на мностве A, калі яно мае наступныя ўласцівасці: 1) aRa для ўсякага $a \in A$ (*рэфлексіўнасць*); 2) калі aRb, то bRa (*сіметрычнасць*); 3) калі aRb і bRc, то aRc (*транзітыўнасць*). Э.д. абазначаецца сімвалам ~. Напрыклад, дачыненне $R = \{(a, b) \in \mathbf{Z}^2 \mid a$ і b — узаемна простыя$\}$ ёсць Э.д. на мностве $\mathbf{Z}$. Гл. таксама *Параўнанне, Эквівалентнасць.*

ЭКВІВАЛЕ́НТНАСЦЬ (ад лац. aeguus — роўны + valens (valentis) — які мае значэнне, цану) — бінарнае дачыненне на мностве X з уласцівасцямі *рэфлексіўнасці, сіметрычнасці, транзітыўнасці.* Напрыклад, кангруэнтнасць або падобнасць геаметрычных фігур, ізамарфізм, роўнамагутнасць утвараюць адпаведныя Э. К л а с а м Э. адвольнага элемента $x_0 \subset X$ называецца мноства, якое складаецца з усіх элементаў $x \in X$, эквівалентных x_0 у сэнсе дадзенай Э. Усялякія два класы адной Э. або не перасякаюцца, або супадаюць, г.зн. усякая Э. вызначае падзел мноства. І наадварот: усякі падзел мноства на класы, якія не перасякаюцца, утварае Э. Гл. таксама *Эквівалентнасці дачыненне.*

ЭКВІВАЛЕ́НТНЫЯ РАЎНА́ННІ (СІСТЭ́МЫ), р а ў н а з н а ч н ы я р а ў н а н н і (с і с т э м ы) — раўнанні (сістэмы), якія маюць адно і тое ж мноства развязкаў у адным і тым жа абсягу. Паняцце Э.р. набывае дакладны сэнс, калі вызначанае поле, у якім ляжаць развязкі раўнанняў; напрыклад, $x^2 - 1 = 0$ і $x^4 - 1 = 0$ — Э.р. у полі рэчаісных лікаў (абодва маюць карані $x_{1,2} = \pm 1$, але яны не Э.р. у полі камплексных лікаў, бо другое мае яшчэ два ўяўныя развязкі $x_{3,4} = \pm i$).

ЭКВІВАЛЕ́НЦЫЯ — логікавая аперацыя, якая з выказванняў A і B утварае новае выказванне, што праўдзіцца, калі і толькі калі A і B абодва праўдзівыя або абодва непраўдзівыя. Абазначаецца $A \Leftrightarrow B$. Табліца праўдзівасці Э. мае выгляд

A	B	$A \Leftrightarrow B$
П	П	П
П	Н	Н
Н	П	Н
Н	Н	П

Э. адпавядае ў пэўным сэнсе выразам «калі і толькі калі», «тады і толькі тады, калі», «неабходна і дастаткова». Выкананне $A \Leftrightarrow B$ раўназначнае выкананню $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$. Выказванні A і B называюцца л о г і к а в а р а ў н а з н а ч н ы м і, калі праўдзівае выказванне $A \Leftrightarrow B$. Гл. таксама *Крытэр.*

ЭКСПАНЕ́НТА (ад лац. exponens (exponentis) — які паказвае) — тое, што *экспанентавая функцыя.*

ЭКСПАНЕ́НТАВАЯ ФУ́НКЦЫЯ, э к с п а н е н т а — функцыя $y = e^x$; абазначаецца таксама $y = \exp x$. Зрэдку Э.ф. называецца функцыя $y = a^x$ пры адвольнай аснове $a > 0$. Тэрмін Э.ф. увёў Г.Ляйбніц (1679, 1692). Гл. таксама *Паказнікавая функцыя.*

ЭКСТРАПАЛЯ́ЦЫЯ ФУ́НКЦЫІ — працяг функцыі за межы яе абсягу вызначэння. Пры гэтым звычайна лічаць, што па-за абсягам функцыя належыць пэўнаму класу (некалькі разоў дыферэнцавальная, аналітычная і г.д.). Звычайна пры Э.ф. выкарыстоўваюць інфармацыю пра паводзіны функцыі не на ўсім абсягу, а ў пэўных пунктах (вузлах інтэрпаляцыі). Э.ф. ажыццяўляецца з дапамогай розных формул, якія ўжываюцца і пры інтэрпаляцыі (*Лягранжа інтэрпаляцыйная формула*).

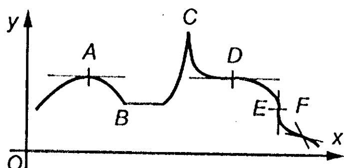
ЭКСТРЭМА́ЛЬ — інтэгральная крывая *дыферэнцыяльнага раўнання* Ойлера, якое ўзнікае ў *варыяцыйным злічэнні.*

ЭКСТРЭМА́ЛЬНАЯ ЗАДА́ЧА — задача, у якой патрэбна знайсці *экстрэмум* (максімум або

мінімум) дадзенага функцыянала, г.зн. адлюстраванне выгляду $f: A \to \mathbf{R}$.

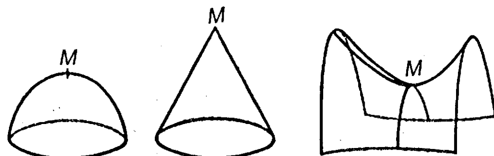
ЭКСТРЭ́МУМ (ад лац. extremum — крайняе) — значэнне непарыўнай функцыі $f(x)$, якое з'яўляецца яе максімумам ці мінімумам. Больш дакладна: непарыўная ў пункце x_0 функцыя $f(x)$ мае ў x_0 максімум (лакальны максімум) або мінімум (лакальны мінімум), калі існуе акруга $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ гэтага пункта (якая належыць абсягу вызначэння $f(x)$) такая, што ва ўсіх яе пунктах выконваецца няроўнасць $f(x_0) \geq f(x)$ (адпаведна $f(x_0) \leq f(x)$). Калі пры гэтым існуе такая акруга, у якой $f(x_0) > f(x)$ або $f(x_0) < f(x)$ пры $x_0 \neq 0$, то кажуць пра строгі лакальны максімум (або строгі лакальны мінімум), у процілеглым выпадку — пра нястрогі лакальны максімум (або нястрогі лакальны мінімум). На рыс. 1 у пункце A дасягаецца строгі лакальны максімум, у пункце B — нястрогі лакальны мінімум.

Максімум (мінімум) функцыі на мностве E называецца абсалютным максімумам (абсалютным мінімумам) на гэтым мностве ў адрозненне ад лакальнага. Абсалютны максімум (мінімум) функцыі з'яўляецца аднначасова і лакальным, аднак лакальны максімум (мінімум) функцыі можа быць меншы (большы) за абсалютны. Пры пошуку абсалютнага максімуму (мінімуму) знаходзяць яго лакальныя максімумы (мінімумы) і сярод іх выбіраюць найбольшы (найменшы). Пункты максімуму і мінімуму называюцца



пунктамі Э. Для таго каб функцыя $f(x)$ мела Э. у нейкім пункце x_0, неабходна, каб яна была непарыўная ў x_0 і каб $f'(x_0) = 0$ (пункт A на рыс.1) або $f'(x_0)$ не існавала (пункт C на рыс. 1). Калі пры гэтым у нейкай акрузе пункта x_0 вытворная $f'(x)$ злева ад x_0 дадатная, а справа адмоўная, то $f(x)$ мае ў x_0 максімум; калі $f'(x)$ злева ад x_0 адмоўная, а справа дадатная, то мінімум (першая дастатковая ўмова Э.). Калі ж $f'(x)$ не мяняе знак пры пераходзе праз пункт x_0, то функцыя $f(x)$ не мае Э. у пункце x_0 (пункты D, E і F на рыс. 1).

Аналагічна Э. функцыі адной зменнай вызначаюцца Э. функцыі некалькіх зменных. Неабходная ўмова Э. у гэтым выпадку — патрабаванне, каб частковыя вытворныя 1-га парадку былі роўныя нулю або не існавалі. Напрыклад, у паверхні на рыс. 2 частковыя вытворныя роўныя нулю ў пункце M, на рыс. 3 у пункце M яны не існуюць.



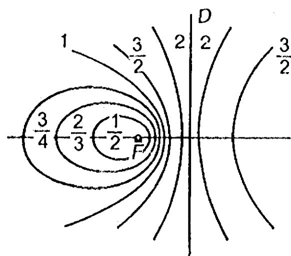
Калі ж у нейкай акрузе пункта $M_0(x_0, y_0)$ існуюць і непарыўныя 1-я і 2-я частковыя вытворныя функцыі $f(x, y)$ і ў самім пункце

$$f'_x = f'_y = 0,\ \Delta = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - (f''_{xy})^2 > 0,$$

то $f(x, y)$ у пункце M мае Э. (максімум пры $f''_{xx} < 0$ і мінімум пры $f''_{xx} > 0$). Э. у пункце M не існуе, калі $\Delta < 0$ (у гэтым выпадку M — гэтак званая седлавіна або пункт мінімаксу; рыс. 4). Дастатковыя ўмовы Э. функцыі многіх зменных зводзяцца да дадатнай (або адмоўнай) вызначанасці квадратовай формы $\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\Delta x_i \Delta x_k$, дзе a_{ik} — значэнне $f''_{x_i x_k}$ у даследаваным пункце. Гл. таксама *Умоўны экстрэмум*.

Тэрмін Э. ужываецца таксама пры вывучэнні найбольшых і найменшых значэнняў функцыяналаў у варыяцыйным злічэнні.

ЭКСЦЭНТРЫСІТЭ́Т (ад лац. ex — па-за + centrum — цэнтр) канічнага сечыва — лік, які характарызуе форму канічнага сечыва: $\varepsilon = r / d$, r — адлегласць ад кожнага пункта канічнага сечыва (эліпса, гіпербалы, парабалы) да фокуса, d — адлегласць ад гэтага пункта да дырэктрысы. У эліп-



са $\varepsilon < 1$, у акружыны $\varepsilon = 0$, у гіпербалы $\varepsilon > 1$, у парабалы $\varepsilon = 1$. Залежнасць формы канічных сечываў з агульным фокусам F і дырэктрысай D ад Э.

паказана на рыс. Канічныя сечывы, якія маюць аднолькавы Э., падобныя. Тэрмін Э. увёў Ё.Кеплер (1609).

ЭКСЦЭ́СУ КАЭФІЦЫЕ́НТ — скалярная характарыстыка востравяршыневасці графіка шчыльнасці імавернасці унімадальнага размеркавання, якую выкарыстоўваюць у якасці пэўнай меры адхілення разгляданага размеркавання ад нармальнага. Э.к. вызначаецца па формуле

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3,$$

дзе μ_2 і μ_4 — другі і чацвёрты цэнтральныя моманты імавернаснага размеркавання.

ЭЛЕМЕНТА́РНАЕ ПЕРАЎТВАРЭ́ННЕ МА́ТРЫЦЫ — тое, што *пераўтварэнне матрыцы.*

ЭЛЕМЕНТА́РНАЯ ГЕАМЕ́ТРЫЯ — раздзел *геаметрыі,* які ўзнік у старажытнай Грэцыі і ўвайшоў у «Пачаткі» Эўкліда (каля 356—300 да н.э.). У гэтым першым, што дайшоў да нас, тэарэтычным трактаце па матэматыцы ўпершыню зробленая спроба выкарыстаць аксіёмы ў якасці асновы для лагічнага будавання геаметрыі. Першы перыяд развіцця матэматыкі як самастойнай навукі называюць перыядам Э.г., які завяршыўся ў 16 ст. і характарызуецца дасягненнямі ў вывучэнні сталых велічыняў. Э.г. вывучае геаметрычныя фігуры непасрэдна, не карыстаючыся метадам каардынат, апаратамі алгебры, аналізу, а таму яе называюць с і н т э т ы ч н а й геаметрыяй у адрозненне, напрыклад, ад а н а л і т ы ч н а й геаметрыі, якая ўзнікла пазней, у перыяд стварэння матэматыкі зменных велічыняў. Школьная дысцыпліна «Геаметрыя» застаецца ў асноўным сінтэтычным курсам Э.г., але ў яго ўключаныя ўжо метады і ідэі сучаснай навукі.

ЭЛЕМЕНТА́РНАЯ МАТЭМА́ТЫКА — паняцце, якое ўключае сукупнасць тых раздзелаў, метадаў і задач матэматыкі, у якіх не карыстаюцца агульнымі паняццямі зменнай, функцыі, ліміту і мноства. Інакш кажучы, Э.м. карыстаецца тымі агульнымі паняццямі (абстракцыямі) матэматыкі, якія склаліся да з'яўлення матэматычнага аналізу. У Э.м. уключаюць звычайна *арыфметыку* і гэтак званыя *элементарную тэорыю лікаў,* элементарную алгебру, *элементарную геаметрыю* і *трыганаметрыю.*

Э.м. можна характарызаваць як матэматыку сталых велічыняў, што, аднак, не зусім дакладна, бо ў Э.м. разглядаюцца не толькі сталыя велічыні, але, напрыклад, і геаметрычныя фігуры — з гледзішча як іх велічыні, так і размяшчэння. Разглядаюцца і зменныя велічыні, напрыклад трыганаметрычныя функцыі, але размова ідзе пра іх канкрэтныя значэнні. Агульныя ж паняцці функцыі і ліміту, лініі, паверхні, фігуры не ўваходзяць у змест Э.м. Пад Э.м. разумеюць яшчэ і традыцыйны назоў сукупнасці раздзелаў матэматыкі, якія вывучаюцца ў сярэдняй агульнаадукацыйнай школе. Аднак увод элементаў дыферэнцыяльнага і інтэгральнага злічэнняў у праграму сярэдняй школы не дазваляе строга падзяляць матэматыку на элементарную і вышэйшую.

ЭЛЕМЕНТА́РНАЯ ПАДЗЕ́Я — адно з асноўных паняццяў тэорыі імавернасцяў. У адпаведнасці з аксіяматыкай *імавернасцяў тэорыі,* распрацаванай у 1933 г. А.Калмагоравым, фармальна задаецца імавернасная прастора (Ω, A, P), дзе Ω — адвольнае мноства, A — σ-поле падзеяў, P — імавернасць. Непустое мноства Ω называецца п р а с т о р а й Э.п., а ўсякі яго пункт $\omega \in \Omega$ — Э.п. У межах гэтак званай э л е м е н т а р н а й т э о р ы і і м а в е р н а с ц я ў кожны стахастычны эксперымент заканчваецца адным зыходам. Зыходы нераскладальныя, ўзаемна выключаюць адзін аднаго і з'яўляюцца Э.п.

ЭЛЕМЕНТА́РНАЯ ПРАВЕ́РКА — пэўны мінімальны, што не падлягае дзяленню ў дадзеных канкрэтных умовах, эксперымент над аб'ектам дыягнаставання, які характарызуецца пэўным уваходным (тэставым або рабочым) уздзеяннем, што падаецца на аб'ект, і складам кантрольных пунктаў, з якіх здымаецца адказ аб'екта на гэтае ўздзеянне. Значэнне атрыманага адказу (значэнні сігналаў у кантрольных пунктах) называецца вынікам Э.п.

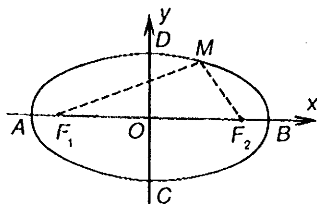
ЭЛЕМЕНТА́РНАЯ ТЭО́РЫЯ — адвольнае мноства прапаноў нейкай фармалізаванай логікі — матэматычнай мовы, замкнёнае ў дачыненні да высноў у злічэнні прэдыкатаў. Э.т. называецца яшчэ т э о р ы я й п е р ш а г а п а р а д к у.

ЭЛЕМЕНТА́РНАЯ ТЭО́РЫЯ ЛІ́КАЎ — раздзел *лікаў тэорыі,* у якім вывучаюцца ўласцівасці лікаў элементарнымі метадамі. Да Э.т.л. належаць тэорыя параўнанняў, дыяфантавы раўнанні, адытыўныя выяўленні, набліжанне рацыянальнымі лікамі і г.д. Пад элементарнымі метадамі разумеюць камбінаторыку, розныя формы індукцыі і простыя элементы аналізу. Метады тэорыі функцый камплекснай зменнай традыцыйна лічацца

неэлементарнымі. Сродкамі Э.т.л. былі развязаны многія складаныя праблемы тэорыі лікаў.

ЭЛЕМЕНТА́РНЫЯ ФУ́НКЦЫІ — клас функцый, якія складаецца са *ступеневых функцый, паказнікавых функцый, лагарыфмічных функцый, трыганаметрычных функцый, адваротных трыганаметрычных функцый*, а таксама функцый, якія можна атрымаць з пералічаных у выніку скарыстання чатырох арыфметычных дзеянняў і канцай колькасці суперпазіцый. Вытворная ад Э.ф. таксама ёсць Э.ф., а адваротная і першасная функцыі не заўсёды Э.ф. Калі нейкая функцыя не ёсць элементарная, то важнай задачай з'яўляецца яе выражэнне праз Э.ф. з дапамогай бясконцых шэрагаў, бясконцых здабыткаў, інтэгралаў і г.д.

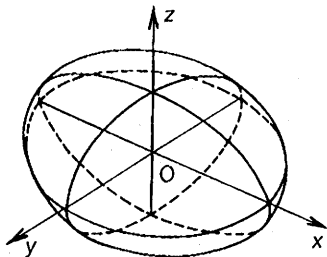
Э́ЛІПС (ад грэц. elleipsis) — крывая 2-га парадку. Атрымліваецца пры сячэнні кругавога конуса плоскасцю (гл. *Канічныя сечывы*) як геаметрычнае месца пунктаў M плоскасці, сума адлегласцяў якіх ад двух пэўных пунктаў F_1 і F_2 (*фокусаў*) сталая: $2a = F_1M + F_2M$. Пры пэўным выбары сістэмы каардынат (гл. рыс.) раўнанне Э. мае кананічны выгляд



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

дзе $a = OA$, $b = OC$ — адпаведна вялікая і малая паўвосі.

ЭЛІПСО́ІД (ад эліпс + грэц. eidos — выгляд) — замкнёная паверхня 2-га парадку, раўнанне якой у належна выбранай прамавугольнай сістэме каардынат (гл. рыс.) мае кананічны выгляд



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

дзе a, b, c — паўвосі. Мае цэнтр сіметрыі, тры восі сіметрыі, тры плоскасці сіметрыі. Сячэнні Э. плоскасцямі даюць *эліпсы*. Прыавароце эліпса вакол адной з яго восяў атрымліваецца Э. аварота (у яго дзве паўвосі аднолькавыя). Э. з трыма аднолькавымі паўвосямі ёсць *сфера*.

ЭЛІПСО́ІДАЎ МЕ́ТАД — метад развязання задач матэматычнага праграмавання. Асноўны варыянт гэтага метаду выкарыстоўваецца да задачы пошуку пункта, які б належаў дадзенаму выпукламу целу K у $\mathbf{R}^n$ (калі такі пункт ёсць). Сутнасць Э.м. палягае ў пабудове паслядоўнасці эліпсоідаў $E_1, E_2, ..., E_m$ такіх, што $K \subset E_k$, $k = \overline{1, m}$, і $\mathrm{vol}\,(E_{k+1}) < \mathrm{vol}\,(E_k)$, $k = \overline{1, m-1}$ ($\mathrm{vol}\,(E_k)$ — аб'ём E_k). Ітэрацыя метаду зводзіцца да будавання эліпсоіда E_{i+1} зыходзячы з эліпсоіда E_i. Звычайна ў якасці E_{i+1} выбіраецца эліпсоід мінімальнага аб'ёму, які акрэслены вакол часткі эліпсоіда E_i. Пасля дастатковай колькасці ітэрацый або будзе знойдзены $y \in K$, або аб'ём чарговага эліпсоіда стане настолькі малым, каб можна было зрабіць выснову, што мноства K пустое. Э.м. упершыню прапанаваў Н.Шор для развязання задач нелінейнага праграмавання. Метад набыў шырокую вядомасць пасля таго, як у 1979 г. Л.Хачыян даказаў паліномнасць алгарытму развязання сістэм лінейных няроўнасцяў, які грунтуецца на Э.м.

ЭЛІПТЫ́ЧНАГА ТЫ́ПУ РАЎНА́ННЕ — дыферэнцыяльнае раўнанне з частковымі вытворнымі выгляду

$$\sum_{i,j=1}^{n} D_i a_{ij}(x) D_j u + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) D_i u + a(x) u = f(x),$$

дзе $x = (x_1,...,x_n)$, $D_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1,...,n$, а квадратовая функцыя

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j$$

дадатна вызначаная.

ЭЛІПТЫ́ЧНАЯ КРЫВА́Я — адна з асноўных крывых у *алгебраічнай геаметрыі*. Няхай K — адвольнае поле, *характарыстыка* якога не роўная двум, і $f \in K\,[x]$ — кубічны паліном, каэфіцыенты якога належаць K, а ўсе яго карані (магчыма, у

нейкім пашырэнні поля K) розныя. Э.к. называецца мноства ўсіх параў (x, y), якія з'яўляюцца развязкамі раўнання $y^2=f(x)$, прычым x і y знаходзяцца ў нейкім пашырэнні K^1 поля K. Акрамя параў (x, y) да Э.к. дадаецца бясконцы пункт (з дапамогаю праектыўных каардынат). Ён далучаецца да Э.к. падобна да таго, як у камплексным аналізе да камплекснай плоскасці **C** далучаецца пункт ∞, у выніку чаго ўтвараецца сфера Рымана $\hat{\mathbf{C}}=\mathbf{C}\vee\{\infty\}$.

ЭЛІПТЫ́ЧНАЯ ФУ́НКЦЫЯ — усякая мераморфная ў **C** функцыя f, якая з'яўляецца перыядычнай з асноўнымі перыядамі ω_1 і ω_2 у тым сэнсе, што праўдзіцца тоеснасць $f(z+m\omega_1+n\omega_2)\equiv f(z)$ для адвольных $z\in\mathbf{C}$, $m, n\in\mathbf{Z}$, прычым ω_1 і ω_2 — такія камплексныя лікі, што $\operatorname{Im}\frac{\omega_1}{\omega_2}>0$. Відавочна, што вытворная Э.ф. зноў з'яўляецца Э.ф. і што мноства ўсіх Э.ф. з дадзенымі асноўнымі перыядамі ёсць поле. Існуюць тры асноўныя падыходы да будавання гэтага поля: тэорыя Ваерштраса, тэорыя Якобі і тэорыя тэта-функцый.

Напрыклад, у тэорыі Ваерштраса зыходнай з'яўляецца Э.ф.

$$P(z)=\frac{1}{z^2}+$$
$$+\sum_{\substack{(m,n)\in\mathbf{Z}^2\\(m,n)\neq(0,0)}}\left[\frac{1}{(z-m\omega_1-n\omega_2)^2}-\frac{1}{(m\omega_1+n\omega_2)^2}\right].$$

Гэтая функцыя ёсць нейкі развязак дыферэнцыяльнага раўнання $(p')^2=4P^3-g_2P-g_3$, дзе g_2, $g_3\in\mathbf{C}$. Калі яго праінтэграваць, то становіцца відавочным, што Э.ф. — гэта функцыя, адваротная да якога-небудзь *эліптычнага інтэграла*. Усякую Э.ф. f з асноўнымі перыядамі ω_1 і ω_2 можна выявіць у выглядзе

$$f(z)=R\,[P'(z), P(z)],$$

дзе $R\ (u, v)$ — рацыянальная функцыя ад дзвюх зменных над полем **C**. Паралелаграм, вяршыні якога знаходзяцца ў пунктах $0, \omega_1, \omega_2, \omega_1+\omega_2$, называецца п а р а л е л а г р а м а м п е р ы я д а ў Э.ф., бо на яго супрацьлежных старанах Э.ф. прымае аднолькавыя значэнні. Калі супрацьлежныя стораны паралелаграма перыядаў склеіць, то атрымаецца р ы м а н а в а п а в е р х н я, гамеаморфная *тору*. Такім чынам, тэорыя Э.ф. ёсць тэорыя функцый, мераморфных усюды на торы.

ЭЛІПТЫ́ЧНЫ ІНТЭГРА́Л — усякі інтэграл выгляду

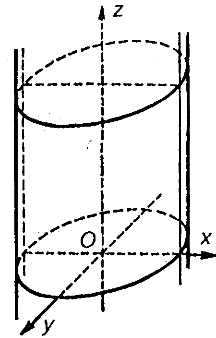
$$\int R(z,w)\,dz, \qquad (1)$$

дзе R — рацыянальная функцыя над полем **C**, а зменныя z, w звязаныя раўнаннем $w^2=f(z)$, f — паліном ступені 3 або 4 над полем **C**, які не мае кратных каранёў. У агульным парадку інтэгралы выгляду (1) не ёсць *элементарныя функцыі*. У тых асобных выпадках, калі інтэграл (1) — элементарная функцыя, ён называецца п с е ў д а э л і п т ы ч н ы м. Калі інтэграл (1) концы ўсюды ў **C**, то ён называецца Э.і. п е р ш а г а р о д у. Калі ён не концы на **C**, але не мае лагарыфмічных асаблівасцяў, тады называецца Э.і. д р у г о г а р о д у, калі мае толькі лагарыфмічныя асаблівасці — Э.і. т р э ц я г а р о д у. Кожны Э.і. можна падаць у выглядзе сумы Э.і. 1, 2 і 3-га роду. Э.і. цесна звязаны з *эліптычнымі функцыямі*.

ЭЛІПТЫ́ЧНЫ ПАРАБАЛО́ІД — незамкнёная паверхня другога парадку. Гл. *Парабалоід*.

ЭЛІПТЫ́ЧНЫ ЦЫЛІ́НДР — паверхня другога парадку (рыс.), якая задаецца ў прасторы $\mathbf{R}^3$ раўнаннем

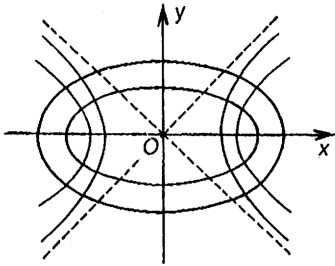
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$



ЭЛІПТЫ́ЧНЫЯ КААРДЫНА́ТЫ — лікі σ і τ, звязаныя з прамавугольнымі каардынатамі формуламі

$$x^2=\frac{(\sigma+a^2)(\tau+a^2)}{a^2-b^2},\quad y^2=\frac{(\sigma+b^2)(\tau+b^2)}{b^2-a^2}, \qquad (1)$$

дзе $a^2<\tau<-b^2<\sigma<\infty$. Каардынатнымі лініямі (гл. рыс.) з'яўляюцца эліпсы ($\sigma=\text{const}$) і гіпер-



балы ($\tau = \text{const}$) з фокусамі ($\sqrt{-a^2-b^2}$, 0) і ($\sqrt{a^2-b^2}$, 0). Сістэма Э.к. — артаганальная. Кожнай пары лікаў s і t адпавядаюць 4 пункты (па адным у кожным квадранце плоскасці xOy), сіметрычныя адзін аднаму ў дачыненні да восяў Ox і Oy. Каэфіцыенты Лямэ:

$$L_\sigma = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sigma-\tau}{(\sigma+a^2)(\tau+b^2)}},$$

$$L_\tau = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\tau-\sigma}{(\sigma+a^2)(\tau+b^2)}}.$$

Э.к. у прасторы — лікі σ, τ, ξ, сувязь якіх з прамавугольнымі каардынатамі x, y, z даецца формуламі (1), калі дадаць $z = \xi$. Каардынатныя паверхні: эліптычныя цыліндры (σ=const), гіпербалічныя цыліндры (τ = const), плоскасці (ξ = const).

ЭМПІРЫ́ЧНАЕ РАЗМЕРКАВА́ННЕ — размеркаванне імавернасцяў, якое вызначаецца на падставе *выбаркі* для ацэнкі сапраўднага размеркавання разгляданай сукупнасці. Няхай з генеральнай сукупнасці, што вызначаная выпадковай велічынёй X з функцыяй размеркавання $F(x)$, у выніку простага выпадковага выбару атрыманая выбарка аб'ёму n: $x_1, x_2, ..., x_n$, г.зн. паслядоўнасць незалежных аднолькава размеркаваных выпадковых велічыняў x_k з функцыяй размеркавання $F(x)$. Э.р., што адпавядае памянёнай выбарцы, называюць дыскрэтным размеркаваннем, якое прыпісвае кожнаму значэнню імавернасць $\frac{1}{n}$.

ЭМПІРЫ́ЧНАЯ ДЫСПЕ́РСІЯ — статыстычная ацэнка дысперсіі зыходнага размеркавання; велічыня $S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{X})^2$, дзе $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ — выбаркавае сярэдняе, $x_1, x_2, ..., x_n$ — выбарка аб'ёму n. Гэтая статыстыка ёсць зрушаная ацэнка дысперсіі σ^2, бо $M\{S_n^2\} = \left(1-\frac{1}{n}\right)\sigma^2$. Найлепшая нязрушаная ацэнка параметра σ^2 — статыстыка $S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{X})^2$.

ЭМПІРЫ́ЧНАЯ ЛІ́НІЯ РЭГРЭ́СІІ — лінія, якая па выніках назіранняў паказвае залежнасць адной выпадковай велічыні ад іншай. Няхай у выніку эксперыменту атрымана n значэнняў дзвюхмернай выпадковай велічыні (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n). Разам з гэтым на падставе тэарэтычных меркаванняў або размеркавання эксперыментальных значэнняў (x_i, y_i) на дыяграме рассейвання можна дапусціць, што выпадковая велічыня Y мае пэўнае размеркаванне імавернасцяў пры фіксаваным значэнні x іншай велічыні. Такім чынам, $M(Y/x) = g(x, \beta_0, \beta_1, ..., \beta_m)$, дзе β_i $(i = \overline{0, m})$ — невядомыя параметры, функцыя $g(x) = g(x, \beta_0, \beta_1, ..., \beta_m)$ — Э.л.р. Y на X (параметры яе можна вызначыць з дапамогаю метаду найменшых квадратаў), $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_m$ — выбаркавыя каэфіцыенты рэгрэсіі. Пры высвятленні мадэлі рэгрэсіі звычайна лічаць, што функцыя $g(x, \beta)$ лінейная ў дачыненні да невядомых параметраў: $g(x; \beta) = \beta_0 g_0(x) + \beta_1 g_1(x) + ... + \beta_m g_m(x)$.

ЭМПІРЫ́ЧНАЯ ФУ́НКЦЫЯ РАЗМЕРКАВА́ННЯ — функцыя $F_n(x)$, вызначаная стасункамі

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_1 \\ \frac{k}{n}, & x_k < x \le x_{k+1},\ k = \overline{1, n-1}, \\ 1, & x > x_n, \end{cases}$$

адпаведная выпадковай выбарцы $x_1, x_2, ..., x_n$ аб'ёму n, для якой пабудаваная варыяцыйная паслядоўнасць $x_1 \le x_2 \le x_n$. Графікам Э.ф.р. з'яўляецца кавалкава-сталая лінія са скачкамі, кратнымі велічыні $\frac{1}{n}$ у пунктах, што вызначаюцца элементамі варыяцыйнай паслядоўнасці. Для Э.ф.р. характэрныя ўсе ўласцівасці звычайнай функцыі размеркавання. Разам з гэтым

$$MF_n(x) = F(x),\quad DF_n(x) = F(x)(1-F(x)).$$

У адпаведнасці з тэарэмай Глівенка—Кантэлі велічыня $D_n = \sup|F_n(x) - F(x)|$ збягаецца да 0 з імавернасцю 1.

ЭМПІРЫ́ЧНЫ МО́МАНТ r-га парадку — велічыня $\alpha_r = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^r$, дзе $x_1, x_2, ..., x_n$ — выбарка аб'ёму n. Прыватны выпадак Э.м. — *выбаркавае*

сярэдняе $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$. Э.м. і іншыя выбаркавыя характарыстыкі належаць да статыстычных ацэнак адпаведных характарыстык зыходнага размеркавання.

ЭНТРАПІ́Я (ад грэц. entropia — паварот, ператварэнне) у т э о р ы і і н ф а р м а ц ы і — мера нявызначанасці якога-небудзь доследу (выпрабавання), які ў залежнасці ад выпадку можа заканчвацца рознымі зыходамі. Няхай $x_1, x_2, ..., x_n$ — розныя зыходы доследу, $p_1, p_2, ..., p_n$ — адпаведныя імавернасці іх з'яўлення. Тады Э.

$$H = H(p_1, p_2, ..., p_n) = \sum_{i=1}^{n} p_i \log_2(1/p_i).$$

Уласцівасці: Э. роўная нулю, калі адна $p_i = 1$ (адзін з зыходаў верагодны); Э. дасягае максімуму пры фіксаваным n, калі $x_i = \frac{1}{n}$, $i = \overline{1, n}$; Э. аб'яднання двух незалежных доследаў роўная суме іх энтрапіі; Э. доследаў з бясконцай колькасцю зыходаў можна азначыць з дапамогай лімітавага пераходу. Калі гэта прыводзіць да бясконцай Э., то ўводзіцца набліжанае (з дакладнасцю да $\varepsilon > 0$ зыходаў доследаў) паняцце ε-э н т р а п і і.

ЭПЮ́Р (ад франц. épure — рысунак) — комплексны рысунак прасторавай фігуры, атрыманы паводле метаду артаганальнага праектавання яе на дзве ўзаемна перпендыкулярныя плоскасці — франтальную і гарызантальную з наступным сумяшчэннем гэтых плоскасцяў паваротам вакол іх агульнай простай. Апрача франтальнай і гарызантальнай праекцый Э. можа мець яшчэ профільную, якая атрымліваецца артаганальным праектаваннем фігуры на профільную плоскасць, перпендыкулярную да франтальнай і гарызантальнай плоскасцяў праекцый. Э. найбольш пашыраныя ў тэхнічных рысунках, якія называюць м о в а й т э х н і к і, а нарысную геаметрыю — г р а м а т ы к а й гэтай мовы. Заснавальнік нарыснай геаметрыі Г.Монж распрацаваў метады праекцыйнага рысавання.

ЭРАТАСФЕ́НА РЭ́ШАТА — метад, распрацаваны Эратасфенам (каля 276—194 гг. да н.э.), які дазваляе адсейваць *складовыя лікі* з паслядоўнасці натуральных лікаў. Пры гэтым спачатку запісваюць усе натуральныя лікі і выкрэсліваюць адзінку; лік 2 — просты. Потым выкрэсліваюць усе натуральныя лікі, якія дзеляцца на 2; першы незакрэслены лік 3 — просты. Затым выкрэсліваюць лікі, якія дзеляцца на 3, і г.д. Відавочна, што такім чынам можна атрымаць паслядоўнасць простых лікаў адвольнай даўжыні.

ЭРГАДЫ́ЧНАЯ ТЭО́РЫЯ — раздзел тэорыі дынамічных сістэм, у якім яны вывучаюцца з дапамогай тэорыі *меры*.

ЭРЛА́НГЕНСКАЯ ПРАГРА́МА — адзіны пункт гледжання на розныя геаметрыі (напр., эўклідаву, афінную, праектыўную), які ўпершыню выказаў Ф.Кляйн на лекцыі ў 1872 г. ва універсітэце г. Эрланген (Германія). Э.п. істотна стымулявала далейшае развіццё геаметрыі.

ЭРМІ́ТА ІНТЭРПАЛЯЦЫ́ЙНАЯ ФО́РМУЛА — формула запісу мнагасkладу $H_m(x)$ ступені m, якая развязвае задачу інтэрпаляцыі функцыі $f(x)$ па яе значэннях і значэннях яе вытворных у пунктах $x_0, x_1, ..., x_n$, г.зн. задавальняе ўмовы

$$H_m^{(j)}(x_k) = f^{(j)}(x_k),\ j = 0, 1, ..., \alpha_k - 1,\ k = 0, 1, ..., n,$$

$$m = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i - 1.$$

Э.і.ф. прапанаваў Ш.Эрміт (1878).

ЭРМІ́ТА МНАГАСКЛА́ДЫ — сістэма артаганальных мнагаскладаў $\{H_n(x)\}$ (дзе $-\infty < x < +\infty$) з вагой e^{-x^2}. Э.м. з'яўляюцца развязкамі дыферэнцыяльнага раўнання $y'' - 2xy' + 2ny = 0$. Вызначаюцца формулай

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}$$

(дзе $n = 0, 1, ...$) або рэкурэнтнай формулай

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x).$$

У прыватнасці,

$$H_0(x) = 1,\ H_1(x) = 2x,\ H_2(x) = 4x^2 - 2,$$

$$H_3(x) = 8x^3 - 12x,\ H_4(x) = 16x^4 - 48x + 12.$$

Азначэнне Э.м. сустракаецца ў П.Ляпляса (1810). Падрабязным даследаваннем гэтых мнагаскладаў займаліся П.Чабышоў (1859), Ш.Эрміт (1864).

ЭРМІ́ТА ФУ́НКЦЫІ — сістэма артаганальных функцый $h_n(x)$, $-\infty < x < +\infty$, з вагой 1, якія праўдзяць дыферэнцыяльнае раўнанне $u'' + (2n + 1 - x^2)\,u = 0$. Э.ф. звязаныя з *Эрміта мнагаскладамі* $H_n(x)$:

$$h_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}.$$

ЭРМІТАВА МАТРЫЦА — тое, што *самаспалучаная матрыца.*

ЭРМІТАВА ФОРМА — мнагасклад выгляду $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i\bar{x}_j$, дзе $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$ ($\bar{a}$ — лік, камплексна спалучаны з a). Скалярны квадрат вектара унітарнай прасторы з'яўляецца Э.ф. ад каардынат гэтага вектара. Матрыца, утвораная каэфіцыентамі Э.ф., ёсць *эрмітава матрыца.*

ЭРМІТАЎ АПЕРАТАР — *лінейны аператар* A у гільбэртавай прасторы са шчыльным абсягам вызначэння $D(A)$ і такі, што $(Ax, y) = (x, Ay)$ для адвольных $x, y \in D(A)$. У канцамернай прасторы Э.а. апісваецца *эрмітавай матрыцай.*

ЭЎКЛІДА АЛГАРЫТМ — спосаб знаходжання найбольшага агульнага дзельніка двух цэлых лікаў, двух мнагасклададаў або агульнай меры двух адрэзкаў. Апісаны ў геаметрычнай форме Эўклідам (3 ст. да н.э.). Для дадатных лікаў a і b (пры $a \geq b$) Э.а. палягае ў наступным. Дзяленне з астачай ліку a на лік b вядзе да выніку $a = nb + b_1$, дзе дзель n — цэлы дадатны лік, а астача b_1 — або 0, або дадатны лік, меншы за b, $0 \leq b_1 < b$. Робіцца паслядоўнае дзяленне

$$\left.\begin{aligned} a &= nb + b_1, \\ b &= n_1 b_1 + b_2, \\ b_1 &= n_2 b_2 + b_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

(дзе ўсе n_i — дадатныя цэлыя лікі і $0 \leq b_i < b_{i-1}$) да таго часу, пакуль не атрымаецца астача, роўная 0. Гэтую апошнюю астачу b_{k+1} можна не пісаць, тады шэраг роўнасцяў (1) закончыцца так: $b_{k-2} = n_{k-1} b_{k-1} + b_k$, $b_{k-1} = n_k b_k$. Апошняя дадатная астача ў гэтым працэсе і ёсць найбольшы агульны дзельнік лікаў a і b. У выпадку мнагасклададаў або адрэзкаў выкарыстоўваюць аналагічны спосаб. Калі адрэзкі несувымерныя, то Э.а. вядзе да бясконцага працэсу.

ЭЎКЛІДА ТЭАРЭМА — тэарэма пра *простыя лікі*, паводле якой мноства простых лікаў бясконцае. Доказ дадзены яшчэ ў «Пачатках» Эўкліда.

ЭЎКЛІДАВА ГЕАМЕТРЫЯ — геаметрычная тэорыя, заснаваная на сістэме аксіём, упершыню выкладзенай у «Пачатках» Эўкліда (3 ст. да н.э.). Поўнае даследаванне аксіём у 2-й палове 19 ст. паказала, што сістэма аксіём, прапанаваная Эўклідам, не з'яўляецца поўнай. У 1899 г. Д.Гільбэрт даў першую дастаткова строгую аксіяматыку Э.г. (гл. *Гільбэрта сістэма аксіём*).

Сучасная сістэма аксіём Э.г. абапіраецца на 6 асноўных (неазначальных) паняццяў: аб'екты трох родаў — пункты, простыя і плоскасці; тры тыпы дачыненняў паміж імі — «належыць», «паміж», «рух». Яна змяшчае 5 групаў аксіём: прыналежнасці, парадку, руху, непарыўнасці, паралельных (праз дадзены пункт па-за дадзенай простай можна правесці на плоскасці не больш як адну простую, якая не перасякае дадзеную). Д.Гільбэрт у ліку асноўных паняццяў замест «руху» разглядаў паняцце «кангруэнтнасць». За асноўныя можна прыняць і іншыя паняцці (напрыклад, «адлегласць»). З дапамогай асноўных паняццяў Э.г. вызначаюцца ўсе яе іншыя паняцці; усе прапановы пра ўласцівасці геаметрычных фігур, якія не змяшчаюцца ў аксіёмах, павінны быць доказаныя лагічным вывядзеннем з гэтых аксіём. Сістэма аксіём Э.г. мае ўласцівасці поўнасці і несупярэчлівасці. Калі ў аксіяматыцы Э.г. замяніць аксіёму пра паралельныя, то атрыманая новая сістэма аксіём таксама несупярэчлівая, так што асіёма паралельных не залежыць ад астатніх аксіём. Змена аксіёмы Эўкліда пра паралельныя прыводзіць да неэўклідавых геаметрый (гл. *Лабачэўскага геаметрыя, рыманава геаметрыя*). Аб'екты, якія задавальняюць сістэму аксіём Э.г., дапускаюць розныя канкрэтныя тлумачэнні (інтэрпрэтацыі). Звычайная інтэрпрэтацыя Э.г., што ўзнікла як адлюстраванне фактаў рэчаіснасці, звязаная з нагляднымі ўяўленнямі пра навакольны свет. Уся геаметрычная тэрміналогія сведчыць пра тое, што паняцці геаметрычных вобразаў — абстракцыя ад рэальных прадметаў. Так, тэрмін «лінія» паходзіць ад лац. linum — лён, ільняная нітка. Канкрэтныя значэнні маюць і тэрміны грэцкага паходжання: сфера — шар; цыліндр — валік, каток; конус — хваёвая шышка; прызма — адпілаваная; трапецыя — столік.

ЭЎКЛІДАВА КОЛЦА — абсяг цэласнасці з адзінкай, у якім кожнаму элементу a, адрознаму ад нуля, пастаўлены ў адпаведнасць неадмоўны лік $n(a)$ такім чынам, што праўдзіцца ўмова: для адвольных элементаў a і b, $b \neq 0$, можна знайсці элементы q і r, што $a = bq + r$ і $r \neq 0$, або $n(r) < n(b)$.

Кожнае Э.к. — гэта колца галоўных ідэалаў, адваротнае сцверджанне мае месца не заўсёды. Колца цэлых лікаў ($n(a)$ — абсалютная велічыня

а), колца мнагасkладаў ад адной зменнай над полем (n (a) — ступень мнагаскладу) ёсць Э.к. У кожным Э.к. для пошуку найбольшага агульнага дзельніка двух элементаў можна дастасаваць *Эўкліда алгарытмы*.

ЭЎКЛІ́ДАВА ПРАСТО́РА — прастора, уласцівасці якой вызначаныя аксіёмамі *эўклідавай геаметрыі*. У больш агульным сэнсе Э.п. — рэчаісная вектарная прастора V з вызначаным у ёй скалярным множаннем, якое задавальняе 4 аксіёмы. Кожнай упарадкаванай пары элементаў x, $y \in V$ пастаўлены ў адпаведнасць рэчаісны лік, які называецца іх с к а л я р н ы м з д а б ы т к а м і абазначаецца (x, y). Патрабуецца, каб былі выкананыя аксіёмы: $(x, y) = (y, x)$; $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$; $(\alpha x, y) = \alpha\,(x, y)$; $(x, x) > 0$ для ўсіх $x \neq 0$; $(x, x) = 0$ для $x = 0$. Скалярны здабытак вектара x на сябе называецца с к а л я р н ы м к в а д р а т а м гэтага вектара: $(x, x) = x^2$. Н о р м а й в е к т а р а x Э.п. называецца арыфметычнае значэнне квадратовага кораня з яго скалярнага квадрата: $\| x \| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{x^2}$. Норма вектара мае ўласцівасці: $\| x \| = 0$, калі і толькі калі $x = 0$; $\| \alpha x \| = | \alpha | \cdot \| x \|$, дзе α — рэчаісны лік; $| (x, y) | \leq \| x \| \cdot \| y \|$ (н я р о ў н а с ц ь К а ш ы — Б у н я к о ў с к а г а); $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ (н я р о ў н а с ц ь т р о х в у г о л ь н і к а). В у г л о м паміж элементамі x, y называецца вугал φ, для якога $\cos \varphi = (x, y) / \| x \| \cdot \| y \|$. А р т а г а н а л ь н ы м і называюцца вектары, скалярны здабытак якіх роўны 0. Прыклады Э.п.: мноства ўсіх вектараў плоскасці або трохмернай прасторы элементарнай эўклідавай геаметрыі са звычайным скалярным здабыткам. Лінейная прастора A_n, для кожных двух вектараў $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ якой скалярны здабытак вызначаны з формулы $(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$, з'яўляецца Э.п. E_n.

ЭФЕКТЫ́ЎНАЯ СТАТЫСТЫ́ЧНАЯ АЦЭ́НКА — нязрушаная статыстычная ацэнка, дысперсія якой супадае з ніжняй мяжой у няроўнасці Крамера — Рао. Э.с.а. з'яўляецца д а с т а т к о в а й с т а т ы с т ы к а й для ацэньвання параметра. Калі Э.с.а. існуе, то яе можна атрымаць з дапамогай *максімальнай праўдападобнасці метаду*. З прычыны таго, што ў многіх выпадках ніжняя мяжа ў няроўнасці Крамера—Рао не дасягаецца, у матэматычнай статыстыцы часта Э.с.а. называюць ацэнку, якая мае мінімальную дысперсію ў класе ўсіх нязрушаных ацэнак разгляданага параметра.

Я

Я́ДРАВАЯ ПРАСТО́РА — лакальна выпуклая прастора, у якой усе лінейна непарыўныя адлюстраванні ў кожную банахаву прастору з'яўляюцца *ядравымі аператарамі*.

Я́ДРАВЫ АПЕРА́ТАР — *лінейны аператар*, які адлюстроўвае адну лакальна выпуклую прастору ў іншую і дазваляе спецыяльны від апраксімацыі аператарамі канцага рангу, г.зн. лінейнымі непарыўнымі аператарамі з канцымі вобразамі. Прыклад Я.а. — інтэгральны аператар з гладкім *ядром*.

ЯДРО́ і н т э г р а л ь н а г а а п е р а т а р а — функцыя $K(s, t)$, што задае інтэгральнае пераўтварэнне $\varphi(s) = \int_a^b K(s,t) f(t) dt$, якое пераводзіць функцыю $f(t)$ у функцыю $\varphi(s)$. Тэорыя такіх пераўтварэнняў звязаная з тэорыяй лінейных інтэгральных раўнанняў.

ЯДРО́ ГОМАМАРФІ́ЗМУ — азначаецца для гомамарфізму $\varphi : A \to B$ групаў (колцаў, модуляў над колцам R) як мноства ўсіх элементаў з A, якія адлюстроўваюцца ў адзінку (нуль) з B. Абазначаецца $\operatorname{Ker} \varphi$. Я.г. ёсць н а р м а л ь н а я п а д г р у п а (ідэал, падмодуль) у A, а фактар-група (фактар-колца, фактар-модуль A) $\operatorname{Ker}\varphi$ ізаморфная вобразу гомамарфізму φ (т э а р э м а п р а г о м а м а р ф і з м ы). Аналагічна можна даць вызначэнне ядра ў выпадку, калі A, B — аднатыпныя універсальныя алгебры, у якіх апроч складання ёсць яшчэ пэўная сістэма алгебраічных аперацый і $\{0\}$ з'яўляецца падалгебрай. Уклад $\operatorname{Ker}\varphi \to A$ будзе ядром марфізму φ у катэгорыі ўсіх групаў (колцаў, R-модуляў).

ЯКАБІЯ́Н — азначаецца для дыферэнцавальнага адлюстравання

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} : A \to \mathbf{R}^n, \ A \subset \mathbf{R}^n$$

як вызначнік

$$\det(f(\bar{x}))=\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_n} \end{vmatrix},$$

дзе $\bar{x}=(x_1, x_2, ..., x_n)\in A$. Я. ёсць вызначнік матрыцы Якобі адлюстравання *f*. Я. выкарыстоўваюцца, напрыклад, для высвятлення залежнасці або незалежнасці функцый $f_1, f_2, ..., f_n$; у тэарэме пра існаванне адлюстравання f^{-1}, адваротнага да *f*; у тэарэмах пра наяўныя адлюстраванні пры замене зменных у кратных інтэгралах.

ЯКО́БІ МНАГАСКЛА́ДЫ — мнагасклады, артаганальныя на адрэзку [–1, 1] з вагавай функцыяй $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, $\alpha>-1$, $\beta>-1$. У прыватных выпадках пры $\alpha=\beta=0$ атрымліваюцца *Лежандра мнагасклады*; пры $\alpha=\beta=-\frac{1}{2}$ і $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$ — *Чабышова мнагасклады*; пры $\alpha=\beta$ — ультрасферычныя мнагасклады або мнагасклады Гегенбаўэра. Я.м. вызначаюцца формулай Радрыга

$$P_n(x;\alpha,\beta)=\frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\cdot\frac{d^n}{dx^n}[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}].$$

ЯКО́БІ СІ́МВАЛ — абагульненне *Лежандра сімвала*. Гл. таксама *Квадратовая рэшта*.

Я́РАВЫХ ФУ́НКЦЫЙ МЕ́ТАДЫ МІНІМІЗА́ЦЫІ — лікавыя метады пошуку мінімумаў абмежаваных знізу функцый многіх зменных

$$f(x)=f(x_1, ..., x_m)\in C^2(D),\quad D\subset \mathbf{R}^m,$$

якія маюць такую асаблівасць, што ў даследаваным абсягу ўласныя значэнні $\lambda(x)$ матрыцы Гесэ

$$j''(x)=\left\| \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right\|,\ i,j=1,2,...,m,$$

упарадкаваныя ў кожным пункце $x\in D$ і праўдзяць няроўнасць

$$0<|\min \lambda_i(x)|\le \lambda_1(x). \qquad (1)$$

У гэтым выпадку паверхні ўзроўню мінімізаванай функцыі $f(x)=\text{const}$ маюць структуру, моцна адрозную ад сферычнай. Такія функцыі $f(x)$ называюцца яравымі. Ступень яравасці характарызуецца лікам $\lambda_1(x)/|\min_{\lambda_i(x)\ne 0}\lambda_i(x)|$.

Калі ўласныя значэнні $f''(x)$ праўдзяць няроўнасці

$$|\lambda_m(x)|\le\ldots\le|\lambda_{m-2+1}(x)|\le\lambda_{m-2}(x)\le\ldots\le\lambda_1(x),$$

а тасунак $|\lambda_{m-2+1}(x)|\,/\,|\lambda_m(x)|$ невялікі, то лік *r* называецца памерам яра функцыі $f(x)$. У трохмернай прасторы, напрыклад, магчымыя дзвюхмерныя і аднамерныя яры. Чым вышэйшы памер яра, тым цяжэйшы пошук пункта мінімуму. Для мінімізацыі яравых функцый неабходна выкарыстоўваць спецыяльныя метады, якія ўлічваюць асаблівасць (1). Звычайныя метады дазваляюць знайсці толькі адзін з пунктаў на дне яра, для якога норма градыента $f'(x)$ можа быць істотна меншая, чым у іншых пунктаў абсягу. Аднак атрыманы пункт, як правіла, размяшчаецца вельмі далёка ад сапраўднага пункту мінімуму, значэнне яравай функцыі ў якога ў шмат разоў меншае, чым амаль скрозь на дне яра.

АЎТАРЫ ЭНЦЫКЛАПЕДЫІ

Вячаслаў Абрашын
Аляксандр Алехна
Анатоль Антаневіч
Анатоль Астроўскі
Віктар Ахраменка
Юрась Багданаў
Віталь Баланчанка
Яўген Барабанаў
Васіль Басік
Васіль Бернік
Валянцін Борухаў
Наталя Броўка
Ігар Бруй
Аляксей Бурдун
Іван Бялько
Станіслаў Бяляўскі
Раймонд Вальвачоў
Ігар Варановіч
Ігар Васільеў
Уладзімір Воднеў
Уладзімір Габрыновіч
Валер Гайко
Валянцін Гарохавік
Фёдар Гахаў
Валер Громак
Аляксей Гусак
Лявон Духвалаў
Міхась Дымкоў
Валер Еравенка
Ігар Жук
Эдмунд Звяровіч
Мікалай Зуеў
Мікалай Ізобаў
Эла Кавалеўская
Таццяна Капылова
Яўген Карабёнак
Тамара Кашуба
Мікалай Кобрынец
Сяргей Конанаў
Людміла Конюх
Уладзімір Конюх
Іна Косціна
Віктар Краснапрошын
Аляксандр Крачкоўскі
Пётр Лапо
Валер Лапцінскі
Лявон Латоцін
Мікалай Леняшынскі
Валер Ліпніцкі
Мікалай Лукашэвіч
Кім Лукін
Сяргей Мазанік
Людміла Майсеня
Пётр Манастырны
Аляксей Марозаў
Валер Мататаў
Міхась Маталыцкі
Уладзімір Машчэнскі
Алег Мельнікаў
Уладзімір Міроненка
Генадзь Мядзведзеў
Мікалай Мяцельскі
Адольф Навумовіч
Ніл Навумовіч
Вадзім Панамарэнка
Альварэс Паўлоўскі
Рыма Прохарава
Васіль Прохараў
Аляксандр Пякарскі
Віктар Рабушка
Якаў Радына
Галіна Раманава
Галіна Расолька
Яўген Роўба
Валянцін Русак
Алег Садоўскі
Уладзімір Сарванаў
Уладзімір Сацута
Аляксандр Старавойтаў
Мікалай Стэльмашук
Уладзімір Суvoраў
Тамара Сухая
Уладзімір Сячко
Мар'ян Талочка
Вячаслаў Танаеў
Мікалай Труш
Рэгіна Тышкевіч
Анатоль Фядэнка
Юрась Харын
Уладзімір Цагельнік
Уладзімір Цімаховіч
Алег Чупрыгін
Леанід Чэркас
Усевалад Шкель
Уладзімір Шлык
Наталя Шчаглова
Уладзімір Шылінец
Васіль Юфераў
Анатоль Яблонскі
Марына Язневіч
Таццяна Якіменка
Леанід Яновіч
Вячаслаў Янчэўскі

ЗМЕСТ

Даведкавае выданне

МАТЭМАТЫЧНАЯ ЭНЦЫКЛАПЕДЫЯ

Рэдактар *Яніна Марцінові́ч*

Карэктар *Ірына Юхневіч*

Набор формул *Алена Лобач*

Камп'ютарная праўка *Алена Каралевіч*

Макетаванне *Алена Лобач*

Вокладка *Віталь Катовіч*

Тэхнічны рэдактар *Ала Таўстая*

Графічнае выкананне рысункаў *Ніна Яўменава*

ISBN 985-458-059-8

9 789854 580593

Падпісана ў друк 12.12.01. Фармат 70 × 100 $^{1}/_{16}$. Папера афсетная. Гарнітура Times New Roman. Друк афсетны. Ум.-друк. арк. 40,3. Ул.-выд. арк. 58,5. Наклад 1000 паасобнікаў. Замова 2495.

Выдавецтва «Тэхналогія». ЛВ № 73 ад 07.08.01. 220007, Мінск, вул. Ляўкова, 19.

Сертыфікат выдавецкай дзейнасці МН № 0000385, выдадзены 19.03.99 Беларускай гандлёва-прамысловай палатай.

Рэспубліканскае унітарнае прадпрыемства «Паліграфічны камбінат імя Я.Коласа». 220600, Мінск, вул. Чырвоная, 23.